MEMORIE

DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

MEMORIE

DELL'I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

VOLUME QUINTO

VENEZIA
PRESSO LA SEGRETERIA DELL'I. R. ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE
1855.

AVVERTIMENTO

In esecuzione dell' Articolo 134 degli Statuti Interni, si dichiara che ogni Autore è particolarmente responsabile delle opinioni e dei fatti esposti ne' proprii scritti.

ELENCO

DEI

MEMBRI ATTUALI DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

4 Luglio 1855.

PRESIDENTE

Poli dott. Baldassare, Professore di filosofia teorica e morale e della storia della filosofia nell' i. r. Università di Padova, Direttore generale provvisorio dei Ginnasj delle Provincie Venete, Socio di varie Accademie.

VICE-PRESIDENTE

Menin ab. dott. Lodovico, professore emerito, Bibliotecario e Direttore della Facoltà filosofica dell' i. r. Università di Padova, Socio di varie Accademie.

SEGRETARIO

Venanzio dott. Girolamo.

VICE-SEGRETARIO

Bianchetti dott. Giuseppe, Socio di varie Accademie.

MEMBRI ONORARJ

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Francesco Carlo Giuseppe, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ecc., cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine R. di s. Stefano d'Ungheria, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Giovanni Battista Giuseppe Fabiano Sebastiano, Principe Imperiale, Principe Reale di Ungheria e di Boemia, ecc., cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine militare di Maria Teresa e dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Luigi Giuseppe Antonio, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ecc., cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine R. di s. Stefano d'Ungheria, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Leopoldo Lodovico Maria Francesco Giulio Eustachio Gerardo, Cav. del Toson d'oro e del R. Ordine Sardo dell'Annunziata, Gran Croce dell'Ordine Costantiniano di s. Giorgio di Parma, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Stefano Francesco Vittore, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Imp. di S. Stefano d'Ungheria e di quello Imp. Austriaco di Leopoldo, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Ferdinando Massimiliano Giuseppe, cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine R. Siciliano di S. Ferdinando e del merito, ecc. ecc., Vice-Ammiraglio e Comandante superiore dell'i. r. Marina Austriaca.

S. A. S. il Principe Clemente Venceslao di Metternich-Winneburg, ecc., Grande di Spagna di I Classe, cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine R. di s. Stefano di Ungheria (in brillanti), Gran Croce della Croce civile d'Onore, i. r. Consigliere intimo attuale e Ciambellano di S. M. I. R., ecc.

S. E. il sig. co. Francesco Antonio di Kolowrat Liebsteinsky, cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Croce d'oro della Croce civile d'Onore, Bailo Onorario e Gran Croce dell'Ordine sovrano di S. Giovanni di Gerusalemme, i. r. Consigliere intimo e Ciambellano di S. M. I. R., ecc.

S. E. il sig. co. Luigi Palffy di Erdöd, cav. di I. classe dell'Ord. imp. austr. della Corona di ferro, cav. dell'Ordine Russo dell'Aquila bianca, dell'Ordine Pontificio di Cristo, i. r. Consigliere intimo, i. r. Ciambellano, ecc.

S. E. il sig. bar. Francesco di Galvagna, cav. di seconda Classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, Commendatore dell'Ordine Pontificio di s. Gregorio il Grande, i. r. Consigliere intimo.

S. E. il sig. co. ANDREA CITTADELLA-VIGODARZERE, i. r. Consiglier intimo e Ciambellano di S. M. I. R. A., Commendatore dell'Ordine dei Gioanniti, Consigliere straordinario dell'i. r. Accademia di Belle Arti in Venezia, Membro effettivo dell'Imp. Accademia delle Scienze in Vienna, ecc.

FRANCESCONI ERMENEGILDO, i. r. Consigl. aulico, cav. di terza Classe dell'i. r. Ordine Austriaco della Corona di Ferro, Commendatore del R. Ordine Belgio di Leopoldo, Socio Onorario dell'i. r. Accademia di Belle Arti in Venezia.

SARTORI-CANOVA Monsignor GIOVANNI BATTISTA, Vescovo di Mindo, cav. di 2. classe dell'Ord. Imp. Austr. della Corona di ferro, Socio onorario dell'i. r. Accademia di Belle Arti in Venezia.

DI SEBREGONDI nob. GIUSEPPE, co. e patrizio romano, cav. dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Gran Croce dell'Ordine Pontificio di s. Gregorio il Grande, cav. dell'Ordine dei Gioanniti e di quello Pontificio di Cristo (in brillanti).

S. E. il sig. bar. CARLO FEDERICO di KÜBECK e KÜBAU, Gran Croce dell'Ordine I. di S. Stefano d'Ungheria, Gran Croce e Cancell. dell'Ordine imp. austr. di Leopoldo, Gran Croce dell'Ordine R. Bavaro di S. Michele, cav. di seconda Classe dell'Ordine Imp. Russo di s. Stanislao, ecc., i. r. Consigliere intimo e Presidente del Consiglio dell'Impero.

S. E. il signor conte CARLO D'INZAGHI, Gran Croce dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, e dell'Ordine Costantiniano di S. Giorgio di Parma, i. r. Consigliere intimo, i. r. Ciambellano, ecc., Membro onorario dell'imp. Accademia delle Scienze in Vienna.

S. E. il Feld-Maresciallo co. GIUSEPPE RADETSKY DI RADETZ, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ord. di Maria Teresa e di quello di S. Stefano d'Ungheria (in brillanti), ecc. ecc. Governatore generale civile e militare del Regno Lombardo-Veneto, i. r. Consigliere intimo attuale e Ciambellano di S. M. I. R., ecc.

S. E. il sig. co. LEONE LEOPOLDO DI THUN-HOHENSTEIN, i. r. Consigl. intimo di S. M. I. R., cav. di prima Classe dell'Ord. Imp. Austriaco della Corona di ferro, ecc. Ministro del culto e della Pubblica Istruzione e Socio di varie Accademie.

S. E. consigl. cav. GIORGIO OTTONE DI TOGGENBURG, i. r. Consigl. intimo di S. M. I. R., cav. di I Classe dell'Ordine Imp. Austriaco della Corona ferrea, ecc. ecc. Ministro del Commercio, dell'Industria e delle Pubbliche Costruzioni, Socio di varie Accademie.

Il nob. co. GIO. BATTISTA MARZANI di Steinhof e Neuhaus, patrizio tirolese, Comm. dell'Ord. Pontificio di S. Gregorio il Grande, Consigliere Aulico attuale, f. f. di Luogotenente delle Provincie Venete, Socio di varie Accademie.

NEGRELLI LUIGI, cav. di Moldelbe, i. r. Consigliere ministeriale di I. classe, cav. dell'Ordine Impe-

riale Austriaco della Corona ferrea di 3.a classe, Direttore Superiore per le Costruzioni delle strade ferrate nel Regno Lombardo Veneto, ecc., in Verona.

S. E. il cav. Carlo Gorzkowsky di Gorskow, Gran Croce dell'Ordine imp. Austriaco di Leopoldo, cav. dell'Ord. di Maria Teresa ecc. ecc., Generale di Cavalleria, i. r. Consigl. intimo e Ciambellano di S. M. I. R., Governatore militare di Venezia.

S. E. Monsignor Pietro Aurelio Mutti, Patriarca di Venezia, Primate della Dalmazia, Gran Dignitario e Cappellano della Corona del Regno Lombardo-Veneto, cav. di I. classe dell'Ordine Imp. Austr. della Corona di ferro, ecc. ecc., i. r. Consigl. intimo attuale di S. M. I. R. A.

Barone Camillo Vacani di Fort'Olivo, cav. di 2.a classe dell'Ordine Imp. Austr. della Corona Ferrea, della Legion d'Onore di Francia, e di molti altri ordini, i. r. Tenente Maresciallo del Genio in pensione, Membro onorario dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze Lettere ed Arti in Milano.

MEMBRI EFFETTIVI PENSIONATI.

(26 Novembre 1839)

Santini Giovanni, cav. di 3.a Classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, cav. del R. Ordine Danese di Dannebrog e di quello Granducale Toscano di S. Giuseppe, Commendatore dell'Ordine imp. austr. di Francesco Giuseppe, Direttore provvisorio della Facoltà matematica, Direttore dell'i. r. Osservatorio e Professore titolare di Astronomia nell'i. r. Università di Padova.

Catullo dottor Tommaso Antonio, cav. della Milizia Aurata, Professore emerito di Storia Naturale, nell'i. r. Università di Padova.

Zantedeschi ab. Francesco, cav. di s. Maurizio e Lazaro, Professore di Fisica nell'i. r. Università di Padova.

(26 Novembre 1839—20 Giugno 1843)

Casoni ingegnere Giovanni, Architetto all'Ufficio delle fabbriche civili e lavori idraulici dell'Arsenale, in Venezia.

(26 Novembre 1839—16 Gennajo 1844)

Fapanni dottor Agostino, cav. della Milizia Aurata, in Venezia.

(26 Novembre 1839—10 Giugno 1851)

Menin ab. Lodovico, *come sopra.*

(26 Settembre 1840)

Bizio dottor Bartolommeo, Professore emerito dell' I. R. Scuola Tecnica, in Venezia.

Bellavitis nob. dottor Giusto, Professore di Geometria descrittiva nell' i. r. Università di Padova, Ispettore provvisorio dell' i. r. Scuola Reale (Tecnica) Superiore in Venezia.

Venanzio dottor Girolamo di Portogruaro, *come sopra.*

Sandri Giulio, di Verona.

Bianchetti dottor Giuseppe, in Venezia, *come sopra.*

(26 Settembre 1840—3 Giugno 1843)

Nardo dottor Gian-Domenico, in Venezia.

(26 Settembre 1840—16 Gennajo 1844)

De Visiani dottor Roberto, Professore di Botanica nell' i. r. Università di Padova.

(26 Giugno 1843—4 Ottobre 1854)

Turazza dottor Domenico, Professore di Geodesia e d'Idrometria nell' i. r. Università di Padova.

(16 Gennajo 1844—10 Giugno 1851)

Minich dottor Serafino Rafaele, Professore di Matematica sublime nell'i. r. Università di Padova.

Poli dottor Baldassare, *come sopra.*

(13 Gennajo 1846—23 Marzo 1855)

Namias Giacinto, dottore in Medicina, Medico primario nell' Ospitale civile di Venezia.

MEMBRI EFFETTIVI NON PENSIONATI.

(4 Ottobre 1854)

Cicogna Emmanuele, cav. della Legion d' Onore, consigliere straordinario dell' i. r. Accademia di Belle Arti, in Venezia.

Cappelletto Antonio Alippio, ingegnere meccanico, in Verona.

Zanardini Giovanni, Dottore in Medicina, in Venezia.

Zambra dottor Bernardino, Professore di Fisica nell' i. r. Ginnasio Liceale di S. Catterina in Venezia.

Canal ab. Pietro, Professore di Filologia classica per le lezioni di Filologia e Letteratura Latina e di Letteratura Italiana, nell' i. r. Università di Padova.

Zambelli dottor Barnaba Vincenzo, Professore di Scienze Politiche, e di Legislazione Amministrativa Austriaca nell' i. r. Università di Padova.

Zannini dottor Gio. Battista, in Belluno.

Cavalli co. Ferdinando, in Padova.

Fario Leovigildo Paolo, Dottore in Medicina, in Venezia.

(23 Marzo 1855)

Galvani Antonio, chimico, in Venezia.

De Zigno nob. Achille, cav. di 3.a Classe dell'Ordine Imp. Austr. della Corona di ferro e Podestà in Padova.

Sagredo co. Agostino, Consigliere straordinario dell' i. r. Accademia di Belle Arti in Venezia.

SOCJ CORRISPONDENTI

NELLE PROVINCIE VENETE

(28 Novembre 1842)

Parolini nob. Alberto, i. r. Scudiere di S. M., in Bassano.

Parravicini nob. Luigi, Direttore della i. r. Scuola Reale (Tecnica) superiore, in Venezia.

Pasini Valentino, Dottor in Legge, in Vicenza.

De Tipaldo dottor Emilio, cav. dell'Ordine R. Greco del Salvatore, in Venezia.

(7 Agosto 1843)

Gera Francesco, Dottor in Medicina, di Conegliano.

Mugna Gio. Battista, Dottore in Medicina, in Padova.

Zinelli ab. Federico, Professore e Vice-Direttore dello Studio Filosofico nel Seminario Patriarcale di Venezia.

(26 Maggio 1844)

Asson Michelangelo, Dottore in Medicina e Chirurgia, in Venezia.

Penolazzi Ignazio, Dottore in Medicina, in Venezia.

(20 Gennajo 1845)

Selvatico Estense march. Pietro, cav. di 3.a classe dell'Ordine imp. austr. della Corona di ferro, Segretario e Capo provvisorio dell' i. r. Accademia di Belle-Arti, in Venezia.

Spongia dottor Filippo, Consigliere di Sanità presso l' I. R. Luogotenenza delle Provincie-Venete.

(30 Novembre 1846)

Locatelli dottor Tommaso, in Venezia.

Valentinelli ab. Giuseppe, i. r. Bibliotecario della Marciana, in Venezia.

(24 Settembre 1847)

Luzzato Samuel David, in Padova.

(8 Ottobre 1850)

Minich Angelo, dottor in Medicina, in Venezia.

(19 Maggio 1855)

Bucchia dott. Gustavo, Professore di Architettura civile, idraulica e stradale nell' i. r. Università di Padova.

Miniscalchi conte Francesco, i. r. Ciambellano di S. M. I. R., di Verona.

Sorio padre Bartolommeo, di Verona.

Veludo Giovanni, i. r. Vice-Bibliotecario della Marciana, in Venezia.

Massalongo dottor prof. Abramo, in Verona.

Messedaglia dottor Angelo, di Verona.

Pirona professor Jacopo, in Udine.

Martelli Gio. Battista, Segretario presso l' I. R. Luogotenenza delle Provincie Venete, Socio dell' Ateneo Veneto e di varie altre Accademie.

Bassi Gio. Battista, ingegnere di Udine.

Trattenero dottor Vigilio, Aggiunto Calcolatore Astronomo dell' i. r. Osservatorio di Padova.

Ziliotto Pietro, Dottor in Medicina, in Venezia.

FUORI DELLE PROVINCIE VENETE.

Arcari Giovanni, ingegnere, in Trieste.

Arneth cav. Giuseppe, cav. dell' Ordine Imp. Austr. di Francesco Giuseppe, Consigl. di Reggenza e Direttore dell' i. r. Gabinetto di Numismatica e di Antichità in Vienna.

Baumgartner bar. Andrea, ex ministro, Consiglier intimo, cav. dell' Ordine imp. austr. di Leopoldo, ecc. in Vienna.

Cantù cav. Cesare, in Milano.

Czoernig barone Carlo, cav. di 2.a classe dell'Ordine imp. austr. della Corona di ferro, i. r. Capo Sezione nel Ministero del Commercio.

D' Ettingshausen Andrea, Professore di fisica nell' i. r. Università di Vienna.

De Filippi Filippo, Dottore in Medicina, Aggiunto al Museo civico di Storia Naturale, in Milano.

Ghega Carlo, Dottore in Matematica, i. r. Consigliere ministeriale, cav. dell' Ordine imp. austr. di Leopoldo, ecc. Capo della Direzione centrale per le Costruzioni delle strade ferrate, in Vienna.

Hyrtl Giuseppe, cav. dell' Ordine imp. austr. di Francesco Giuseppe, Professore di Anatomia nell'i. r. Università di Vienna.

Kreil dottor Carlo, cav. dell' Ordine imp. austr. di Francesco Giuseppe, Direttore dell' Istituto centrale per la meteorologia ed il magnetismo tellurico, in Vienna.

De Lugnani Giuseppe, cav. dell' Ordine imp. austr. di Francesco Giuseppe, Direttore dell' i. r. Accademia di Commercio e di Nautica, in Trieste.

Mainardi dottor Gaspare, Professore di Matematica nell' i. r. Università di Pavia.

Partsch dottor Paolo, cav. dell'Ord. imp. austr. di Francesco Giuseppe, Capo e Custode dei Gabinetti di Corte pei minerali in Vienna.

Pratobevera barone Carlo Giuseppe, in Vienna.

Unger Francesco, Professore di botanica in Vienna.

Zendrini Gio. Maria, Professore di Storia Naturale nell' i. r. Università di Pavia.

Zescevich Giovanni, Professore nell' i. r. Collegio di Marina, in Trieste.

FUORI DELLA MONARCHIA.

Amici cav. Gio. Battista, di Firenze.

Antinori commend. Vincenzo, di Firenze.

Bertoloni prof. Antonio, di Bologna.

Bonaparte Carlo Luciano, Principe di Canino, in Parigi.

Botto prof. Giuseppe Domenico, di Torino.

Buffalini cav. Maurizio, di Firenze.

Clementi dott. Giuseppe, in Genova.

Dalle Chiaje prof. Stefano, di Napoli.

Duca di serra di Falco Domenico, di Palermo.

Giorgini cav. Gaetano, di Firenze.

Giulio prof. Carlo Ignazio, di Torino.

Linari prof. Santi, di Siena.

Marianini cav. Stefano, in Modena.

Matteucci prof. Carlo, di Pisa.

Moris cav. Giacinto, di Torino.

Mossotti cav. Ottaviano Fabrizio, di Pisa.

Negri dottor Cristoforo, in Torino.

Orioli prof. Francesco, di Roma.

Pareto march. Lorenzo N., di Genova.

Parlatore prof. Filippo, di Firenze.

Pianciani prof. Gio. Battista, di Roma.

Piria prof. Rafaele, di Pisa.

Plana commend. Giovanni, di Torino.

Puccinotti prof. Francesco, di Pisa.

Repetti prof. Emmanuele, di Firenze.

Ridolfi march. Cosimo, di Firenze.

Savi cav. Paolo, di Pisa.

Scacchi prof. Arcangelo, di Napoli.

Sismonda cav. Angelo, di Torino.

Spinola march. Massimiliano, di Genova.

Tenore cav. Michele, di Napoli.

Tommaseo Nicolò, in Corfù.

MEMORIE

CALCOLO
DELLE PERTURBAZIONI

PRODOTTE

DALLE ATTRAZIONI DI GIOVE, SATURNO, DELLA TERRA E DI VENERE

NEGLI ELEMENTI ELLITTICI

DELLA COMETA DI BREVE PERIODO APPELLATA DI BIELA

DAL SUO PASSAGGIO AL PERIELIO NEL 1846 FINO AL PROSSIMO SUO RITORNO NEL 1852.

DEL M. E. PROF. GIOVANNI SANTINI.

I. La Cometa periodica, della quale intendo oggi parlarvi brevemente, dotti e cortesi Colleghi, è per molte ragioni sommamente interessante, e comunque molto piccola, sicchè soltanto con molta difficoltà possa talvolta essere veduta ad occhio nudo, merita che con diligenza tengasi dietro ai suoi movimenti, e si procuri di apparecchiarne per tempo le effemeridi ad oggetto di dirigere verso di essa la nostra attenzione nei periodici suoi ritorni al perielio per non perderne la traccia, ora che per la diligenza degli astronomi è stata confermata pienamente, a grande onore della teoria generale della universale attrazione, la sua periodicità. In fatti fra tutte le comete conosciute è quella, la cui orbita trovasi in grande vicinanza dell'orbita terrestre, ed in un indefinito numero di rivoluzioni potrebbe trovarsi in una grande prossimità alla terra; e sebbene per la piccolezza somma della sua massa non possano venirne alterati i movimenti di questa, non sarebbe di leggeri prevedibile l'influenza, che potrebbe avere per noi un grande avvicinamento di corpi

dotati necessariamente di differenti qualità, e di velocità così grandi, come quelle dei corpi celesti. Fortunatamente però le scambievoli loro posizioni rendono un tale avvenimento infinitamente poco probabile, ed è credibile che le azioni reciproche planetarie lo tolgano per intero, osservandosi la meravigliosa armonia dell'Universo, dalla quale si appalesa, che la suprema mente ordinatrice del sistema mondiale ha con meraviglioso artificio disposto i corpi celesti per sì fatto modo, che regni da per tutto l'ordine e la stabilità, e siano evitate le condizioni, dietro le quali le leggi della Meccanica additerebbero sovversioni e grandi cambiamenti nelle orbite planetarie col lento svolgersi dei secoli. In secondo luogo, siccome pel primo rimarcò già il fu celebre prof. Littrow, l'orbita di questa cometa trovasi presso che intersecata con l'orbita della cometa periodica detta di *Encke* dal nome del celebre direttore dell'Osservatorio di Berlino, che con tanta cura ne ha svolto la teorica nei molti suoi passaggi al perielio fino al presente osservati, e se venissero ambedue a passare contemporaneamente per quella regione, in cui le orbite si intersecano, sarebbe temibile un conflitto; caso in vero esso pure infinitamente poco probabile, e che, avuto riguardo ai rapporti fra le attuali loro rivoluzioni periodiche, ed i tempi nei quali ai nostri giorni succedonsi i rispettivi loro ritorni al perielio, non potrebbe forse verificarsi od almeno dovrebbe (fatta astrazione dalle perturbazioni) rimuoversi a migliaja di secoli dalla presente età. Se per queste due circostanze, la cometa attuale attrae a sè la nostra attenzione per una specie di curiosità inerente alla umana condizione, ben più la merita il singolare fenomeno, che presentò nella sua ultima apparizione avvenuta nel 1846, di cui parlarono tutti i giornali della colta Europa, e che poterono contemplare tutti coloro che la osservarono verso la metà di febbrajo di quell'anno con un cannocchiale anche di mediocre ingrandimento; io voglio parlare dell'apparente divisione del suo nucleo in due nuclei distinti separati l'uno dall'altro da piccolo intervallo, che andò lentamente aumentando da una sera all'altra, contornati entrambi da una nebulosità, per modo conformati da presentare le apparenze di due piccole comete al tempo stesso visibili nel campo del cannocchiale, e descrivendo di concerto e pari passo la loro orbita nello spazio. Un fenomeno così singolare, inatteso, non osservato nelle sue anteriori apparizioni del 1826 e 1832 desta un vivo interesse, ed è di molta importanza il riscontrare, se nel suo ritorno al perielio nel settem-

bre del 1852 i due nuclei saransi ricongiunti, se saransi separati, od essendosi successivamente di più in più allontanati, debbansi in seguito riguardare come due comete distinte.

Ho stimato quindi conveniente riprendere il calcolo delle perturbazioni, che l'azione dei pianeti induce negli elementi ellittici di questa cometa, che in varie riprese io ho esteso col mezzo delle meccaniche quadrature dal 1826 fino al 1846, colla mira di apparecchiarne le effemeridi per poterla ricercare nelli suoi successivi ritorni al perielio; e con la stessa mira avendolo continuato ora dal 1846 fino al 1852, ve ne presento i risultati in continuazione di quelli, che già voi cortesemente accoglieste nel primo volume delle nostre Memorie, accompagnandoli con una effemeride per dirigerne la ricerca e le osservazioni in quella epoca, alla quale ci andiamo ora approssimando.

II. Nella Memoria ora citata vi esposi come non essendosi potuta osservare la cometa nel passaggio al perielio avvenuto nel 1839, perchè rimase sempre in quell'epoca immersa nei raggi solari vicina alla sua congiunzione, era stato necessario calcolare le perturbazioni dipendenti da Giove e da Saturno, continuando le precedenti mie ricerche esposte negli Atti dell'Accademia di Padova; e sebbene calcoli numerici così lunghi e noiosi venissero continuati per due interi periodi, tuttavia nel 1846 si trovarono abbastanza vicini al vero per poter tosto ritrovare la cometa colla scorta della effemeride calcolata dietro gli elementi ottenuti per sì lunga serie di calcoli numerici. Gli elementi, ai quali ero pervenuto, furono i seguenti:

Passaggio al perielio · · · τ =	1846 · · · 42^g,40127	T. medio in Padova.
ossia · · ·	1846 · · · 11, 40127 febbraio	
Longitudine del perielio · · · · π =	109°. 4'.29'',11	dall'equinozio medio
del nodo · · · ω =	245. 57. 24, 46	degli 11 febbraio 1846.
Inclinazione all'Ecclittica · · · i =	12. 35. 25, 85	
Angolo di eccentricità · · · · · · φ =	49. 10. 39'',98	
Moto diurno siderale medio · · n =	537'',653627	
Log. semiasse maggiore · log. a =	0, 5463360.	

Proponendomi ora la ricerca degli elementi ellittici dell'orbita di questa cometa pel 1852, avendo riguardo alle attrazioni planetarie, sarebbe stato

necessario di correggere prima i precedenti elementi mediante le osservazioni fatte nel 1846. In quell'epoca, la cometa venne osservata diligentemente e da me all'Osservatorio di Padova, ed in tutti gli altri Osservatorii ai nostri giorni disseminati per l'intera superficie del globo terracqueo. Molte dotte e diligenti ricerche furono allora fatte da astronomi celebratissimi, delle quali anco resi conto pubblicando le mie osservazioni nell'ultimo volume dei nuovi Saggi dell'Accademia di Padova. Fra i diversi sistemi di elementi ellittici rappresentanti le osservazioni di quell'anno con meravigliosa esattezza, meritano somma lode quelli del sig. Plantamour, direttore dell'Osservatorio di Ginevra, del cui lavoro interessantissimo ho riferito un estratto nella citata mia Memoria. Da questi ho stimato conveniente di partire per la continuazione delle mie ricerche, ben vedendo, che inutile sarebbe stata una correzione ai precedenti elementi dopo il citato diligentissimo lavoro.

Riducendo pertanto il tempo del passaggio al perielio assegnato dal sig. Plantamour pel meridiano di Ginevra a quello di Berlino, di cui mi sono servito costantemente per maggior semplicità, avendo desunto dalle esattissime effemeridi del sig. cav. Encke i luoghi dei pianeti perturbatori, si ha il seguente sistema per l'anno 1846.

$\tau = 42^g.02487$ dell'anno 1846. T. M. di Berlino.

$\pi = 109^0.\ 2'.20'',1$ } Eq. medio
$\omega = 245.\ 54.\ 38,\ 8$ } o gennaio 1846

$i = 12.\ 34.\ 53,\ 47$

$\varphi = 49.\ 12.\ 2,\ 50$

$\log.\ a = 0{,}5471002$

$n = 536'',2364.$

Da questi elementi si ottengono i seguenti numeri costanti, inservienti al calcolo dell'anomalia vera, del raggio vettore, e delle coordinate rettangole della cometa, i cui valori sono stati calcolati nella tavola I per ogni due gradi di anomalia media.

$$\text{Log. sen}\ \varphi = \log.\ e = 9{,}8790975;\ \log.\ R''\ \text{sen}\ \varphi = \log.\ e'' = 5{,}1955226.$$

$$\text{Log.} \sqrt{2a} \cdot \text{sen}\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right) = \log.\ A = 0{,}3959364$$

$$\text{Log.} \sqrt{2a} \cdot \cos\left(45^0 + \frac{1}{2}\varphi\right) = \log.\ B = 9.9663506$$

Si ottiene l'anomalia vera v della cometa ed il raggio vettore, data essendo l'anomalia eccentrica u corrispondente all'anomalia media z, mediante le due seguenti equazioni:

$$\text{sen} \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} = \text{A sen} \frac{1}{2} u$$

$$\cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} = \text{B} \cos \frac{1}{2} u$$

e le coordinate eliocentriche della cometa, prendendo l'asse maggiore per asse delle x, assunte positive verso il perielio, si ottengono poscia dalle seguenti equazioni:

$$x = r \cdot \cos v \; ; \quad y = r \cdot \text{sen}\, v.$$

SPIEGAZIONE

delle Tavole numeriche esposte in fine della presente Memoria.

III. Essendo stato condotto il calcolo delle variazioni degli elementi con lo stesso metodo, di cui mi sono servito nelle precedenti mie ricerche, stimo conveniente di riferire in fine le tavole numeriche da me calcolate ad oggetto di abbreviare e rendere uniforme il calcolo delle variazioni stesse; e ciò affinchè, se per mala ventura i risultati da me ottenuti non avessero a corrispondere con quelli che si possono attendere dalla diligenza e perseveranza di altri miei colleghi, e che pure sarebbero desideratissimi per la opportuna verificazione di elementi appoggiati a sì lunghe serie di operazioni tediose, frequentemente interrotte in grazia di altre occupazioni presentatesi successivamente da varie emergenze, si possa facilmente riconoscere l'origine delle differenze, e correggerle, onde più facile riesca la scoperta del vero sistema di elementi, senza dei quali si potrebbe correre pericolo, che non così facilmente venisse a ritrovarsi nel suo prossimo ritorno al perielio. Prima però di devenire alla spiegazione delle tavole, stimo opportuno di riferire eziandio le denominazioni e formule altre volte adoperate, ad oggetto di risparmiare al lettore la noja di ricercarle nelle precedenti mie pubblicazioni.

Scegliendo pertanto a piano fondamentale il piano dell'orbita rappresentata dai sopra riferiti elementi del sig. Plantamour, rappresenteremo con z, u, v, r, x, y le anomalie media, eccentrica, vera, il raggio vettore, e le coordinate eliocentriche della cometa prese rapporto all'asse maggiore dell'orbita, come sopra abbiamo indicato, ritenendo d'altronde gli elementi stessi dell'orbita colle lettere, per le quali sopra gli abbiamo annunziati.

Le stesse lettere accompagnate da un accento rappresentino le analoghe quantità per il pianeta perturbante, la cui elevazione perpendicolare sopra il piano fondamentale sia indicata con z', ed inoltre sia la distanza lineare della cometa dal pianeta perturbante indicata per ρ. Si otterranno i valori delle coordinate x', y', z', e della distanza ρ mediante i seguenti precetti.

Rappresenti $rNN'E$ l'ecclittica, r la posizione dell'equinozio; $r'MQ$ sia nella sfera celeste il circolo massimo proveniente dalla sezione del piano fondamentale colla predetta sfera, mentre $r''MM'$ rappresenta la sezione del piano dell'orbita del pianeta perturbante colla stessa sfera. Veduti dal centro del Sole, le posizioni dei perielii delle due orbite, dei nodi, e le loro scambievoli intersezioni siano rispettivamente in P, P', N, N', M. Presi gli archi $Nr' = Nr$; $N'r'' = N'r$ avremo evidentemente

$$Nr = Nr' = \omega; \quad MNE = i; \quad Pr' = \pi$$

$$N'r = N'r'' = \omega'; \quad MN'E = i'; \quad P'r'' = \pi'$$

Pongasi $Mr' = \Pi$; $Mr'' = \Pi'$; l'angolo $M'MQ = NMN' = \lambda$.

$$MN = \Pi - \omega = \Psi; \quad MN' = \Pi' - \omega = \Psi'.$$

Le formule trigonometriche appellate di Gauss, applicate al triangolo

MNN' conducono tosto alla determinazione di Ψ, Ψ', λ mediante il calcolo delle seguenti equazioni:

$$\cos\tfrac{1}{2}\lambda\cdot\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\Psi'-\Psi)=-\cos\cdot\frac{i+i'}{2}\cdot\operatorname{sen}\cdot\frac{\omega'-\omega}{2}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\lambda\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\Psi'-\Psi)=\cos\cdot\frac{i-i'}{2}\cdot\cos\cdot\frac{\omega'-\omega}{2}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\lambda\cdot\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\Psi'+\Psi)=\operatorname{sen}\cdot\frac{i+i'}{2}\cdot\operatorname{sen}\cdot\frac{\omega'-\omega}{2}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\lambda\cdot\cos\tfrac{1}{2}(\Psi'+\Psi)=\operatorname{sen}\cdot\frac{i-i'}{2}\cdot\cos\cdot\frac{\omega'-\omega}{2}$$

Ottenuti da queste equazioni i valori dei costanti Ψ, Ψ', λ, si avrà tosto $\Pi=\Psi+\omega$; $\Pi'=\Psi'+\omega'$. Corrisponda ora il pianeta perturbante veduto dal centro del Sole al punto M', e condotto l'arco $M'Q$ perpendicolare sopra $r'Q$, sarà palesemente

$$x'=r'\cdot\cos M'Q\cdot\cos PQ\,;\quad y'=r'\cdot\cos\cdot M'Q\cdot\operatorname{sen} PQ;\quad z'=r'\cdot\operatorname{sen}\cdot M'Q$$

Avremo poi $MP=\Pi-\pi$; $MP'=\Pi'-\pi'$; posto pertanto per brevità $M'Q=\beta$, $PM=\gamma$, $MQ=\chi$, ed osservando che $MM'=\varphi'=v'-(\Pi'-\pi')$, otterremo

$$\begin{aligned}x'&=r'\cos\beta\cdot\cos(\gamma+\chi)=r'\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\chi-r'\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma\cdot\operatorname{sen}\chi\\ y'&=r'\cos\beta\cdot\operatorname{sen}(\gamma+\chi)=r'\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma\cdot\cos\chi+r'\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\chi\\ z'&=r'\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Esprimendo poi β e χ per mezzo dell'ipotenusa φ' del triangolo rettangolo $MM'Q$, e dell'angolo λ, dalle note relazioni si ottiene tosto

$$\begin{aligned}x'&=r'\cos\gamma\cdot\cos\varphi'-r'\operatorname{sen}\gamma\cdot\operatorname{sen}\varphi=A\cdot r'\cdot\operatorname{sen}(\varphi'+g)\\ y'&=r'\cdot\operatorname{sen}\gamma\cdot\cos\varphi'+r'\cdot\cos\gamma\cdot\operatorname{sen}\varphi'=B\cdot r'\cdot\operatorname{sen}(\varphi'+g')\\ z'&=r'\operatorname{sen}\lambda\cdot\operatorname{sen}\varphi'=C\cdot r'\cdot\operatorname{sen}\varphi'\end{aligned}$$

purchè i costanti A, B, C, g, g' si calcolino dietro le seguenti equazioni

$$A \cdot \operatorname{sen} g = \cos \gamma \qquad B \cdot \operatorname{sen} g' = \operatorname{sen} \gamma$$
$$A \cdot \cos g = - \cos \lambda \cdot \operatorname{sen} \gamma \qquad B \cdot \cos g' = \cos \gamma \cdot \cos \lambda$$
$$C = \operatorname{sen} \lambda$$

e ove ponendo $\varphi' = v' + \pi' - \Pi'$, si potranno comodamente unire i costanti g, g' col costante $\pi' - \Pi'$, e ne risulteranno formule numeriche semplicissime pel calcolo delle coordinate del pianeta perturbatore espresse per la sua anomalia vera, e pel suo raggio vettore.

Finalmente la distanza ρ della cometa dal pianeta perturbatore avrassi per la conosciuta formula

$$\rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z'^2}$$

la quale comodamente si calcola mediante il seguente sistema di equazioni:

$$x' - x = \rho \cdot \cos f \cdot \cos h; \quad y' - y = \rho \cdot \cos \cdot f \cdot \operatorname{sen} h; \quad z' = \rho \cdot \operatorname{sen} f.$$

Per la terra, il calcolo delle coordinate x', y', z' riceve qualche leggera modificazione, e riesce più semplice esprimendole direttamente per mezzo della sua longitudine nell'ecclittica, desunta dalle tavole solari, o dalle annuali effemeridi.

Rappresenti in fatti nell'unita figura rNM l'ecclittica, ed M sia il punto, a cui sembra corrispondere la terra veduta dal centro del Sole, avendo una longitudine rM; $r'NQ$ sia il circolo massimo contenente il piano dell'orbita della cometa; P il luogo a cui corrisponde il perielio della cometa. Preso $Nr' = Nr = \omega$, avremo, come sopra, $Pr' = \pi$, e condotto da M l'arco $MQ = -\beta$ perpendicolare ad $r'NQ$, avremo evidentemente le coordinate della terra x', y', z' espresse al modo seguente:

$$x' = r' \cdot \cos \beta \cdot \cos \cdot PQ; \quad y' = r' \cos \beta \cdot \operatorname{sen} PQ; \quad z' = - r' \operatorname{sen} \beta.$$

Se pongasi $QN = \varphi$, sarà $PQ = \varphi - (\pi - \omega)$; e perciò

$$x' = r' \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\pi - \omega) + r' \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}(\pi - \omega)$$
$$y' = r' \quad \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos(\pi - \omega) - r' \cos\beta \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}(\pi - \omega)$$
$$z' = - r' \operatorname{sen}\beta.$$

Ora il triangolo rettangolo MQN dà le equazioni

$$\cos\beta \cdot \cos\varphi = \cos(L - \omega);$$
$$\cos\beta \cdot \operatorname{sen}\varphi = \cos i \cdot \operatorname{sen}(L - \omega); \quad \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} i \cdot \operatorname{sen}(L - \omega);$$

eliminando β e φ mediante queste equazioni, ed introducendo due angoli costanti K, K' calcolati dietro le equazioni

$$\cot \cdot K = \cos i \cdot \operatorname{tang}(\pi - \omega); \quad \cot \cdot K' = \cos i \cdot \cot \cdot (\pi - \omega)$$

le coordinate verranno semplicemente espresse per le seguenti equazioni

$$x' = \frac{r' \cos \cdot (\pi - \omega)}{\operatorname{sen} \cdot K} \cdot \operatorname{sen}(L - \omega + K)$$

$$y' = \frac{r' \operatorname{sen} \cdot (\pi - \omega)}{\operatorname{sen} \cdot K'} \cdot \operatorname{sen}(L - \omega - K')$$

$$z' = - r' \operatorname{sen} i \cdot \operatorname{sen}(L - \omega)$$

Esposte così le equazioni, che servirono al calcolo delle coordinate per le tavole, che qui sotto descriveremo, richiameremo eziandio le forme delle altre funzioni esposte nelle tavole stesse, inservienti al calcolo delle variazioni elementari degli elementi dell'orbita.

$$D = \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}; \quad F = \frac{x'y - xy'}{r} \cdot \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)$$

$$G = \frac{x'}{r'^3} - \frac{x' - x}{\rho^3}; \quad H = \frac{y'}{r'^3} - \frac{y' - y}{\rho^3}$$

$$P = \frac{r^2}{a^2 \cos\varphi}; \quad Q = \left(1 + \frac{r}{a \cos^2\varphi}\right) \cos\varphi \cdot \operatorname{sen} n.$$

Dietro queste posizioni, si ottengono le variazioni degli elementi dell'orbita ellittica della Cometa dalla integrazione per quadratura delle seguenti formule differenziali, nelle quali m' rappresenta la massa del pianeta perturbante.

$$(1) \qquad dp = -\frac{m'a}{\cos\varphi} \cdot z'y\, D \cdot d\zeta$$

$$(2) \qquad dq = -\frac{m'a}{\cos\varphi} \cdot z'x\, D \cdot d\zeta$$

$$(3) \qquad d\varphi = -\, m'a^2 H \cdot d\zeta + m'a^2 F \cdot \cos u \cdot d\zeta$$

$$(4) \qquad d\pi = \quad m'a^2 \cot\varphi \cdot G \cdot d\zeta + \frac{m'a^2}{\operatorname{sen}\varphi} F . \operatorname{sen} u \cdot d\zeta$$

$$(5) \qquad dn = -\frac{3m'na^3}{R''} G \cdot \frac{\operatorname{sen} u}{r} \cdot d\zeta + \frac{3m'na^3}{R''} \cos\varphi \cdot H \cdot \frac{\cos u}{r} \cdot d\zeta$$

$$(6) \qquad dg = -\, P d\pi - Q \cdot d\varphi$$

Al calcolo di queste variazioni devesi aggiungere da $t = 0$ fino a $t = T$ (rappresentando T il tempo della intera rivoluzione siderale nella orbita ellittica da cui si parte) il calcolo dell'integrale

$$\int dt \int dn = T \int dn - \int t dn,$$

da cui si ottiene la variazione totale dell'anomalia media, che porremo $= \delta Z$, la quale è rappresentata dalla seguente equazione:

$$\delta Z = T \int dn - \int t dn + \int dg$$

che conduce alla variazione della rivoluzione siderale primitiva mediante la equazione

$$\delta T = -\frac{\delta Z}{n}$$

IV. Richiamate così le equazioni adoperate nel calcolo delle tavole riferite in fine, abbastanza palese ne è la composizione, e qui devo pure esprimere la

mia riconoscenza all'egregio mio collega sig. dott. Trettenero, che mi fu di grande aiuto nella esecuzione del presente lavoro, a lui dovendosi per intero i calcoli dipendenti da Saturno, ed in gran parte quelli dipendenti dall' azione di Venere.

La tavola I. parte 1.ª, parte 2.ª e parte 3.ª contiene i valori delle quantità dipendenti dal moto ellittico calcolati di 2° in 2°, da 0° fino a 180°, dopo di che riprendono inversamente gli stessi valori con qualche cambiamento di segno, che si presenta tosto all'accorto calcolatore.

La tavola II. parte 1.ª e parte 2.ª contiene i valori delle funzioni dipendenti dall'azione di Giove, calcolati di 4° in 4° di anomalia media. Nel calcolo delle coordinate di Giove, e delle altre funzioni comprese in questa tavola, si sono presi gli elementi relativi a questo pianeta dalle tavole di Bouvard, e si è ricavato la sua anomalia vera dalla longitudine eliocentrica desunta dalle effemeridi di Berlino. Si è ottenuto così per l'equinozio medio 0 gennaio 1846

$$\omega' = 98^\circ.52'.\ 7''; \quad \pi' = 11^\circ.51'.12''; \quad i' = 1^\circ.18'.40''$$
$$\psi = 183.\ \ 0.46\ ; \quad \psi' = 329.\ 58.\ 35\ ; \quad \lambda = 13.\ 42.\ \ 0''$$
$$\Pi = 68.\ 55.\ 30\ ; \quad \Pi' = 68.\ 50.42$$

donde poi si sono formate le seguenti equazioni pel calcolo delle coordinate:

$$x' = Ar' \text{ sen } (v' + P), \text{ essendo } \log \cdot A = 9.99488+; \quad P = 353^\circ.42',4$$
$$y' = Br' \text{ sen } (v' + Q) \cdots\cdots \log \cdot B = 9.99275+; \quad Q = 262.\ \ 4,6$$
$$z' = Cr' \text{ sen } (v' + R) \cdots\cdots \log \cdot C = 9.37445+; \quad R = 303.\ \ 0,5$$

Le tavole III. e IV. contengono i valori delle coordinate e delle funzioni dipendenti da Saturno, calcolate di 8° in 8° di anomalia media, per cui si hanno i seguenti elementi:

$$\pi' = 89^\circ.57',0; \quad \psi = 187^\circ.15',9; \quad \Pi = 73^\circ.10',6$$
$$\omega' = 112.\ 17,7; \quad \psi' = 320.\ 40,9; \quad \Pi' = 72.\ 58,5$$
$$i' = 2.\ 29,5; \quad \lambda = 14.\ 24,7$$

$$x' = Ar' \text{ sen } (v' + P) \text{ essendo } \log A = 9.99533+; \quad P = 71^\circ.58',6$$
$$y' = Br' \text{ sen } (v' + Q) \cdots\cdots \log B = 9.99097+; \quad Q = 340^\circ.14',2$$
$$z' = Cr' \text{ sen } (v' + R) \cdots\cdots \log C = 9.39599+; \quad R = 16.\ 58,5.$$

La tavola V. contiene i logaritmi delle coordinate, e delle funzioni dipendenti dalla terra calcolati di 2° in 2° di anomalia media da 0° a 30°, e da 330° fino a 360°. Nel tronco intermedio da 30° fino a 330° trovandosi già la cometa molto lontana dalla terra, sonosi calcolate le variazioni col metodo esposto da La Place nella sua Meccanica celeste, che riferiremo in appresso. Le formule, che servirono al calcolo delle coordinate terrestri furono le seguenti.

$$x' = Ar' \text{ sen } (L + M) \text{ essendo } \log A = 9.99512-; \quad M = 161°.39',4$$
$$y' = Br' \text{ sen } (L + N) \cdots\cdots \log B = 9.99445-; \quad N = 70.\ 16,0$$
$$z' = Cr' \text{ sen } (L + P) \cdots\cdots \log C = 9.33812-; \quad P = 114.\ 5,3.$$

La tavola VI. contiene i logaritmi delle coordinate e delle funzioni ρ, D, F, G, H dipendenti dalla posizione di Venere calcolate di due in due gradi di anomalia media da 0° fino a 20°, e da 340° fino a 360°, essendosi stimate le piccole alterazioni pel tronco intermedio collo stesso metodo sopraccennato per la terra. Pel calcolo poi delle coordinate, si adoprarono i seguenti costanti

$$\pi' = 124°.\ 9',7; \quad \psi = 182°.\ 0',5; \quad \Pi = 67°.55',1$$
$$\omega = 75.\ 14,6; \quad \psi' = 352.\ 36,9; \quad \Pi' = 67.\ 51,5$$
$$i' = 3.\ 23,5; \quad \lambda = 15.\ 58,6$$

donde poi si formarono le seguenti equazioni per il calcolo delle coordinate di Venere.

$$x' = Ar' \text{ sen } (v' + P) \text{ essendo } \log A = 9.99276+; \quad P = 104°.18',0$$
$$y' = Br' \text{ sen } (v' + Q) \cdots\cdots \log B = 9.99046+; \quad Q = 12.\ 3,7$$
$$z' = Cr' \text{ sen } (v' + R) \cdots\cdots \log C = 9.46532+; \quad R = 54.\ 18,2$$

Per ultimo le tavole VII., VIII., IX., X. contengono i valori parziali di dp, dq, $d\varphi$, ecc., calcolati dietro le superiori equazioni, col sussidio delle tavole precedenti, ponendo per Giove $d\zeta = 4° = 14400''$; per Saturno $d\zeta = 8° = 28800''$; per la Terra e per Venere $d\zeta = 7200''$.

Quanto alle masse, si ritenne per Giove $m' = \frac{1}{1049}$, come nelle precedenti ricerche; per Saturno $m' = \frac{1}{3512,08}$, per la Terra $m' = \frac{1}{355499}$ dietro le più recenti determinazioni riferite nell'eccellente Trattato di Astronomia del sig. Mädler; e per Venere $m' = \frac{1}{356632}$.

Se ora si sommano i valori parziali di dp, dq, $d\varphi$ nelle rispettive colonne delle sopradette tavole VII., VIII., IX., X., e se ne tolgono le metà dei primi, ed ultimi termini di ogni colonna, si avranno le corrispondenti alterazioni totali rappresentate per $\int dp$, $\int dq$, $\int d\varphi$ ecc.

Meritano una particolare attenzione i valori di dg, procedenti apparentemente soltanto fino a 180° di anomalia media, sebbene col fatto abbraccino tutta la circonferenza. Essi furono calcolati colla scorta della soprariferita equazione (6) al modo seguente. Fingansi i valori di $d\pi$ e di $d\varphi$ corrispondenti alle anomalie medie z', e $360^0 - z'$ rappresentati per $d\pi'$, $d\pi''$; $d\varphi'$, $d\varphi''$; è chiaro che i valori di P desunti dalla tavola I, parte 2.ª, sono fra loro uguali, mentre quelli di Q differiscono soltanto nel segno; riunendoli pertanto si avrà il seguente termine $\cdots dg = -P\,(d\pi' + d\pi'') - Q\,(d\varphi' - d\varphi'')$; riuniti così a due a due hanno condotto alle colonne dei valori di dg esposti nelle tavole.

V. Prima di passare ad esporre i risultati finali del nostro calcolo, ci rimane ad indicare la via seguita per ridurre a numeri le formule date da La Place nel IV. volume della sua Meccanica celeste pel calcolo delle alterazioni degli elementi in quei tronchi, nei quali la Cometa trovasi molto lontana dal pianeta perturbatore. Riprese perciò le equazioni della *Mecc. Cel. Vol. IV., pag.* 209 esprimenti i valori di δh, δl, δn, $\int \delta' n dt + \delta\varepsilon - \delta\pi$, prendendo l'asse delle x lungo l'asse maggiore, dovrà porsi in esse $h = 0$, $l = e = \operatorname{sen}\varphi$, $\delta h = e\delta\pi$, $\delta l = \delta e = \cos\varphi \cdot \delta\varphi$; $\int \delta' n dt + \delta\varepsilon - \delta\pi = \delta Z$. Ponendo poscia in luogo di $\dfrac{xdy - ydx}{dt}$ il suo valore $= \sqrt{a} \cdot \cos\varphi$, e facendo alcune ovvie riduzioni nel valore δZ per approfittare delle tavole delle equazioni ellittiche da noi costruite, si hanno le seguenti equazioni per calcolare le variazioni degli elementi pel tronco intermedio dell'orbita, in cui la Cometa fu molto lontana dal pianeta perturbatore.

$$(1)\qquad e\delta\pi = m'\frac{y}{r} - m'\frac{x}{r} \cdot \frac{xy' - x'y}{r^3} - m' \cdot \sqrt{a} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{dx'}{dt}$$

$$- m'\frac{dx}{dt} \cdot \frac{xdy' - y'dx + x'dy - ydx'}{dt}$$

$$(2)\quad \delta e = \cos\varphi\delta\varphi = m'\left(e + \frac{x}{r}\right) + m'\cdot\frac{y}{r}\cdot\frac{xy' - x'y}{r^2} + m'\cdot\sqrt{a}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{dy'}{dt}$$

$$+ m'\frac{dy}{dt}\cdot\frac{xdy' - y'dx + x'dy - ydx'}{dt}$$

$$(3)\quad \delta n = -\frac{3m'an}{r} + m'n - 3m'an\cdot\frac{xx' + yy'}{r^3} - 3m'an\frac{dxdx' + dydy'}{dt^2}$$

$$(4)\quad \delta Z = -m'nqt + \frac{m'(xy' - x'y)}{a^2\cos\cdot\varphi} - P\cdot\delta\pi - Q\cdot\delta\varphi$$

Per ottenere da queste equazioni i valori di $\delta\pi, \delta\varphi, \delta n, \delta z$, si devono sostituire nei secondi membri di queste equazioni i valori di x, y, x', y', n, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ ecc. relativi al principio del secondo tronco; quindi quelli relativi al fine; dal secondo risultato togliendo il primo si ottengono le variazioni cercate. Nel 2.° membro dell' equazione (4) dovrà porsi $t = 0$ pel principio del secondo tronco, e pel fine sarà t il numero dei giorni impiegati a passare dal principio al fine del secondo tronco; $m'nq$ rappresenta il valore di δn relativo al principio del secondo tronco calcolato dietro l'equazione (3).

Rimane ora ad assegnare i valori di $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ pel principio e fine del secondo tronco, contenuti nelle precedenti equazioni. A tale oggetto si riprendano le equazioni del moto ellittico

$$nt = u - e\,\text{sen}\,u;\quad x = a\cos u - ae;\quad y = a\cos\varphi\cdot\text{sen}\,u$$
$$r = a(1 - e\cos u).$$

Differenziando la prima equazione, ed avendo riguardo all' ultima avremo $\frac{du}{dt} = \frac{an}{r}$. Osservando ora, che *La Place* pone nella sua Meccanica $na^{3:2} = 1$, la precedente equazione diviene $\frac{du}{dt} = \frac{1}{r\sqrt{a}}$. Dietro ciò,

ottiensi tosto

$$\frac{dx}{dt} = - a \text{ sen } u \cdot \frac{du}{dt} = - \frac{\sqrt{a} \cdot \text{sen } u}{r}$$

$$\frac{dy}{dt} = a \cos \varphi \cdot \cos u \cdot \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{a} \cdot \cos \varphi}{r} \cdot \cos u$$

venendo in secondo luogo alle coordinate del pianeta, ritenendo qui pure $n'a'^{3:2} = 1$, si ha dalle leggi del moto ellittico

$$\frac{r'^2\, dv'}{dt} = \sqrt{a' (1 - e'^2)} = \sqrt{a'} \cdot \cos \varphi' ;$$

l'equazione

$$r' = \frac{a' \cos^2 \varphi'}{1 + e' \cos v'}$$

differenziata darà

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{r'^2\, e' \text{ sen } v'}{a' \cos^2 \varphi'} \cdot \frac{dv'}{dt} = \frac{\text{tang} \cdot \varphi' \cdot \text{sen } v'}{\sqrt{a'} \cos \varphi'}$$

Riprese ora le equazioni superiori (§ IV)

$$x' = Ar' \text{ sen } (v' + P) ; \quad y' = Br' \text{ sen } (v' + Q)$$

e differenziate (osservando che A, B, P, Q sono costanti), qualora si sostituiscano i valori di $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$, si otterranno le seguenti:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A\sqrt{a'} \cos \varphi'}{r'} \cos \cdot (v' + P) + \frac{A \cdot \text{tang } \varphi' \cdot \text{sen } v' \cdot \text{sen } (v' + P)}{\sqrt{a'}}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{B\sqrt{a' \cdot \cos \varphi}}{r'} \cos \cdot (v' + Q) + \frac{B' \cdot \text{tang } \varphi' \cdot \text{sen } v' \cdot \text{sen } (v' + Q)}{\sqrt{a'}}$$

col mezzo delle quali equazioni facilmente si calcolano i coefficienti differenziali pel principio e fine del 2.° tronco contenuti nelle precedenti equazioni. Qui osserveremo, che essendosi posto $na^{3:2} = 1$ (mentre questa quantità esprime il costante del sistema solare, che suolsi indicare per k) si dovrebbero nel-

le superiori equazioni (1), (2), (3), (4) moltiplicare quei termini del 2.° membro, che non riuscissero numeri astratti, per la potenza di k valevole a renderli di dimensione nulla; ma è facile accorgersi, che tali appunto divengono colla semplice sostituzione dei superiori valori di $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ ecc.; quindi non abbisognano nel calcolo numerico di alcuna avvertenza, tranne la conversione in secondi, lo che facilmente si ottiene adoperando la massa m' espressa in secondi in quei termini, che non fossero moltiplicati o per n, o per $d\pi$, o per $\delta\varphi$.

Dovremmo ora riferire le formule relative alle alterazioni prodotte nella inclinazione, e nel luogo del nodo; ma è facile accorgersi che queste sono piccolissime, e perciò le trascureremo.

RISULTATI FINALI.

VI. Se ora dalle tavole sopra descritte si sommino i valori delle parziali variazioni dp, dq ecc. calcolate per Giove e per Saturno, e si tolga la semisomma dei termini estremi, formeremo i risultati seguenti:

1.° $\int dp$ ... da Giove	$= + \; 8'',2620$	2.° $\int dq$	$= + \; 139'',7376$
da Saturno	$= + \; 0,\ 8347$	....	$= + \; 0'',1640$
per Giove e Saturno $\int dp$	$= + \; 9'',0967$	$\int dq$	$= + \; 139'',9016$
3.° $\int d\varphi$ ... da Giove	$- \; 242'',8494$	4.° $\int d\pi$	$= + \; 55'',1102$
da Saturno	$- \; 0,\ 8208$	....	$= - \; 25,\ 6878$
per Giove e Saturno $\int d\varphi$	$= - \; 243'',6702$	$\int d\pi$	$= + \; 29'',4224$
5.° .... da Giove $\int dn$	$= - \; 1'',316542$	6.° $\int tdn$	$= - \; 1217'',5503$
da Saturno	$- \; 0,\ 007435$	....	$- \; 65,\ 2942$
per Giove e Saturno $\int dn$	$= - \; 1'',323977$	$\int tdn$	$= - \; 1282,\ 8445$
7.° .... da Giove $\int dg$	$= - \; 674'',6442$		
da Saturno	$= + \; 83,\ 9772$		
per Giove e Saturno $\int dg$	$= - \; 590'',6670$		

Si dedurrà dai precedenti risultati la variazione totale dell'anomalia media risultante dall'azione di Giove e di Saturno, che rappresenteremo per δZ, così espressa

$$\delta Z = \int dt \int dn + \int dg = T \int dn - \int tdn + \int dg$$

ove per T dobbiamo prendere il tempo della rivoluzione siderale corrispondente all'ellisse del 1846, che è $= 2416^g,845$; quindi otterremo per Giove e Saturno

$$\delta Z = -2507'',679.$$

VII. Venendo ora alle variazioni prodotte dall'azione della terra, si è questa calcolata, dietro le formule e tavole precedenti, in tre distinti tronchi; il primo si estende fra 0° e 30° di anomalia media; il 3° fra 330° e 360°; ed il secondo abbraccia l'intervallo compreso fra 30° e 360° calcolato a parte dietro la scorta delle equazioni riferite al § V. Si sono così ottenuti i seguenti risultamenti per cadaun tronco:

1.° tronco . . .	$\int dp = -0'',8417$;	$\int dq = -0'',9246$;	$\int d\varphi = +3'',4179$
3.° tronco	$+0,0673$ . . .	$+0,1423$ . .	$= +1,1837$
2.° tronco intermedio	. . . . . .	. . . .	$= +1,0360$
valori totali per l'azione della terra	$\int dp = -0'',7744$;	$\int dq = -0'',7823$,	$\int d\varphi = +5'',6376$

1.° tronco . . .	$\int d\pi = +4'',5120$;	$\int dn = -0'',038272$;	$\int tdn = +1'',8716$
3.° tronco	$= -3,1311$ . .	$-0,023817$ . . .	$-56,7821$
2.° tronco intermedio . . .	$= +2,1956$	$-0,000347$	. . . . . .
valori totali . . .	$\int d\pi = +3'',5765$;	$\int dn = -0'',062436$;	$\int tdn = -54'',9105$

Il valore di $\int dg$ si ottiene dalla tavola IX, riunito pel primo e terzo tronco; essa dà $\int dg = +2'',2585$.

Per formare l'integrale doppio $\int dt \int dn = T \int dn - \int tdn$, conviene servirsi nel calcolo del secondo membro non dell'intero valore $\int dn$ ma soltanto della somma relativa al 1.° ed al 3.° tronco, che è $= -0'',062089$. Si ottiene così $\int dt \int dn = -95'',1490$.

Dopo di ciò si avrà la variazione dell'anomalia media dipendente dall'azione della terra pel primo e terzo tronco · · · · · · · · · · $= -\ 92'',8905$.

Dal calcolo poi relativo al tronco intermedio risulta · · · $-\ 13,\ 263$

Quindi per l'azione della terra si avrà · · · · · · · · · $\delta Z = -\ 106'',1535$.

VIII. Procedendo in un modo analogo per Venere, i cui tronchi furono stabiliti fra 0° e 20°; 20° e 340°; 340° e 360° di anomalia media, si sono ottenuti, mediante la tavola X ed il calcolo delle equazioni riferite di sopra pel tronco intermedio, i seguenti valori:

1.° tronco · · ·	$\int dp = +\ 0'',4688$;	$\int dq = +\ 0'',5147$;	$\int d\varphi = -\ 1'',6616$
3.° tronco · · · · ·	$= -\ 0,\ 0575$;	$= +\ 0,\ 1490$;	$+\ 2,\ 8145$
2.° tronco intermedio · · · · · ·	· · · · · · ·		$+\ 0,\ 7376$
valori totali per l'azione di Venere	$\int dp = +\ 0'',4113$;	$\int dq = +\ 0'',6637$;	$\int d\varphi = +\ 1,\ 8905$

1.° tronco · · ·	$\int d\pi = +\ 1'',1406$;	$\int dn = +\ 0'',015354$;	$\int tdn = +\ 3'',1525$
3.° tronco · · · ·	$= -\ 3,\ 3068$;	$= -\ 0,\ 039581$;	$-\ 93,\ 6094$
2.° tronco intermedio ·	$= +\ 3,\ 1618$;	$= -\ 0,\ 011967$;	· · · · · · ·
valori totali per Venere	$\int d\pi = +\ 0'',9956$;	$\int dn = -\ 0'',035994$;	$\int tdn = -\ 90'',4569$

Si avrà inoltre · $\int dg = +\ 6'',8609$

$$\int dt \int dn = T \cdot \int dn - \int tdn = +\ 32'',3874$$

(impiegando come sopra per $\int dn$ il valore relativo al primo e terzo tronco).

Quindi sarà $\delta Z = \int dt \int dn + \int dg$ · · · · · · · · · · $= +\ 39'',2483$

Pel tronco intermedio si ottiene · · · · · · · · · · · · · · · · · $-\ 25,\ 4597$

Perciò il valore totale di δZ dipendente da Venere risulterà $= +\ 13'',7886$.

IX. Riunendo ora i valori parzialmente ottenuti nei paragrafi precedenti, avremo per le variazioni totali i seguenti risultati:

$\int dp$ · · da Giove e Saturno	$+\ \ 9'',0967$;	$\int dq = +\ 159'',9016$
dalla Terra · ·	$-\ \ 0,\ 7744$;	· · $-\ \ 0,\ 7823$
da Venere · ·	$+\ \ 0,\ 4113$;	· · $+\ \ 0,\ 6637$
$\delta p = \int dp$	$= +\ \ 8'',7336$;	$\delta q = \int dq = +\ 159'',7830$

$\int d\varphi$ · · da Giove e Saturno	$= - 243'',6702$;	$\int d\pi$	$= + \ 29'',4224$
dalla Terra · ·	$+ \ 5,\ 6376$;	· ·	$+ \ 3,\ 5765$
da Venere · ·	$+ \ 1,\ 8905$;	· ·	$+ \ 0,\ 9956$
	$\int d\varphi = - 236,\ 1421$;		$\int d\pi = + \ 33,\ 9945$

$\int dn$ · · da Giove e Saturno	$= - 1'',323977$;	δZ	$= - 2507'',679$
dalla Terra · ·	$- 0,\ 062436$;	· ·	$- \ 106,\ 1535$
da Venere · ·	$- 0,\ 035994$;	· ·	$+ \ 13,\ 7886$
	$\delta n = \int dn = - 1'',422407$;		$\delta Z = - 2600'',044$

Le variazioni totali ora ottenute conducono tosto alla cognizione degli elementi ellittici relativi al passaggio pel perielio nel 1852.

Primieramente si otterrà	$\delta T = - \dfrac{\delta Z}{n}$	$= + \ 4^g,84869$
Si aveva poi	T	$2416,\ 84500$
Quindi il ritorno al perielio avrà luogo al tempo	$T' = T + \delta T =$	$= 2421^g,69369$

il qual numero di giorni, aggiunto al passaggio al perielio del 1846, riconduce il nuovo passaggio al perielio nel 28,71856 di settembre 1852, T. medio di Berlino.

2.° I numeri p, q conducono alla nuova posizione del piano dell' orbita dietro i precetti esposti nel 2.° volume dei miei Elementi d'Astronomia, p. 333 e seguenti. In fatti ponendo · · · $p = I \cdot \text{sen}\ \Omega$

$$q = I \cdot \cos\ \Omega$$

si troveranno per I ed Ω i valori seguenti:

$$I = + 140'',056;\ \Omega = + 3^0 \cdot 54' \cdot 50'',6.$$

In seguito, facendo $N = \pi + \Omega - \omega$, si avranno rapporto all'ecclittica fissa del 1846 le variazioni della inclinazione δi e della longitudine del nodo $\delta\omega$, espresse come segue :

$$\delta i = I \cos N;\ \delta\omega = \frac{I \cdot \text{sen}\ N}{\text{sen}\ i}$$

Nel caso presente otterremo

$$N = - 153^0 \cdot 16' \cdot 48'',1;\ \delta i = - 96'',017;\ \delta\omega = - 468'',087.$$

Per riferire poi l'inclinazione all'ecclittica del 1852 ed all'equinozio medio del 28 settembre, si dovrà aggiungere a δi il termine

$$- \frac{2463,7}{365,25} \cdot 0'',48892 \cdot \cos \cdot (\omega - 171^{\circ}.36') = - 0'',89$$

ed a $\delta\omega$, la precessione degli equinozii rappresentata per

$$+ \frac{2463,7}{365,25} \cdot 50'',2 = + 5' \cdot 38'',61$$

(ove 2463,7 è il numero dei giorni trascorsi tra 0 gennaio 1846 ed il trovato passaggio al perielio nel 1852).

Si avrà dietro ciò

$i =$	$12^{\circ}.34',53'',47$;	$\omega =$	$245^{\circ}.54'.38'',80$
$\delta i =$	$- 1.36,02$;	$\delta\omega$	$- 7.48,09$
riduzione all'ecc. mobil. $=$	$- 0,89$:	precessione	$+ 5.38,61$
$i' =$	$12^{\circ}.33'.16'',56$;	$\omega' =$	$245^{\circ}.52'.29'',52$

La posizione del perielio rapporto all'equinozio medio del 1852 si troverà

$$= \pi + \delta\pi + 2\delta\omega \cdot \text{sen}^2 \frac{1}{2} i + \text{precessione},$$

lo che dà $\pi' = 109^{\circ}.8'.21'',49$.

Sarà parimenti

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi = 49^{\circ}.8'.6'',36$$
$$n' = n + \delta n = 534'',813993.$$

Il nuovo valore di n' condurrà alla cognizione del semiasse maggiore dell'orbita all'istante del nuovo passaggio pel perielio; si troverà così

$$\log. a' = 0,5478692.$$

Pertanto i nuovi elementi, che ci serviranno al calcolo della effemeride riferita in fine delle tavole dietro i superiori risultati, sono i seguenti:

Passaggio al perielio 1852 settembre		28^g,71856 T. M. di Berlino	
Longitudine del perielio	=	109°. 8′.21″,49	dall'equinozio medio
del nodo	=	245. 52. 29, 32	28 settembre 1852.
Inclinazione	=	12. 33. 16, 56	
Angolo di eccentricità	=	49. 8. 6, 36	
Moto medio diurno siderale	=	534″,813993	
Logaritmo del semiasse maggiore	=	0,5478692	

(*Letta li* 19 *Gennaio* 1851)

TAVOLA I. *delle funzioni ellittiche relative all'orbita della Cometa;*

Parte 1.ª

an. media $= z$	Log. t	an. ecc. $= u$	an. vera $= v$	Log. r	Log. sen. u	Log. cos.	Log. $\frac{\text{sen. } u}{r}$	Log. $\frac{\text{cos. } u}{r}$
0°	— ∞	0°.0',0	0°. 0',0	9.93270+	— ∞	0.00000+	— ∞	0.06730+
2	1.12798+	8. 8,7	21.40,6	9.94614	9.15131 +	9.99559	9.20517+	0.04945
4	1.42901	15.50,1	41. 0,6	9.98122	9.43597	9.98320	9.45475	0.00198
6	1.60510	22.49,5	56.59,2	0.02750	9.58875	9.96458	9.56125	9 93708
8	1.73004	29. 4,9	69.47,4	0.07656	9.68669	9.94148	9.61013	9.86492
10	1.82695	34.40,6	80. 1,5	0.12400	9.75507	9.91507	9.63107	9.79107
12	1.90613	39.42,8	88.19,2	0.16794	9.80547	9.88607	9.63753	9.71813
14	1.97307	44.17,0	95. 8,9	0.20802	9.84398	9.85485	9.63596	9.64683
16	2.03107	48.28,1	100.52,4	0.24440	9.87424	9.82154	9.62984	9.57714
18	2.08222	52.19,9	105.45,3	0.27740	9.89848	9.78611	9.62108	9.50871
20	2.12798	55.55,6	109.58,7	0.30748	9.91820	9.74839	9.61072	9.44091
22	2.16837	59.17,4	113.40,6	0.33486	9.93438	9.70815	9.59952	9.37329
24	2.20716	62.27,4	116.57,2	0.36000	9.94776	9.66503	9.58776	9.30503
26	2.24192	65.27,2	119.53,8	0.38306	9.95886	9.61852	9 57580	9.23546
28	2.27410	68.18,0	122.31,9	0.40448	9.96808	9.56792	9.56360	9.16344
30	2.30407	71. 0,8	124.56,2	0.42430	9.97570	9.51236	9.55140	9.08806
32	2.33210	73.36,7	127. 8,6	0.44276	9.98199	9.45049	9.53923	9.00773
34	2.35843	76. 6,2	129.10,5	0.45998	9.98710	9.38052	9.52712	8.92054
36	2.38325	78.30,1	131. 2,3	0.47606	9.99119	9.29958	9.51513	8.82352
38	2.40673	80.49,1	132.49,4	0.49118	9.99440	9.20297	9.50322	8.71179
40	2.42901	83. 3,3	134.26,5	0.50542	9.99680	9.08249	9.49138	8.57707
42	2.44920	85.13,4	135.58,6	0.51882	9.99849	8.92057	9.47967	8.40175
44	2.47040	87.19,5	137.25,3	0.53150	9.99952	8.66904	9.46802	8.13734
46	2.48970	89.22,2	138.47,2	0.54348	9.99997	8.04118+	9.45649	7.49770+
48	2.50819	91.21,6	140. 5,0	0.55484	9.99988	8.37538—	9.44504	7.82034—
50	2.52592	93.18,0	141.18,7	0.56564	9.99928	8.76015	9.43364	8.19451
52	2.54295	95.11,7	142.29,0	0.57588	9.99821	8.95682	9.42233	8.38094
54	2.55934	97. 2,7	143.36,2	0.58568	9.99671	9.08871	9.41103	8.50303
56	2.57513	98.51,4	144.40,5	0.59498	9.99479	9.18738	9.39981	8.59240
58	2.59037	100.37,7	145.42,0	0.60386	9.99249	9.26588	9.38863	8.66202
60	2.60510	102.22,0	146.41,2	0.61236	9.98980	9.33075	9.37744	8.71839
62	2.61934	104. 4,3	147.38,2	0.62050	9.98677	9.38590	9.36627	8.76540
64	2.63313	105.44,7	148.33,2	0.62824	9.98339	9.43354	9.35515	8.80530
66	2.64649	107.23,4	149.26,2	0.63570	9.97968	9.47549	9.34398	8.83979
68	2.65946	109. 0,5	150.17,5	0.64282	9.97565	9.51282	9.33283	8.87000
70	2.67204	110.36,0	151. 7,2	0.64966	9.97130	9.54635	9.32164	8.89669
72	2.68428	112.10,0	151.55,3	0.65622	9.96665	9.57669	9.31043	8.92047
74	2.69618	113.42,7	152.42,1	0.66252	9.96170	9.60438	9.29918	8.94186
76	2.70776	115.14,0	153.27,5	0.66858	9.95645	9.62972	9.28787	8.96114
78	2.71904	116.44,1	154.11,7	0.67438	9.95089	9.65309	9.27651	8.97871
80	2.73004	118.13,1	154.54,8	0.67998	9.94505	9.67466	9.26507	8.99468
82	2.74076	119.40,9	155.36,8	0.68536	9.93892	9.69477	9.25356	9.00941
84	2.75123	121. 7,6	156.17,8	0.69054	9.93248	9.71345	9.24194	9.02291
86	2.76144	122.33,4	156.57,8	0.69550	9.92575	9.73090	9.23025	9.03540
88	2.77143	123.58,2	157.37,0	0.70032	9.91872	9.74723	9.21840	9.04691
90°	2.78119+	125.22,1	158.15,3	0.70492+	9.91140+	9.76255—	9.20648+	9.05763—

Continuazione della Tavola I.

Parte 1.ª

an. media $= z$	Log. t	an. ecc. $= u$	an. vera $= v$	Log. r	Log. sen. u	Log. cos. u	Log. $\frac{\text{sen. } u}{r}$	Log. $\frac{\text{cos. } u}{r}$
90°	2.78119 +	125°.22',1	158°.15',3	0.70492 +	9.91140 +	9.76256 —	9.20648 +	9.05763 —
92	2.79073	126.45,1	158.52,8	0.70936	9.90376	9.77696	9.19440	9.06760
94	2.80007	128. 7,3	159.29,6	0.71364	9.89581	9.79052	9.18217	9.07688
96	2.80922	129.28,7	160. 5,6	0.71774	9.88754	9.80331	9.16980	9.08557
98	2.81817	130.49,3	160.41,0	0.72170	9.87895	9.81539	9.15725	9.09369
100	2.82695	132. 9,3	161.15,8	0.72552	9.87002	9.82680	9.14450	9.10128
102	2.83555	133.28,5	161.50,0	0.72918	9.86074	9.83761	9.13156	9.10843
104	2.84398	134.47,1	162.23,6	0.73272	9.85111	9.84785	9.11839	9.11513
106	2.85225	136. 5,1	162.56,7	0.73614	9.84111	9.85755	9.10497	9.12141
108	2.86037	137.22,4	163.29,3	0.73940	9.83073	9.86675	9.09133	9.12735
110	2.86834	138.39,2	164. 1,4	0.74254	9.81995	9.87548	9.07741	9.13294
112	2.87616	139.55,4	164.33,1	0.74556	9.80876	9.88377	9.06320	9.13811
114	2.88385	141.11,2	165. 4,3	0.74846	9.79713	9.89164	9.04867	9.14318
116	2.89140	142.26,4	165.35,1	0.75124	9.78504	9.89912	9.03380	9.14788
118	2.89883	143.41,2	166. 5,5	0.75388	9.77247	9.90622	9.01859	9.15234
120	2.90613	144.55,5	166.35,7	0.75650	9.75941	9.91296	9.00291	9.15646
122	2.91331	146. 9,3	167. 5,4	0.75896	9.74581	9.91937	8.98685	9.16041
124	2.92037	147.22,8	167.34,8	0.76132	9.73164	9.92545	8.97032	9.16413
126	2.92732	148.35,9	168. 3,9	0.76358	9.71687	9.93122	8.95329	9.16764
128	2.93416	149.48,6	168.32,6	0.76574	9.70145	9.93670	8.93571	9.17096
130	2.94089	151. 1,0	169. 1,1	0.76776	9.68534	9.94189	8.91758	9.17413
132	2.94752	152.13,0	169.29,4	0.76976	9.66850	9.94680	8.89874	9.17704
134	2.95405	153.24,7	169.57,4	0.77162	9.65086	9.95146	8.87924	9.17984
136	2.96049	154.36,2	170.25,2	0.77340	9.63235	9.95586	8.85895	9.18246
138	2.96683	155.47,3	170.52,7	0.77510	9.61290	9.96001	8.83780	9.18491
140	2.97307	156.58,1	171.20,1	0.77670	9.59243	9.96393	8.81573	9.18723
142	2.97923	158. 8,7	171.47,2	0.77820	9.57084	9.96761	8.79264	9.18941
144	2.98531	159.19,1	172.14,2	0.77966	9.54799	9.97107	8.76833	9.19141
146	2.99130	160.29,2	172.40,9	0.78100	9.52377	9.97431	8.74277	9.19331
148	2.99721	161.39,2	173. 7,6	0.78226	9.49800	9.97735	8.71574	9.19509
150	3.00304	162.48,9	173.34,1	0.78344	9.47050	9.98017	8.68706	9.19673
152	3.00879	163.58,4	174. 0,4	0.78456	9.44103	9.98279	8.65647	9.19823
154	3.01447	165. 7,8	174.26,6	0.78556	9.40929	9.98520	8.62373	9.19964
156	3.02007	166.17,0	174.52,7	0.78652	9.37495	9.98743	8.58843	9.20091
158	3.02560	167.26,1	175.18,7	0.78738	9.33754	9.98947	8.55016	9.20209
160	3.03107	168.35,1	175.44,5	0.78816	9.29550	9.99132	8.50734	9.20316
162	3.03646	169.43,9	176.10,5	0.78886	9.25105	9.99299	8.46219	9.20413
164	3.04179	170.52,6	176.36,1	0.78950	9.20018	9.99447	8.41068	9.20497
166	3.04705	172. 1,3	177. 1,7	0.79008	9.14243	9.99577	8.35235	9.20569
168	3.05226	173. 9,8	177.27,3	0.79056	9.07569	9.99690	8.28513	9.20634
170	3.05739	174.18,3	177.52,8	0.79096	8.99670	9.99785	8.20574	9.20689
172	3.06247	175.26,7	178.18,3	0.79130	8.89994	9.99863	8.10864	9.20733
174	3.06750	176.35,1	178.43,8	0.79156	8.77512	9.99923	7.98356	9.20767
176	3.07246	177.43,4	179. 9,2	0.79174	8.59912	9.99966	7.80738	9.20792
178	3.07737	178.51,7	179.34,6	0.79186	8.29811 +	9.99992	7.50625 +	9.20806
180	3.08222 +	180. 0,0	180. 0,0	0.79188 +	— ∞	0.00000 —	— ∞	9.20812 —

TAVOLA I. *delle funzioni ellittiche.*

Parte 2.ª

Argomento, anomalia media = z.

an. media = z	Log. x	Log. y	Log. $\frac{x}{r}$	Log. $\frac{y}{r}$	Log. P	Log. Q
0°	9.93270+	— ∞	0.00000+	— ∞	8.95601+	— ∞
2	9.91429	9.51360+	9.96815	9.56746+	8.98289	9.16709+
4	9.85894	9.79825	9.87772	9.81703	9.05305	9.46505
6	9.76376	9.95103	9.73626	9.92353	9.14561	9.63542
8	9.61496	0.04896	9.53840	9.97240	9.24373	9.75528
10	9.36256	0.11739	9.23856	9.99339	9.33861	9.84537
12	8.63498+	0.16775	8.46704+	9.99981	9.43649	9.91695
14	9.16101—	0.20626	8.95299—	9.99824	9.50665	9.97574
16	9.52003	0.23653	9.27563	9.99213	9.57941	0.02521
18	9.71122	0.26077	9.43382	9.98337	9.64541	0.06653
20	9.84106	0.28053	9.53358	9.97305	9.70557	0.10427
22	9.93862	0.29668	9.60376	9.96182	9.76033	0.13638
24	0.01635	0.31006	9.65635	9.95006	9.81061	0.16476
26	0.08066	0.32105	9.69760	9.93799	9.85673	0.18992
28	0.13506	0.33036	9.73058	9.92588	9.89957	0.21246
30	0.18221	0.33800	9.75791	9.91370	9.93921	0.23264
32	0.22367	0.34429	9.78091	9.90153	9.97613	0.25180
34	0.26049	0.34941	9.80051	9.88943	0.01057	0.26714
36	0.29333	0.35359	9.81727	9.87753	0.04273	0.28187
38	0.32352	0.35656	9.83234	9.86538	0.07297	0.29520
40	0.35064	0.35909	9.84522	9.85367	0.10145	0.30724
42	0.37558	0.36078	9.85676	9.84196	0.12825	0.31808
44	0.39859	0.36183	9.86709	9.83033	0.15361	0.32786
46	0.41986	0.36227	9.87638	9.81879	0.17757	0.33665
48	0.43962	0.36216	9.88478	9.80732	0.20029	0.34454
50	0.45805	0.36158	9.89241	9.79594	0.22189	0.35157
52	0.47525	0.36048	9.89937	9.78460	0.24237	0.35779
54	0.49144	0.35901	9.90576	9.77333	0.26197	0.36332
56	0.50660	0.35708	9.91162	9.76210	0.28057	0.36811
58	0.52089	0.35477	9.91703	9.75091	0.29833	0.37225
60	0.53440	0.35210	9.92204	9.73974	0.31533	0.37576
62	0.54719	0.34909	9.92669	9.72859	0.33161	0.37870
64	0.55925	0.34568	9.93101	9.71744	0.34709	0.38102
66	0.57074	0.34199	9.93504	9.70629	0.36201	0.38283
68	0.58162	0.33794	9.93880	9.69512	0.37625	0.38410
70	0.59198	0.33359	9.94232	9.68393	0.38993	0.38485
72	0.60184	0.32894	9.94562	9.67272	0.40305	0.38512
74	0.61124	0.32397	9.94872	9.66145	0.41565	0.38490
76	0.62021	0.31875	9.95163	9.65017	0.42777	0.38423
78	0.62876	0.31319	9.95438	9.63881	0.43937	0.38306
80	0.63655	0.30733	9.95657	9.62735	0.45057	0.38147
82	0.64477	0.30120	9.95941	9.61584	0.46133	0.37944
84	0.65227	0.29498	9.96173	9.60444	0.47169	0.37696
86	0.65941	0.28802	9.96391	9.59252	0.48161	0.37403
88	0.66630	0.28103	9.96598	9.58071	0.49125	0.37070
90	0.67286—	0.27370+	9.96794—	9.56878+	0.50045+	0.36693+

TAVOLA I. *Parte 3.ª di supplem. alla preced. contenente i valori di Logar. t da z = 180.° fino z = 360.°*

z	Log. t
180°	3.08222+
182	3.08701
184	3.09176
186	3.09645
188	3.10110
190	3.10570
192	3.11025
194	3.11474
196	3.11920
198	3.12361
200	3.12798
202	3.13230
204	3.13658
206	3.14081
208	3.14501
210	3.14917
212	3.15328
214	3.15736
216	3.16140
218	3.16544
220	3.16937
222	3.17329
224	3.17719
226	3.18105
228	3.18488
230	3.18867
232	3.19243
234	3.19616
236	3.19986
238	3.20352
240	3.20716
242	3.21076
244	3.21434
246	3.21788
248	3.22140
250	3.22488
252	3.22835
254	3.23178
256	3.23519
258	3.23857
260	3.24192
262	3.24525
264	3.24855
266	3.25183
268	3.25508
270	3.25831+

TAVOLA I. *delle funzioni ellittiche;*

Parte 2.ª

Argomento, anomalia media = z.

an. media = z	Log. x	Log. y	Log. $\frac{x}{r}$	Log. $\frac{y}{r}$	Log. P	Log. Q
90°	0.67286—	0.27370+	9.96794—	9.56878+	0.50045+	0.36693+
92	0.67916	0.26605	9.96980	9.55669	0.50933	0.36271
94	0.68521	0.25810	9.97157	9.54446	0.51789	0.35807
96	0.69099	0.24983	9.97325	9.53209	0.52609	0.35299
98	0.69654	0.24125	9.97484	9.51955	0.53401	0.34747
100	0.70187	0.23231	9.97635	9.50679	0.54165	0.34152
102	0.70697	0.22303	9.97779	9.49385	0.54897	0.33509
104	0.71188	0.21340	9.97916	9.48068	0.55605	0.32822
106	0.71661	0.20342	9.98047	9.46728	0.56289	0.32089
108	0.72111	0.19303	9.98171	9.45363	0.56941	0.31308
110	0.72543	0.18226	9.98289	9.43972	0.57569	0.30477
112	0.72958	0.17105	9.98402	9.42549	0.58173	0.29596
114	0.73355	0.15943	9.98509	9.41097	0.58753	0.28661
116	0.73734	0.14733	9.98610	9.39609	0.59309	0.27671
118	0.74096	0.13473	9.98708	9.38085	0.59837	0.26621
120	0.74450	0.12170	9.98800	9.36520	0.60361	0.25524
122	0.74784	0.10809	9.98888	9.34913	0.60852	0.24359
124	0.75103	0.09394	9.98971	9.33262	0.61325	0.23128
126	0.75408	0.07915	9.99051	9.31557	0.61777	0.21831
128	0.75720	0.06375	9.99126	9.29801	0.62209	0.20461
130	0.75973	0.04763	9.99197	9.27987	0.62613	0.19011
132	0.76241	0.03078	9.99265	9.26102	0.63013	0.17485
134	0.76491	0.01315	9.99329	9.24153	0.63385	0.15870
136	0.76730	9.99465	9.99390	9.22125	0.63741	0.14160
138	0.76958	9.97520	9.99408	9.20010	0.64081	0.12351
140	0.77171	9.95472	9.99501	9.17802	0.64401	0.10432
142	0.77372	9.93314	9.99552	9.15494	0.64701	0.08393
144	0.77566	9.91029	9.99600	9.13063	0.64993	0.06224
146	0.77745	9.88607	9.99645	9.10507	0.65261	0.03910
148	0.77913	9.86030	9.99687	9.07804	0.65513	0.01433
150	0.78070	9.83277	9.99726	9.04933	0.65749	9.98778
152	0.78218	9.80331	9.99762	9.01805	0.65973	9.95921
154	0.78352	9.77157	9.99796	8.98601	0.66173	9.92827
156	0.78478	9.73726	9.99826	8.95074	0.66365	9.89470
158	0.78593	9.70036	9.99855	8.91298	0.66537	9.85799
160	0.78696	9.65881	9.99880	8.87065	0.66693	9.81657
162	0.78789	9.61312	9.99903	8.82426	0.66833	9.77268
164	0.78873	9.56247	9.99923	8.77297	0.66961	9.72233
166	0.78950	9.50471	9.99942	8.71463	0.67077	9.66504
168	0.79013	9.43798	9.99957	8.64742	0.67173	9.59869
170	0.79066	9.35900	9.99970	8.56804	0.67253	9.52002
172	0.79111	9.26228	9.99981	8.47098	0.67321	9.42353
174	0.79145	9.13742	9.99989	8.34586	0.67373	9.29892
176	0.79169	8.96147	9.99995	8.16973	0.67904	9.12307
178	0.79185	8.66076+	9.99999	7.86890+	0.67433	8.82215+
180	0.79188—	— ∞	0.00000—	— ∞	0.67437+	— ∞

TAVOLA I. *Parte 3.ª di supplem.; continuazione.*

z	Log. t
270°	3.25831+
272	3.26152
274	3.26470
276	3.26786
278	3.27099
280	3.27410
282	3.27719
284	3.28026
286	3.28331
288	3.28634
290	3.28935
292	3.29233
294	3.29529
296	3.29824
298	3.30407
300	3.30407
302	3.30700
304	3.30982
306	3.31267
308	3.31550
310	3.31831
312	3.31210
314	3.31488
316	3.32663
318	3.32938
320	3.33210
322	3.33479
324	3.33749
326	3.34016
328	3.34282
330	3.34576
332	3.34808
334	3.35069
336	3.35339
338	3.35586
340	3.35843
342	3.36097
344	3.36350
346	3.36602
348	3.36853
350	3.37110
352	3.37349
354	3.37595
356	3.37840
358	3.38083
360	3.38325+

TAVOLA II. *contenente i logaritmi delle funzioni relative al calcolo delle variazioni dipendenti dall'azione di Giove, avente per argomento l'anomalia media della Cometa;*

Parte 1.ª

z	v'	Log. r'	Log. x'	Log. y'	Log. z'	Log. ρ	Log. D
0°	33°.26,5	0.69817+	0.35229+	0.64634−	9.67416−	0.66910+	7.25260−
4	35.50,7	0.69866	0.38657	0.63766	9.63036	0.72215	7.07962+
8	38.15,5	0.69916	0.41783	0.62796	9.58034	0.76440	7.46226
12	40.41,5	0.69973	0.44661	0.61639	9.52237	0.79617	7.58774
16	43. 4,1	0.70029	0.47236	0.60564	9.45607	0.82225	7.65448
20	45.27,9	0.70089	0.49625	0.59286	9.37599	0.84346	7.69425
24	47.51,2	0.70150	0.51816	0.57895	9.27685	0.86812	7.72564
28	50.14,1	0.70214	0.53824	0.56383	9.14719	0.87758	7.74015
32	52.36,5	0.70280	0.55691	0.54741	8.96051	0.89187	7.75439
36	54.58,3	0.70348	0.57401	0.52962	8.62506−	0.90479	7.76538
40	57.20,1	0.70418	0.58982	0.51026	7.85622+	0.91657	7.77375
44	59.41,2	0.70490	0.60436	0.48928	8.75163	0.92740	7.78021
48	62. 1,9	0.70563	0.61774	0.46646	9.02383	0.93740	7.78528
52	64.22,1	0.70638	0.63004	0.44165	9.18937	0.94666	7.78938
56	66.41,8	0.70714	0.64130	0.41458	9.30838	0.95556	7.79251
60	69. 0,9	0.70791	0.65159	0.38498	9.40107	0.96327	7.79463
64	71.19,6	0.70869	0.66096	0.35243	9.47688	0.96919	7.79542
68	73.38,4	0.70948	0.66948	0.31640	9.54096	0.97766	7.79747
72	75.55,5	0.71028	0.67712	0.27658	9.59590	0.98411	7.79814
76	78.12,8	0.71108	0.68397	0.23180	9.64121	0.99014	7.79848
80	80.29,4	0.71189	0.69003	0.18518	9.68704	0.99580	7.79848
84	82.45,6	0.71270	0.69535	0.12304	9.72538	1.00098	7.79815
88	85. 1,6	0.71352	0.69995	0.05495	9.76007	1.00473	7.79708
92	87.16,0	0.71434	0.70381	9.97408	9.79135	1.01027	7.79675
96	89.31,0	0.71516	0.70698	9.87284	9.82011	1.01437	7.79574
100	91.45,1	0.71597	0.70949	9.74016	9.84640	1.01818	7.79460
104	93.58,8	0.71678	0.71130	9.54693	9.87053	1.02165	7.79329
108	96.12,0	0.71760	0.71248	9.18853−	9.89287	1.02483	7.79181
112	98.24,6	0.71839	0.71297	8.64020+	9.91340	1.02769	7.79027
116	100.36,5	0.71919	0.71284	9.38260	9.93238	1.03027	7.78858
120	102.48,2	0.71998	0.71204	9.64250	9.94798	1.03254	7.78679
124	104.59,4	0.72076	0.71061	9.80350	9.96627	1.03459	7.78495
128	107.10,1	0.72153	0.70854	9.92018	9.98135	1.03645	7.78305
132	109.20,4	0.72230	0.70582	0.01159	9.99823	1.03787	7.78100
136	111.30,3	0.72305	0.70245	0.08656	0.00826	1.03907	7.77891
140	113.39,8	0.72386	0.69847	0.15002	0.02027	1.04013	7.77659
144	115.48,7	0.72459	0.69377	0.20471	0.03128	1.04089	7.77441
148	117.57,3	0.72522	0.68829	0.25268	0.04134	1.04135	7.77245
152	120. 5,3	0.72591	0.68221	0.29532	0.05062	1.04163	7.77022
156	122.13,3	0.72659	0.67547	0.33364	0.05911	1.04169	7.76794
160	124.20,3	0.72725	0.66788	0.36823	0.06683	1.04147	7.76564
164	126.27,1	0.72790	0.65961	0.39951	0.07387	1.04105	7.76327
168	128.33,7	0.72852	0.65054	0.42851	0.08010	1.04043	7.76091
172	130.39,6	0.72913	0.64070	0.45490	0.08569	1.03955	7.75861
176	132.45,6	0.72962	0.62987	0.47919	0.09053	1.03841	7.75637
180	134.51,1	0.73028	0.61835+	0.50177+	0.09490+	1.03719+	7.75363+

TAVOLA II. *contenente i logaritmi delle funzioni relative al calcolo delle variazioni degli elementi dipendenti dall'azione di Giove.*

Parte 1.ª

an. media z	v'	Log. r'	Log. x'	Log. y'	Log. z'	Log. ρ	Log. D
180°	134°.51',1	0.73028 +	0.61835 +	0.50177 +	0.09490 +	1.03719 +	7.75363 +
184	136.56,3	0.73083	0.60585	0.52260	0.09854	1.03564	7.75111
188	139. 1,2	0.73135	0.59228	0.54188	0.10159	1.03390	7.74860
192	141. 5,8	0.73185	0.57770	0.55979	0.10400	1.03194	7.74605
196	143.10,1	0.73233	0.56201	0.57641	0.10582	1.02976	7.74346
200	145.14,1	0.73279	0.54512	0.59186	0.10604	1.02736	7.74079
204	147.17,9	0.73322	0.52693	0.60621	0.10766	1.02478	7.73813
208	149.21,5	0.73363	0.50732	0.61953	0.10771	1.02198	7.73540
212	151.24,8	0.73401	0.48618	0.63190	0.10717	1.01893	7.73262
216	153.27,7	0.73437	0.46339	0.64331	0.10605	1.01575	7.72990
220	155.30,8	0.73471	0.43864	0.65392	0.10434	1.01217	7.72773
224	157.33,5	0.73502	0.41182	0.66369	0.10204	1.00862	7.72381
228	159.36,0	0.73530	0.38263	0.67267	0.09915	1.00475	7.72079
232	161.38,4	0.73555	0.35070	0.68091	0.09565	1.00077	7.71758
236	163.40,7	0.73578	0.31560	0.68843	0.09154	0.99641	7.71422
240	165.42,8	0.73599	0.27681	0.69526	0.08683	0.99184	7.71070
244	167.44,9	0.73616	0.23354	0.70141	0.08147	0.98723	7.70718
248	169.46,8	0.73631	0.18487	0.70691	0.07546	0.98237	7.70343
252	171.48,7	0.73643	0.12937	0.71178	0.06879	0.97636	7.69886
256	173.50,7	0.73653	0.06497	0.71604	0.06143	0.97196	7.69531
260	175.52,3	0.73660	9.98890	0.71967	0.05337	0.96648	7.69094
264	177.54,1	0.73664	9.89569	0.72262	0.04456	0.96077	7.68626
268	179.55,0	0.73665	9.77711	0.72515	0.03506	0.95499	7.68143
272	181.57,0	0.73664	9.61081	0.72703	0.02467	0.94896	7.67617
276	183.59,0	0.73658	9.33683	0.72831	0.01342	0.94280	7.67072
280	186. 1,0	0.73653	8.41525 +	0.72904	0.00133	0.93519	7.66343
284	188. 2,9	0.73642	9.21738 —	0.72917	9.98828	0.92987	7.65832
288	190. 4,7	0.73630	9.55081	0.72874	9.97427	0.92323	7.65149
292	192. 6,7	0.73614	9.73695	0.72773	9.95916	0.91648	7.64371
296	194. 8,8	0.73596	9.86641	0.72614	9.94293	0.90965	7.63644
300	196.10,9	0.73576	9.96548	0.72398	9.92549	0.90275	7.62804
304	198.13,3	0.73553	0.04569	0.72122	9.90669	0.89581	7.61917
308	200.15,6	0.73527	0.11281	0.71787	9.88647	0.88885	7.60966
312	202.18,3	0.73498	0.17051	0.71390	9.86461	0.88176	7.59934
316	204.21,0	0.73467	0.22085	0.70932	9.84102	0.87510	7.58904
320	206.24,0	0.73433	0.26548	0.70410	9.81543	0.86837	7.57792
324	208.25,9	0.73397	0.29601	0.69828	9.78792	0.86185	7.56645
328	210.29,3	0.73358	0.34108	0.69175	9.75761	0.85547	7.55448
332	212.32,8	0.73317	0.37381	0.68452	9.72443	0.84925	7.54203
336	214.36,6	0.73274	0.40371	0.67658	9.68786	0.84326	7.52928
340	216.40,7	0.73228	0.43114	0.66787	9.64725	0.83734	7.51583
344	218.45,1	0.73179	0.45639	0.65838	9.60178	0.83122	7.50084
348	220.49,6	0.73129	0.47967	0.64810	9.55042	0.82435	7.48209
352	222.54,6	0.73076	0.50122	0.63694	9.49136	0.81511	7.45274
356	224.59,9	0.73021	0.52119	0.62488	9.42230	0.80044	7.39413
360	227. 5,5	0.72964 +	0.53970 —	0.61186 +	9.33944 +	0.77487 +	7.23976 +

TAVOLA II. *contenente i logaritmi delle funzioni* F. G. H. *pel calcolo delle variazioni degli elementi dipendenti dall'azione di Giove.*

Parte 2.ª

Argomento, anomalia media della Cometa.

z	Log. F	Log. G	Log. H	z	Log. F	Log. G	Log. H
0°	7.89900 —	7.64272 +	7.89893 +	180°	8.25540 +	8.27322 +	8.25540 +
4	7.76754 +	7.89464	6.96842 —	184	8.26582	8.25311	8.27206
8	8.05584	7.98601	7.81998	188	8.27562	8.23124	8.28725
12	8.05259	8.04173	7.99938	192	8.28481	8.20757	8.30110
16	7.98755	8.08858	8.09054	196	8.29339	8.18182	8.31364
20	7.90069	8.12909	8.13811	200	8.30140	8.15374	8.32733
24	7.81894	8.17275	8.16483	204	8.30881	8.12309	8.33521
28	7.71503	8.19882	8.18045	208	8.31583	8.08946	8.34462
32	7.62594	8.22909	8.18674	212	8.32225	8.05204	8.35241
36	7.54291	8.25657	8.18658	216	8.32821	8.01095	8.35958
40	7.48073	8.28122	8.18081	220	8.33454	7.96568	8.36666
44	7.43240	8.30335	8.17020	224	8.33829	7.91127	8.37062
48	7.40372	8.32317	8.15552	228	8.34269	7.85046	8.37475
52	7.39693	8.34142	8.13695	232	8.34652	7.77029	8.37805
56	7.40821	8.35771	8.11450	236	8.34980	7.69306	8.38021
60	7.43258	8.37159	8.08718	240	8.35256	7.58452	8.38140
64	7.46696	8.38231	8.05684	244	8.35491	7.44064	8.38178
68	7.50977	8.39537	8.01941	248	8.35670	7.22217	8.38111
72	7.55392	8.40502	7.97765	252	8.35719	6.73104 +	8.37849
76	7.59981	8.41339	7.92899	256	8.35859	6.69340 —	8.37304
80	7.63780	8.42060	7.87749	260	8.35868	7.19310	8.37267
84	7.65987	8.42640	7.80471	264	8.35805	7.41797	8.36749
88	7.73102	8.43005	7.72250	268	8.35706	7.56166	8.36142
92	7.77127	8.43480	7.62127	272	8.35530	7.66855	8.35388
96	7.80963	8.43738	7.48467	276	8.35309	7.75199	8.34507
100	7.84569	8.43906	7.28432	280	8.34806	7.82323	8.33346
104	7.87972	8.43974	6.89284 —	284	8.34575	7.87632	8.32271
108	7.91171	8.43939	6.55405 +	288	8.34097	7.92359	8.30912
112	7.94182	8.43756	7.17438	292	8.33484	7.96379	8.29383
116	7.97010	8.43413	7.41865	296	8.32884	7.99777	8.27664
120	7.99678	8.43302	7.57436	300	8.32118	8.02632	8.25733
124	8.02195	8.42914	7.69012	304	8.31256	8.04987	8.23611
128	8.04567	8.42443	7.77359	308	8.30268	8.06875	8.21264
132	8.06797	8.41868	7.84691	312	8.29124	8.08329	8.18638
136	8.08948	8.41207	7.90798	316	8.27885	8.09300	8.15913
140	8.10881	8.40444	7.96037	320	8.26440	8.09826	8.12931
144	8.12754	8.39604	8.00619	324	8.24486	8.09299	8.09807
148	8.14542	8.38686	8.04689	328	8.22820	8.09358	8.06569
152	8.16210	8.37658	8.08300	332	8.20428	8.08296	8.03289
156	8.17791	8.36533	8.11544	336	8.17359	8.06582	8.00150
160	8.19279	8.35288	8.14464	340	8.13140	8.04075	7.97300
164	8.20660	8.33939	8.17090	344	8.06525	8.00538	7.94922
168	8.22004	8.32481	8.19521	348	7.92240	7.95482	7.93168
172	8.23260	8.30905	8.21720	352	7.62256 +	7.87602	7.91791
176	8.24450	8.29205	8.23733	356	7.03592 —	7.72897	7.90057
180	8.25540 +	8.27322 +	8.25541 +	360	7.85162 —	7.29269 —	7.85162 +

TAVOLA III. *contenente i valori delle funzioni dipendenti dalla posizione eliocentrica di Saturno;*

Argomento, anomalia media della Cometa.

z	v'	Log. r'	Log. x'	Log. y'	Log. z'
0°	231°.31',0	0.99385+	0.91032—	0.70603—	0.35850—
8	233 11,1	0.99326	0.90110	0.72522	0.36268
16	234.53,4	0.99266	0.89110	0.74358	0.36652
24	236.35,0	0.99209	0.88060	0.76070	0.36995
32	238.16,8	0.99142	0.86937	0.77670	0.37287
40	239.58,9	0.99078	0.85746	0.79179	0.37542
48	241.41,4	0.99014	0.84483	0.80600	0.37758
56	243.24,1	0.98947	0.83140	0.81935	0.37930
64	245. 7,1	0.98880	0.81713	0.83193	0.38064
72	246.50,4	0.98811	0.80198	0.84375	0.38157
80	248.34,2	0.98742	0.78583	0.85489	0.38210
88	250.18,2	0.98672	0.76867	0.86534	0.38222
96	252. 2,5	0.98601	0.75036	0.87515	0.38194
104	253.47,2	0.98529	0.73083	0.88434	0.38124
112	255.34,1	0.98457	0.70997	0.89295	0.38014
120	257.17,5	0.98383	0.68759	0.90097	0.37861
128	259. 3,2	0.98309	0.66358	0.90844	0.37667
136	260.49,3	0.98235	0.63772	0.91538	0.37430
144	262.35,7	0.98160	0.60976	0.92180	0.37151
152	264.22,5	0.98084	0.57944	0.92770	0.36825
160	266. 9,6	0.98008	0.54641	0.93311	0.36426
168	267 57,1	0.97932	0.51019	0.93803	0.36040
176	269.45,0	0.97856	0.47022	0.94248	0.35578
184	271.33,2	0.97780	0.42569	0.94646	0.35067
192	273.21,9	0.97703	0.37558	0.94996	0.34506
200	275.10,9	0.97626	0.31846	0.95301	0.33893
208	277. 0,2	0.97550	0.25218	0.95561	0.33229
216	278.50,1	0.97473	0.17338	0.95775	0.32509
224	280.40,2	0.97397	0.07652	0.95945	0.31732
232	282.30,7	0.97322	9.95098	0.96070	0.30896
240	284.21,6	0.97246	9.77327	0.96750	0.29998
248	286.12,9	0.97171	9.46616—	0.96185	0.29036
256	288. 4,5	0.97097	7.91701+	0.96175	0.28006
264	289.56,6	0.97023	9.49066	0.96120	0.26903
272	291.49,0	0.96951	9.78542	0.96020	0.25728
280	293.41,8	0.96878	9.95917	0.95873	0.24469
288	295.35,0	0.96807	0.08252	0.95680	0.23128
296	297 28,5	0.96737	0.17813	0.95440	0.21697
304	299.22,4	0.96668	0.25606	0.95151	0.20167
312	301.16,6	0.96600	0.32168	0.94813	0.18537
320	303.11,3	0.96533	0.37827	0 94427	0.16792
328	305. 4,0	0.96465	0.42698	0.93994	0.14958
336	306.55,0	0.96403	0.46963	0.93524	0.13038
344	308.50,6	0.96341	0.50951	0.92984	0.10899
352	310.44,5	0.96280	0.54495	0.92398	0.08642
360	312.42,7	0.96221+	0.57838+	0.91738—	0.06127—

TAVOLA IV. *contenente i logaritmi delle funzioni* ρ, F, G, H

relativi a Saturno.

Argomento, anomalia media della Cometa.

z	Log. ρ	Log. D	Log. F	Log. G	Log. H
0°	1.02436+	6.29729+	7.00322+	6.94890—	7.00332—
8	1.03376	6.40768	7.15882—	7.23293	6.68510—
16	1.02789	6.35651	7.29541	7.30995	6.21160+
24	1.01957	6.26153	7.23390	7.36064	6.86407
32	1.01153	6.13864	7.18158	7.40897	7.08538
40	1.00452	5.98455	6.96123	7.45756	7.20903
48	0.99868	5.78763	6.76056	7.50606	7.28594
56	0.99387	5.50772	6.47640	7.55252	7.33477
64	0.99010	4.98526+	5.94988—	7.59599	7.36324
72	0.98720	4.83840—	5.79936+	7.63591	7.37609
80	0.98514	5.23874	6.19623	7.67145	7.37521
88	0.98375	5.35634	6.31139	7.70374	7.36241
96	0.98290	5.37897	6.33175	7.73157	7.33845
104	0.98252	5.33013	6.28100	7.75564	7.30279
112	0.98253	5.19829	6.14762	7.77614	7.25442
120	0.98280	4.90280—	5.85089+	7.79339	7.19148
128	0.98329	4.19013+	5.13723—	7.80781	7.10963
136	0.98388	5.07436	6.02070	7.81907	7.00278
144	0.98455	5.35985	6.30560	7.82807	6.85355
152	0.98517	5.52683	6.47213	7.83486	6.62268
160	0.98574	5.64353	6.58851	7.83958	6.09987+
168	0.98621	5.72937	6.67412	7.84248	6.21292—
176	0.98648	5.79056	6.73515	7.84374	6.64380
184	0.98655	5.83485	6.77932	7.84353	6.84815
192	0.98632	5.86237	6.80672	7.84212	6.97799
200	0.98577	5.87452	6.81876	7.83956	7.07015
208	0.98489	5.87150	6.81562	7.83601	7.13900
216	0.98358	5.84893	6.79284	7.83171	7.19082
224	0.98181	5.79997	6.74362	7.82677	7.22916
232	0.97964	5.71758	6.66085	7.82134	7.25765
240	0.97682	5.55488	6.49762	7.81556	7.27450
248	0.97339	5.14683+	6.08885—	7.80970	7.28111
256	0.96935	5.13809—	6.07913+	7.80384	7.27742
264	0.96462	5.68606	6.62580	7.79817	7.26147
272	0.95917	5.96090	6.89888	7.79271	7.23008
280	0.95278	6.16136	7.09657	7.78767	7.17411
288	0.94580	6.31666	7.24898	7.78278	7.08783
296	0.93783	6.45272	7.38045	7.77788	6.93066
304	0.92908	6.57209	7.49322	7.77179	6.57401—
312	0.91959	6.67943	7.59070	7.76331	6.36063+
320	0.90971	6.77751	7.67318	7.75002	6.99790
328	0.90008	6.85586	7.72444	7.72061	7.26549
336	0.89237	6.91445	7.79557	7.66327	7.44395
344	0.89044	6.92608	7.60563	7.53575	7.54478
352	0.90305	6.81998	6.41244+	7.17955—	7.52616
360	0.94680+	6.16387—	7.08125—	6.83535	7.08125+

TAVOLA V. *contenente i logaritmi delle funzioni pel calcolo delle variazioni degli elementi dipendenti dalla posizione della Terra.*

Argomento, anomalia media della Cometa.

z	Log. r'	Log. x'	Log. y'	Log. z'	Log. ρ	Log. D	Log. F	Log. G	Log. H
0°	9.99450+	9.90775+	9.72150+	9.32048+	9.75485+	0.64339—	0.36489+	0.04139+	0.36489—
2	9.99581	9.81964	9.84886	9.33393	9.66788	0.94876	0.71385	0.35675	0.48281
4	9.99729	9.67709	9.92709	9.32324	9.59173	1.19771	0.71085	0.66589	0.44413—
6	9.99893	9.42335	9.97402	9.28753	9.57215	1.26016	0.67178	0.80111	8.22292+
8	0.00059	8.80668+	9.99412	9.22238	9.61068	1.13753	0.58576	0.71490	0.46740
10	0.00222	9.27020—	9.99078	9.11743	9.73903	0.71829	0.26612	0.38082	0.47335
12	0.00373	9.60575	9.96389	8.94619	9.85448	0.24499	0.07299	9.91756	0.38077
14	0.00503	9.77781	9.91054	8.61372+	9.96187	9.52571—	9.25648	8.10043+	0.25993
16	0.00607	9.88368	9.82321	7.91940—	0.05837	9.46352+	9.26016—	9.64710—	0.12866
18	0.00678	9.95008	9.68442	8.75776	0.14385	9.76643	9.62774	9.85188	9.98104
20	0.00717	9.98795	9.44275	9.01392	0.21942	9.86452	9.77803	9.93668	9.79375
22	0.00716	0.00206	8.74999+	9.15880	0.28946	9.91188	9.86497	9.97210	9.49694+
24	0.00682	9.99390	9.22331—	9.24967	0.34576	9.93560	9.91549	9.97566	8.63567—
26	0.00609	9.99251	9.58221	9.30582	0.39699	9.95153	9.96964	9.98076	9.31565
28	0.00509	9.90413	9.76154	9.33539	0.44457	9.96336	9.99154	9.90326	9.63500
30	0.00378+	9.80975—	9.87134—	9.34160—	0.48540+	9.96857+	9.94850—	9.82427—	9.77510—
330	9.99693+	9.71391+	9.91400+	9.32753+	0.56012+	0.00025+	8.65886+	9.68666+	9.88950+
332	9.99857	9.49370	9.96648	9.29741	0.54402	9.99413	9.36526	9.44036	9.93620
334	0.00022	8.94971+	9.99182	9.23913	0.52388	9.98751	9.60232	8.73445+	9.95297
336	0.00189	9.14067—	9.99343	9.14409	0.49983	9.98017	9.73581	9.21737—	9.94269
338	0.00342	9.55435	9.97170	8.99090	0.47177	9.97231	9.82017	9.56774	9.90467
340	0.00478	9.74809	9.92444	8.71139	0.43962	9.96357	9.87381	9.73886	9.83324
342	0.00588	9.86491	9.84537	7.36159+	0.40360	9.95360	9.90559	9.83889	9.71370
344	0.00667	9.93854	9.72006	8.67160—	0.36409	9.94157	9.91996	9.89517	9.50434
346	0.00714	9.98202	9.50868	8.97239	0.32169	9.92609	9.91931	9.91645	8.99063+
348	0.00721	0.00096	9.01738+	9.13342	0.27777	9.90560	9.90504	9.90313	9.12138—
350	0.00695	9.99757	9.07823—	9.23357	0.22968	9.87419	9.87425	9.84334	9.55359
352	0.00629	9.97135	9.52823	9.29623	0.19620	9.84485	9.84272	9.73932	9.71997
354	0.00535	9.91931	9.73074	9.33108	0.16752	9.81248	9.80788	9.55240	9.79945
356	0.00408	9.83376	9.85189	9.34216	0.15355	9.79657	9.78958	9.24724	9.82130
358	0.00264	9.69770	9.92802	9.33056	0.15674	9.80839	9.79583	8.63017—	9.81659
360	0.00101+	9.46075—	9.97283—	9.29469—	0.17445+	9.84096+	9.81379+	8.75078+	9.81379—

TAVOLA VI. *contenente i logaritmi delle funzioni*

pel calcolo delle variazioni degli elementi

dipendenti dalla posizione di Venere.

Argomento, anomalia media della Cometa.

z	Log. r'	Log. x'	Log. y'	Log. z'	Log. ρ	Log. D	Log. F	Log. G	Log. H
0	9.85638+	9.82044+	9.34528+	9.26182+	9.54017+	1.32749—	0.67277+	0.81037+	0.67278—
2	9.85661	9.71758	9.65686	9.31811	9.59171	1.14892	0.50864	0.80777	9.96287—
4	9.85721	9.48895	9.79340	9.30909	9.66448	0.87337	0.29912	0.70188	0.23984+
6	9.85812	8.70868+	9.84589	9.17913	9.76567	0.37687—	9.90733+	0.44830	0.45302
8	9.85923	9.32893—	9.83419	9.05536	9.88709	9.66551+	9.30496—	9.90316+	0.44055
10	9.86028	9.65097	9.75508	8.61008+	0.00242	0.21532	9.94728	9.70617—	0.34688
12	9.86112	9.79257	9.57539	8.57742—	0.10756	0.32932	0.12936	0.11504	0.17691
14	9.86195	9.84997	9.12047+	9.04597	0.19965	0.36983	0.21068	0.22925	9.85375+
16	9.86225	9.84411	9.11538—	9.22868	0.27828	0.38800	0.20838	0.24426	8.82306—
18	9.86225	9.77350	9.57428	9.31045	0.34954	0.39799	0.06955	0.18475	9.88939
20	9.86171	9.61016—	9.75471—	9.32519—	0.39949+	0.40416+	9.70476—	0.03239—	0.12086—
340	9.85780+	9.15943+	9.83520+	9.26804+	0.43622+	0.41853+	9.41018+	9.53699+	0.23043+
342	9.85884	9.08530—	9.84543	9.13343	0.40782	0.41358	9.90129	9.53945—	0.23213
344	9.85993	9.56912	9.79165	8.82974+	0.36999	0.40720	0.08924	9.98796	0.16043
346	9.86095	9.75482	9.65446	8.01254—	0.32270	0.39888	0.18194	0.15844	9.98121
348	9.86173	9.83751	9.34566+	8.93778	0.26629	0.38741	0.22060	0.22314	9.48717+
350	9.86219	9.85307	9.58568—	9.17951	0.20160	0.36966	0.22023	0.20757	9.61884—
352	9.86226	9.80656	9.46766	9.29020	0.13099	0.33943	0.18609	0.09086	0.03911
354	9.86193	9.68188	9.70613	9.32693	0.06019	0.28682	0.11935	9.73835—	0.19683
356	9.86124	9.40635—	9.81530	9.30197	9.99923	0.20480	0.02464	9.50254+	0.22509
358	9.86028	9.75286+	9.85053	9.20697	9.96134	0.12028	9.93759	0.03329	0.13390
360	9.85919+	9.42427+	9.82346—	8.99707—	9.95221+	0.09826+	9.92172+	0.18313+	9.92172—

TAVOLA VII. *contenente i valori delle variazioni degli elementi dell'Orbita della Cometa dipendenti da Giove, calcolate di 4° in 4° gradi di anomalia media = z.*

an. media = z	d p	d q	d φ	d π	d n	t d n	d g
0°	+0".0000	−0".0536	−2".7026	+0".6465	+0".028336	−0".0000	−0".0323
4	0239	+0.0274	+1.1191	1.5146	−0.013339	0.3582	0.8639
8	0914	0.0337	2.8213	2.6703	33322	1.7897	2.2561
12	1404	+0.0412	3.1834	3.2449	38379	3.0918	3.0919
16	1647	−0.0316	3.1992	3.4434	38759	4.1633	3.6032
20	1663	0604	3.1038	3.4659	37366	5.0172	4.0013
24	1521	0773	3.0121	3.4892	34183	5.5077	4.4066
28	1222	0780	2.9107	3.4123	33885	6.3696	4.8371
32	0849	0643	2.8246	3.4077	32288	6.9367	5.2388
36	+0.0411	−0.0358	2.7389	3.4278	30845	7.4547	5.5993
40	−0.0072	+0.0071	2.6482	3.4889	29521	7.9276	6.1490
44	0580	0631	2.5449	3.5685	28311	8.6582	6.7208
48	1098	1313	2.4292	3.6682	27198	8.7650	7.3194
52	1617	2106	2.2989	3.7902	26197	9.1454	8.0284
56	2125	2999	2.1525	3.9239	25260	9.4964	8.7526
60	2614	3977	1.9854	4.0588	24413	9.8340	9.4888
64	3072	5024	1.8081	4.1850	23379	10.0453	10.2421
68	3515	6160	1.6036	4.3468	22695	10.3607	11.0811
72	3913	7335	1.3894	4.4784	21921	10.5960	11.8661
76	4246	8502	1.1587	4.6238	21183	10.8071	12.7207
80	4596	+0.9808	0.9360	4.7348	20449	10.9827	13.5338
84	4876	1.1100	0.6849	4.8100	19783	11.1545	14.2639
88	5101	1.2386	0.3872	4.9577	19062	11.2615	15.1322
92	5292	1.3701	+0.1103	5.0715	18462	11.4128	16.1228
96	5435	1.5005	−0.1791	5.1511	17833	11.4932	16.8174
100	5531	1.6307	0.4740	5.2157	17224	11.5633	17.7076
104	5581	1.7587	0.7773	5.2634	16634	11.6140	18.2973
108	5587	1.8849	1.0849	5.2930	16056	11.6416	19.0730
112	5549	2.0079	1.3960	5.2996	15478	11.6378	19.7918
116	5468	2.1272	1.7089	5.2813	14896	11.6003	20.4215
120	5321	2.2324	2.0252	5.2741	14438	11.6310	21.1155
124	5184	2.3537	2.3461	5.2309	13950	11.6130	21.7476
128	4985	2.4610	2.6499	5.1694	13438	11.5475	22.3463
132	4781	2.5771	2.9628	5.0876	12971	11.4045	22.8791
136	4480	2.6544	3.2726	4.9885	12521	11.4322	23.3780
140	4179	2.7420	3.5726	4.8665	12084	11.3575	23.8562
144	3850	2.8239	3.8696	4.7307	11671	11.2830	24.2569
148	3496	2.9001	4.1620	4.5781	11284	11.2116	24.6411
152	3109	2.9682	4.4448	4.4064	10910	11.1330	24.9854
156	2715	3.0292	4.7197	4.2180	10559	11.0583	25.7430
160	2295	3.0827	4.9847	4.0104	10220	10.9780	25.5308
164	1858	3.1287	5.2366	3.7903	9913	10.9144	25.7225
168	1401	3.1670	5.4831	3.5543	9630	10.8615	25.8853
172	0946	3.1983	5.7159	3.3023	9340	10.7850	25.9927
176	0476	3.2218	5.9364	3.0406	9127	10.7843	26.0739
180	−0.0000	+3.2355	−6.1408	+2.7611	−0.088905	−10.7610	−26.0905

Continuazione della Tavola VII. *contenente le variazioni degli elementi dell' Orbita della Cometa dipendenti da Giove, calcolate di* 4^0 *in* 4^0 *di anomalia media* $= z$.

z	$d\,p$	$d\,q$	$d\,\varphi$	$d\,\pi$	$d\,n$	$t\,d\,n$
184°	+0''.0479	+3''.2422	−6''.3328	+2''.4711	−0''.008710	−10''.7592
188	0975	3.2420	6.5105	2.1692	8540	10.7785
192	1437	3.2335	6.6731	1.8572	8395	10.8210
196	1911	3.2174	6.8194	1.5352	8275	10.8885
200	2372	3.1863	6.9691	1.2066	8242	11.0660
204	2835	3.1701	7.0627	0.9668	8113	11.1112
208	3280	3.1246	7.1620	0.5216	8137	11.3624
212	3712	3.0791	7.2379	+0.1702	8059	11.4700
216	4128	3.0277	7.2994	−0.1844	8072	11.7050
220	4532	2.9736	7.3572	0.5439	8131	12.0091
224	4898	2.9017	7.3599	0.9060	8182	12.3041
228	5251	2.7992	7.3624	1.2680	8281	12.6753
232	5578	2.7538	7.3456	1.6302	8410	13.0987
236	5878	2.6686	7.3064	1.9912	8567	13.5738
240	6148	2.5795	7.2465	2.3497	8755	14.1065
244	6390	2.4860	7.1659	2.7031	8972	14.6970
248	6598	2.3576	7.0675	3.0517	9222	15.3543
252	6764	2.2817	6.9321	3.3930	9505	16.0805
256	6913	2.1786	6.7685	3.7234	−0.009729	16.7210
260	7017	2.0686	6.6358	4.0436	10141	17.7000
264	7082	1.9557	6.6468	4.3504	10507	18.6222
268	7113	1.8417	6.2414	4.6432	10898	19.6078
272	7102	1.7244	6.0059	4.9186	11320	20.6714
276	7057	1.6066	5.7621	5.1791	11769	21.8072
280	6944	1.4818	5.4706	5.4034	12264	23.0532
284	6837	1.3687	5.1966	5.6244	12729	24.2690
288	6671	1.2505	4.8853	5.8084	13230	25.5800
292	6461	1.1324	4.5551	5.9585	13746	26.9470
296	6231	1.0189	4.2108	6.0873	14262	28.3740
300	5958	0.9931	3.8489	6.1734	14763	29.7537
304	5655	0.7979	3.4762	6.2222	15265	31.1544
308	5323	0.6393	3.0923	6.2280	15726	32.5180
312	4961	0.5930	2.6882	6.1865	16133	33.7925
316	4585	0.4991	2.3086	6.0994	16453	34.9040
320	4187	0.4107	1.9176	5.9560	16663	35.7970
324	3780	0.3290	1.5401	5.7745	16456	35.7510
328	3356	0.2542	1.1700	5.4787	16498	36.3290
332	2926	0.1896	0.8302	5.1317	15960	35.5720
336	2493	0.1267	0.5351	4.6914	14907	33.6270
340	2056	0.0731	0.3132	4.1418	13065	29.8220
344	1617	+0.0311	0.2031	3.4498	−0.009946	22.9690
348	1174	−0.0034	0.3599	2.5302	−0.004660	−10.8870
352	0729	0.0268	0.7866	1.5156	+0.004218	+ 9.9678
356	0305	0.0350	1.5345	0.7218	+0.017316	+41.3860
360	+0.0000	−0.0241	−2.4234	−0.2888	+0.025412	+61.4170

TAVOLA VIII. *contenente le variazioni degli elementi dell'Orbita della Cometa dipendenti dall' azione di Saturno calcolate di* 8^0 *in* 8^0 *di anomalia media* $= z$.

an. media $= z$	$d\,p$	$d\,q$	$d\,\varphi$	$d\,\pi$	$d\,n$	$t\,d\,n$	$d\,g$
0°	+0".0000	+0".0172	+0".2053	−0".0782	−0".002153	−0".0000	+0".0016
8	0292	+0.0107	−0.0790	2446	+0,001302	0.0699	0.0959
16	0403	−0.0077	−0.1499	3784	2550	0.2739	0.4817
24	0387	197	1552	4062	2756	0.4441	1.1207
32	0317	240	1677	4216	2712	0.5826	1.7207
40	0232	227	1761	3744	2602	0.6987	2.1620
48	0149	178	1954	3595	2479	0.7989	2.5695
56	0078	109	2155	3536	2354	0.8850	2.9345
64	+0.0023	−0.0037	2332	3583	2232	0.9590	3.2707
72	−0.0016	+0.0029	2446	3723	2113	1.0213	3.5078
80	37	80	2493	3940	1990	1.0688	3.8734
88	46	112	2463	4216	1871	1.1054	4.1501
96	45	126	2360	4516	1745	1.1247	4.4087
104	37	117	2183	4827	1616	1.1283	4.6490
112	25	090	1940	5129	1482	1.1143	4.8698
120	−0.0011	+0.0047	1642	5409	1344	1.0828	5.0697
128	+0.0002	−0.0009	1299	5658	1202	1.0329	5.2490
136	12	73	929	5858	1054	0.9623	5.4023
144	19	142	534	6014	903	0.8730	5.5318
152	22	210	−0.0137	6122	747	0.7623	5.6376
160	21	276	+0.0269	6180	585	0.6284	5.7160
168	16	336	644	6194	424	0.4782	5.7696
176	+0.0006	375	1002	6165	255	0.3013	5.7959
184	−0.0006	420	1330	6101	+0.000083	+ 0.1025	
192	25	440	1616	6010	−0.000095	− 0.1225	
200	33	443	1855	5902	279	0.3746	
208	45	428	2043	5785	472	0.6591	
216	54	394	2172	5673	674	0.9774	
224	57	339	2237	5581	886	1.3324	
232	54	269	2247	5517	1109	1.7273	
240	42	176	2179	5507	1350	2.1761	
248	−0.0012	−0.0065	2042	5567	1609	2.6790	
256	+0.0019	+0.0060	1843	5712	1889	3.2465	
264	71	196	1586	5964	2194	3.8885	
272	140	339	1279	6340	2527	4.6146	
280	229	488	0920	6874	2892	5.4362	
288	333	625	0265	7543	3284	6.3495	
296	458	749	+0.0205	8382	3704	7.3605	
304	598	844	−0.0106	0.9338	4130	8.4288	
312	746	892	328	1.0340	4527	9.4822	
320	892	875	433	1.1239	4813	10.3400	
328	990	750	353	1.1466	4751	10.4621	
336	1001	509	304	1.0450	3964	8.9417	
344	827	+0.0159	847	0.7082	−0.001677	− 3.8729	
352	+0.0399	−0.0147	319	−0.1498	+0.002778	+ 6.5650	
360	+0.0000	−0.0064	−0.0246	+0.0602	+0.002576	+ 6.5261	

TAVOLA IX. *contenente le variazioni degli elementi dell' Orbita della Cometa*

dipendenti dall' azione della Terra

calcolate di 2° in 2° di anomalia media.

an. media = z	d p	d q	d φ	d π	d n	t d n	d g
0°	−0″.0000	−0″.0861	+1″.1658	+0″.2389	−0″.012224	−0″.0000	−0″.0227
2	684	1719	2.0533	0.6388	17913	2405	3123
4	2228	2619	1.9403	1.4755	21752	5841	6301
6	3444	2237	1.0849	1.9792	15929	6417	5901
8	2801	1031	+0.1091	1.7488	−0.004904	−0.2634	−0.1657
10	0981	173	−0.3664	0.8709	+0.001180	+0.0792	+0.3020
12	−0.0250	7	0.3756	0.4309	3191	2571	0.4325
14	+0.0024	2	0.4250	+0.0446	3645	3426	0.6250
16	0.0005	01	0.3697	−0.1417	3605	3873	0.6499
18	67	19	0.3061	2660	3451	4170	0.5555
20	158	57	0.2411	3528	3215	4317	0.5666
22	254	112	0.1732	4130	3747	4048	0.4696
24	342	174	0.1067	4445	2570	4141	0.3406
26	413	238	−0.0455	4896	2330	4067	+0.2095
28	465	297	+0.0173	4766	1743	3277	−0.0087
30	+.00486	−0.0339	+0.0772	−0.4240	+0.001321	+0.2661	−0.3489
330	+0.0505	+0″.0354	−0″.1913	+0″.0911	+0″.001626	+2″.8639	
332	457	292	1956	−0.0116	1266	2.8222	
334	386	222	1883	1093	838	1.8802	
336	296	151	1571	1962	+0.000358	+0.8064	
338	199	87	1171	2691	−0.000159	−0.3615	
340	99	36	660	3248	697	1.5910	
342	+0.0004	+0.0001	−0.0065	3614	1240	2.8748	
344	−0.0077	−0.0015	+0.0584	3774	1771	4.0910	
346	139	−0.0013	1249	3717	2271	5.2756	
348	175	+0.0005	1889	3443	2713	6.3408	
350	182	32	2450	2922	3061	7.1929	
352	169	63	2851	2316	3283	7.7598	
354	135	89	3074	1603	3457	7.9913	
356	95	108	3159	942	3355	8.0205	
358	49	123	3205	−0.0387	3367	8.0930	
360	−0.0000	+0.0130	+0.3276	+0.0123	−0.003436	−8.3154	

TAVOLA X. *contenente le variazioni degli elementi dell'Orbita*

della Cometa dipendenti dall' azione di Venere

calcolate di 2⁰ in 2⁰ di anomalia media della Cometa.

an. media = z.	$d\,p$	$d\,q$	$d\,\varphi$	$d\,\pi$	$d\,n$	$t\,d\,n$	$d\,g$
0°	+0".0000	+0".3623	+2".3611	+1".3989	−0".024763	−0".0000	−0".1562
2	1044	2626	+1.0310	1.5419	−0.011736	−0.1586	−0.3632
4	1042	1198	+0.0447	1.2696	−0.002021	−0.0543	−0.1998
6	+0.0350	+0.0227	−0.5250	0.7115	+0.004013	+0.1616	+0.1816
8	−0.0064	−0.0024	0.7358	+0.1407	6853	0.3681	0.6229
10	−0.0095	−0.0017	0.7401	−0.2769	7688	0.5161	1.0361
12	+0.0129	+0.0004	0.6368	0.5672	7437	0.5991	1.3804
14	456	−0.0041	0.4707	0.7427	6480	0.6090	1.5575
16	777	−0.0149	−0.2520	0.7806	5046	0.5420	1.4760
18	1014	−0.0286	+0.0145	0.6691	3281	0.3965	1.0531
20	+0.1114	−0.0405	+0.2601	−0.3722	+0.001389	+0.1865	+0.3888
340	+0".1010	+0".0367	−0".3902	+0".0039	+0".003082	+7".0350	
342	+0.0700	+0.0197	−0.3059	−0.2839	+0.001482	+3.4027	
344	+0.0324	+0.0062	−0.1587	0.5152	−0.000397	−0.9168	
346	−0.0045	−0.0004	+0.0328	0.6635	2381	5.5307	
348	339	+0.0010	2436	0.7137	4279	9.9970	
350	505	89	4468	0.6621	5923	13.9171	
352	520	191	6108	0.5140	7074	16.7169	
354	400	260	6989	0.2877	7505	17.8362	
356	220	253	6765	−0.0268	6973	16.6656	
358	75	190	5584	+0.1930	5676	13.6419	
360	−0.0000	+0.0116	+0.4188	+0.3300	−0.004392	−10.6148	

TAVOLA XI. *Effemeride della Cometa di Biela pel suo ritorno al perielio nel 1852.*

Pel mezzodì medio di Greenwich rapporto al piano dell' equatore, ed all'equinozio vero.

L'aberrazione della luce non venne inclusa nel calcolo.

Anno	Mesi - Giorni		AR. della Cometa	Differenze	Declinazione della Cometa	Differenze	Logaritmo di distanza dalla Terra
1852	Giugno	30	42°27′ 7″,8	+3°24′50″,3	+24°16′34″,4	+43′36″,9	0.29872
	Luglio	4	45.51.58,1	3.35.25,6	25. 0.11,3	40.30,5	0.28516
		8	49.27.23,7	3.46.38,5	25.40.41,8	36.36,9	0.27157
		12	53.14. 2,2	3.58.22,3	26.17.18,7	31.49,5	0.25797
		16	57.12.24,5	4.10.27,4	26.49. 8,2	26. 0,8	0.24449
		20	61.22.51,9	4.22.42,0	27.15. 9,0	19. 5,2	0.23125
		24	65.45.33,9	4.34.54,5	27.34.14,2	10.58,1	0 21832
		28	70.20.28,4	4.46.48,1	27.45.12,3	+ 1.37,4	0.20583
	Agosto	1	75. 7.16,5	4.57.52,2	27.46.49,7	— 8.56,8	0.19593
		5	80. 5. 8,7	5. 7.48,2	27.37.52,9	—20.33,0	0.18277
		9	85.12.56,9	+5.16. 9,9	27.17.13,9	—33.20,2	0.17350
		13	90.29. 6,8		+26.43.53,7		0.16326
	Agosto	13	90°29′ 6″,8	+2′40″37,8	+26°43′53″,7	—21′39″,2	0.16326
		15	93. 9.44,6	2.41.56,7	26.22.14,5	25. 4,1	0.15909
		17	95.51.41,3	2.42.59,1	25.57.10,4	28.30,5	0.15523
		19	98.34.40,4	2.43.41,4	25.28.39,9	31.57,1	0.15170
		21	101.18.21,8	2.44.17,7	24.56.42,8	35.23,4	0.14853
		23	104. 2.39,5	2.44.25,5	24.21.19,4	38.45,7	0 14572
		25	106.47. 5,0	2.44.20,7	23.42.33,7	42. 3,7	0.14331
		27	109.31.25,7	2.44. 0,0	23. 0.30,0	45.16,1	0.14128
		29	112.15.25,7	2.43.25,1	22.15.13,9	48.18,5	0.13965
		31	114.58.50,8	2.42.34,8	21.26.55,4	51.13,5	0.13843
	Settembre	2	117.41.25,6	2.41.32,3	20.35.41,9	53.56,5	0.13761
		4	107.22.57,9	2.40.16,8	19.41.45,4	56.28,1	0.13719
		6	123. 3.14,7	2.38.51,7	18.45.17,4	58.46,6	0.13718
		8	125.42. 6,4	2.37.17,6	17.46.30,7	60.51,2	0.13759
		10	128.19.24,0	2.35.34,7	16.45.39,5	62.40,4	0.13836
		12	130.54.58,7	2.33.46,2	15.42.59,1	64.15,6	0.13953
		14	133.28.44,9	2.31.52,4	14.38.43,5	65.35,2	0.14105
		16	136. 0.37,3	2.29.53,9	13.33. 8,3	66.39,7	0.14292
		18	138.30.31,2	2.27.52,4	12.26.28,6	67.29,5	0.14511
		20	140.58.23,6	2.25.49,7	11.18.59,1	68. 4,4	0.14761
		22	143.24.13,3	2.23.46,1	10.10.54,7	68.25,6	0.15042
		24	145.47.59,4	2.21.42,1	9. 2.29,1	68.33,6	0.15349
		26	148. 9.41,5	2.19.38,6	7.53.55,5	68.28,8	0.15680
		28	150.29.20,1	+2.17.37,8	6.45.26,7	—68.12,5	0.16034
		30	152.46.57,9		+5.37.14,2		0.16407

SULLA ESPRESSIONE DELL' INTEGRALE COMPLETO

D'OGNI EQUAZIONE LINEARE

A DUE VARIABILI

PER MEZZO DEGLI INTEGRALI PARTICOLARI DELLA STESSA EQUAZIONE

COL SECONDO MEMBRO RIDOTTO A ZERO.

MEMORIA

DEL M. E. PROF. SERAFINO RAFAELE MINICH.

In una Memoria sull'integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti (*Nuovi Saggi dell' Accademia di Padova,* Vol. IV) ho riportato le formule proposte la prima volta dall' insigne Laplace (*Miscellanea Societatis Regiae Taurinensis,* T. IV), onde esprimere l' integrale completo d' una equazione differenziale lineare dell' ordine n, per mezzo di n, od $n-1$ integrali particolari soddisfacenti alla stessa equazione col secondo membro nullo, come pure il modo di sviluppare in integrali semplici la prima di dette due formule. Proseguendo simili ricerche ho trovato da lungo tempo, che le formule di Laplace si ponno agevolmente rappresentare per mezzo di funzioni determinanti od alternanti de' valori particolari soddisfacenti alla data equazione nell' ipotesi del secondo membro nullo. Questo modo di esprimere l' integrale completo d' una equazione differenziale lineare, e i varii modi di svilupparlo costituiscono il soggetto del presente lavoro, in cui mi propongo di estendere nella Parte II le analoghe indagini alle equazioni lineari a differenze finite.

Ad ogni cultore delle Matematiche è noto, che l' integrale completo d'una equazione differenziale lineare dell' ordine n a due variabili dipende, per un teorema di Lagrange (*Miscellanea Taurinensia*, T. III), dalla determinazione di n, od $n-1$ integrali particolari dell' equazione medesima priva del 2.° membro, ossia ridotta al gruppo de' termini contenenti la variabile dipendente e le sue derivate. Per brevità e chiarezza di discorso darò quindinnanzi a siffatti integrali particolari il nome di valori elementari, e chiamerò ridotta l'equazione, che risulta dalla proposta coll' annullarne il secondo membro, cioè quel termine o gruppo che può esser funzione della sola variabile indipendente.

Il sommo Lagrange nel dimostrare il teorema testè enunciato insegnò il modo di dedurre l'integrale completo dell'equazione lineare generale, mediante gli n, od $n-1$ integrali elementari dell'equazione ridotta, col metodo sì luminoso e fecondo della variazione delle costanti arbitrarie (*Nouveaux Mémoires de l' Académie royale de Berlin*, année 1775). Ma l'espressione immediata dell'integrale completo richiesto in funzione degli n, o di $n-1$ valori elementari soddisfacenti all' equazione ridotta, venne indicata e dimostrata la prima volta dal celebre Laplace nella Memoria dianzi citata (*Miscellanea Taurinensia*, T. IV). Sembra che questa Memoria sia poscia caduta nell' obblivione, poichè il dotto Analista sig. G. Libri ha riprodotto nel T. X del Giornale di matematiche pure ed applicate del sig. Crelle di Berlino, con lieve divario, la stessa formula di Laplace, senza avvertire che fosse già conosciuta; e l'erudito sig. F. Moigno nel Vol. II del suo Trattato di calcolo differenziale ed integrale (*Introduction*, pag. 38) mostra di attribuire la medesima formula al Dubourguet, riferendo di averla incontrata nel Trattato di calcolo integrale di quell' Autore.

La deduzione delle due formule di Laplace esprimenti l' integrale completo di qualsivoglia equazione lineare a due variabili, mediante n, od $n-1$ valori elementari soddisfacenti all' equazione ridotta, e lo sviluppo di queste formule in integrali semplici sono il soggetto de' due primi Capi od Articoli della presente Memoria. Il metodo immaginato da Laplace, onde sviluppare in integrali semplici la prima di queste due formule, venne da me facilmente esteso allo sviluppo dell' altra formula esprimente l'integrale completo richiesto per mezzo d' un numero $n-1$ di valori elementari. Colla medesima analisi ho potuto altresì dedurre alcune relazioni di identità che servono ad agevolare le successive dimostrazioni.

Ma per formare le n funzioni sottoposte a' segni d' integrazione nello sviluppo della prima di quelle due formule, conviene istituire secondo il metodo di Laplace altrettanti calcoli separati, schierando gli n valori elementari in maniera che ciascuno di essi occupi alla sua volta l' ultimo posto, e da ogni serie de' valori elementari deducendo di mano in mano $n-1$ serie di termini, cadauno de' quali equivale alla derivata del rapporto fra il termine posteriore ed il termine corrispondente della serie anteriore. Ora mediante una singolare trasformazione di qualsivoglia integrale replicato relativo ad una variabile, ch' io dimostro nel Capo III, ho potuto far dipendere lo sviluppo in integrali semplici dell' una e dell' altra formula di Laplace da un solo degli n calcoli testè indicati.

Poscia nel Capo IV dimostro con facile analisi, che il coefficiente del secondo termine di ogni equazione differenziale lineare viene espresso in funzione degli n valori elementari da una formula frazionaria, il cui numeratore è la derivata del denominatore. Mercè questa osservazione ch' io feci sin dalle prime indagini intraprese sul presente soggetto, e che venne accennata dal valente Professore ed egregio mio amico Placido Tardy in una Nota inserita negli Annali di Matematiche pubblicati in Roma dal chiar.[mo] Prof. B. Tortolini, passo ad esprimere l' integrale di qualsiasi ordine d' una equazione differenziale lineare in funzione de' valori elementari, per mezzo di quelle formule, a cui Laplace diede il nome di risultanti, e che furono poscia designate col nome di funzioni alternate od alternanti, e di funzioni determinanti dagl' insigni Matematici A. L. Cauchy, C. F. Gauss, e da tutti gli odierni Analisti.

Si svolge nel Capo V l' espressione dell' integrale completo d' ogni equazione lineare d' ordine n a due variabili, per mezzo d' integrali semplici, e di funzioni alternate degli n valori elementari, o di un numero $n-1$ di questi valori. Fra le varie formule ottenute a questo oggetto havvi pur quella che generalizza, ed estende ad ogni equazione lineare a due variabili, un teorema relativo alle equazioni lineari col secondo membro nullo, che venne proposto dal prof. Malmsten di Upsal, e fu dimostrato dal prof. Tardy nella testè citata Memoria (Tortolini - *Annali di Matematiche*, aprile 1850).

Lo scopo del Capo VI è quello di conseguire l'espressione di qualsivoglia derivata della variabile dipendente. Distinguendo i due casi in cui l'ordine della derivata richiesta sia inferiore ad n, ovvero superiore ad $n-1$, trovo nel primo caso, che per formare la derivata qualunque della variabile dipendente, ba-

sta nella espressione di questa variabile sviluppata in integrali semplici sostituire a' valori elementari, che moltiplicano i detti integrali, le rispettive lor derivate d' un ordine eguale a quello della derivata richiesta. Nell' altro caso oltre di eseguire la medesima sostituzione, è d' uopo aggiungere al risultato un gruppo di termini contenenti le derivate successive del secondo membro dell' equazione proposta. Il grado di questo gruppo corrisponde alla differenza fra l' ordine della derivata richiesta e quello della proposta equazione lineare, e i coefficienti de' varii termini vengono facilmente determinati per mezzo de' coefficienti dell' equazione lineare proposta ad integrarsi.

Gli ultimi tre Articoli o Capi della Parte I di questa Memoria sono dedicati alla teoria dell' integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti. Il caso che presenta qualche difficoltà pratica nell' integrazione di siffatte equazioni è quello in cui l' equazione algebrica, che ha gli stessi coefficienti della data equazione lineare, sia dotata di alcuni gruppi di radici fra loro eguali. Dall' esempio trattato nel Capo VII si rileva l' utilità che si può ritrarre dall' applicazione del metodo di Laplace semplificato nel modo già esposto al Capo III, onde sviluppare l' integrale completo d' una equazione lineare a coefficienti costanti nel caso predetto di alcune radici eguali. Ma per rendere più evidente il vantaggio recato da questo metodo così compendiato, era d' uopo paragonarlo con alcuno de' metodi più semplici finora usati. Ora non si saprebbe trovare fra i metodi conosciuti, che servono a sviluppare l' integrale completo d' una equazione lineare a coefficienti costanti nei casi delle radici eguali, un processo di calcolo più sicuro e spedito di quello suggerito dall' insigne Eulero nel Vol. II, pag. 432 delle Istituzioni di calcolo integrale (*Editio altera*, Petropoli 1792), e dimostrato dal chiarissimo Matematico ed Astronomo G. Plana nelle Memorie della R. Accademia di Torino (T. 31, pag. 377). Imperocchè l' Eulero riduce la questione allo spezzamento d' una frazione, che ha per numeratore l' unità, e per denominatore il primo membro dell' equazione algebrica ausiliaria, i cui coefficienti sono gli stessi della proposta equazione lineare. D' altra parte il metodo del celebre D' Alembert adoprato dapprima dagli Analisti (*Histoire de l' Académie des Sciences de Berlin,* année 1748), appoggiandosi allo sviluppo in serie rapporto alle differenze esistenti fra una data radice e quelle che poi si riducono ad essa eguali, diviene sì complicato e prolisso nel caso dell' egua-

glianza di più radici, che indusse in errore i sommi Eulero e Lagrangia, come ha notato il preclaro Comm. G. Plana (*Memoria citata*), e come l'Eulero stesso ebbe la nobile franchezza di confessare, lasciando sussistere nella stampa l'errore commesso per ammaestramento del lettore (Euler — *Institutiones Calculi integralis*, Editio altera, T. II, pag. 354, 366. — *Novi Commentarii Acad. Petropolitanae*, T. III, pag, 24, 27, 32. — *Miscellanea Taurinensia*, T. III, pag. 179). Riproducendo nel Capo VIII quella breve dimostrazione del metodo. d'Eulero e della formula relativa, ch' io proposi altra volta nella sovraccitata Memoria (*Nuovi saggi dell'Accademia di Padova*, Vol. IV), trovo colla medesima analisi, che per conseguire lo sviluppo di qualsivoglia derivata della variabile dipendente, basta eseguire lo spezzamento d'una frazione, il cui denominatore è il primo membro dell' equazione algebrica ausiliaria dianzi accennata, ed il numeratore si riduce alla potenza della quantità principale d' un grado eguale all' ordine della derivata di cui si vuole esprimere lo sviluppo. In simil guisa la proposizione dell' Eulero diviene un corollario del teorema ora enunciato sul modo di ottenere la espressione di qualunque derivata della variabile dipendente.

A malgrado di questa facile estensione del metodo Euleriano alla formazione dello sviluppo di qualsivoglia derivata dell' integrale d' una equazione lineare a coefficienti costanti, il metodo di Laplace, ridotto a brevità maggiore nel modo già esposto nel Capo III, si troverà di più spedita applicazione, specialmente dopo gli schiarimenti addotti nel medesimo Capo VIII intorno all' uso pratico di quel metodo, e dopo le nuove osservazioni aggiunte a questo riguardo nel Capo IX, per cui si rileva che nel formare le serie delle quantità da determinarsi si può prescindere dalle operazioni di derivazione allorchè si tratta d' una equazione lineare a coefficienti costanti, di maniera che l' applicazione del metodo di Laplace si trova allora ridotta ad un calcolo del tutto elementare.

Compiuto così il riassunto della Parte I di questa Memoria, posso tralasciare l' analisi de' nove Capi in cui si divide del pari la Parte II riguardante la teorica delle equazioni lineari a differenze finite, poichè i relativi risultati sono del tutto analoghi a quelli già esposti intorno alle equazioni differenziali. Mi basta solo avvertire che il coefficiente dell' ultimo termine espresso in funzione degli n valori elementari corrisponde allora da una

frazione il cui numeratore è il valore variato del denominatore. Questa osservazione agevola notabilmente le consecutive deduzioni, e conduce a risultati della maggiore semplicità, fra i quali havvi pure la formula corrispondente a quella che venne poc'anzi additata come una estensione del teorema di Malmsten ad ogni equazione differenziale lineare fra due variabili.

PARTE I.

Equazioni differenziali lineari.

—

§ I.

Formule di Laplace esprimenti l' integrale completo d'una equazione lineare dell'ordine n, *per mezzo di* n, *od* n — 1 *valori elementari soddisfacenti alla stessa equazione nell'ipotesi del secondo membro eguale a zero.*

Abbiasi l' equazione differenziale lineare dell'ordine n a due variabili x, y della forma generale.

$$(1) \qquad A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \cdots\cdots + A_{n-1} y' + A_n y = X,$$

e si supponga che la funzione y_1 di x sia un valore elementare di y soddisfacente all' equazione medesima col secondo membro nullo

$$(2) \qquad A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \cdots\cdots + A_{n-1} y' + A_n y = 0 .$$

Poniamo nella (1)

$$(3) \qquad y = y_1 \int \beta \, d x ,$$

ed avremo l' equazione lineare dell' ordine $n - 1$

$$(4) \qquad B_0 \beta^{(n-1)} + B_1 \beta^{(n-2)} + B_2 \beta^{(n-3)} + \cdots\cdots + B_{n-2} \beta' + B_{n-1} \beta = X,$$

i cui coefficienti verranno espressi dalle formule seguenti:

$$(5)\quad B_0 = A_0\, y_1\,,\quad B_1 = n A_0 y_1' + A_1\, y_1\,,\quad B_2 = \frac{n(n-1)}{2} A_0 y_1'' + (n-1) A_1 y_1' + A_2 y_1\,,$$

. . . .

$$B_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} A_0 y_1^{(n-2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} A_1\, y_1^{(n-3)} + \cdots\cdots + 3\, A_{n-3}\, y_1' + A_{n-2}\, y_1\,,$$

$$B_{n-1} = n\, A_0\, y_1^{(n-1)} + (n-1)\, A_1\, y_1^{(n-2)} + \cdots\cdots + 2\, A_{n-2}\, y_1' + A_{n-1}\, y_1\,.$$

Con questo metodo dovuto al D' Alembert (*Miscellanea Taurinensia* T. III, p. 381) se assumiamo di mano in mano analogamente alla posizione (3)

$$(6)\qquad \beta = \beta_1 \int \gamma\, dx\,,\quad \gamma = \gamma_1 \int \varepsilon\, dx\,, \cdots \pi = \pi_1 \int \rho\, dx\,,\quad \rho = \rho_1 \int \sigma\, dx\,,\quad \sigma = \sigma_1 \int \tau\, dx\,,$$

passeremo dalla (4) alle consecutive equazioni d' ordine decrescente

$$(7)\qquad C_0\, \gamma^{(n-2)} + C_1\, \gamma^{(n-3)} + \cdots\cdots + C_{n-3}\, \gamma' + C_{n-2}\, \gamma = X,$$

$$E_0\, \varepsilon^{(n-3)} + E_1\, \varepsilon^{(n-4)} + \cdots\cdots E_{n-4}\, \varepsilon' + E_{n-3}\, \varepsilon = X,$$

. . . .

$$R_0\, \rho'' + R_1\, \rho' + R_2\, \rho = X$$

$$S_0\, \sigma' + S_1\, \sigma = X, \qquad T_0\, \tau = X,$$

denotandosi con β_1, γ_1, ... ρ_1, σ_1 de' valori elementari soddisfacenti alle rispettive equazioni (4) (7) nell'ipotesi di $X = 0$. I coefficienti d' una qualunque delle equazioni (7) si deducono analogamente dalle formule (5), purchè in luogo di n vi si introduca l'ordine dell' equazione medesima, e invece di A_0, A_1, A_2 . . . . . . si scrivano ordinatamente i coefficienti dell' equazione che immediatamente precede la richiesta.

Dalle relazioni (3) (6) si raccoglie che l' equazione (2) è soddisfatta da n valori particolari y_1, y_2 . . . . . . y_n di y ben distinti l' uno dall' altro. Imperocchè nell'ipotesi di $X = 0$ essendo $\sigma = \sigma_1$, avremo oltre di $\rho = \rho_1$ un altro valore elementare di ρ, cioè $\rho_2 = \rho_1 \int \sigma_1 dx$, in cui si prescinde dalla costante arbitraria corrispondente al segno d' integrazione; e così risalendo si troveranno in fine, oltre il valore elementare y_1, altri $n-1$ valori particolari di y determinati dalle seguenti formule, in cui s' intendono ommesse le costanti arbitrarie nelle relative integrazioni,

$$(8)\qquad y_2 = y_1\int\beta_1\,dx\,,\quad y_3 = y_1\int\beta_2\,dx\,,\cdots y_n = y_1\int\beta_{n-1}\,dx\,,$$

$$\beta_2 = \beta_1\int\gamma_1\,dx\,,\quad \beta_3 = \beta_1\int\gamma_2\,dx\,,\cdots \beta_{n-1} = \beta_1\int\gamma_{n-2}\,dx\,,$$

. . . .

$$\pi_2 = \pi_1\int\rho_1\,dx\,,\quad \pi_3 = \pi_1\int\rho_2\,dx\,,$$

$$\rho_2 = \rho_1\int\sigma_1\,dx\,.$$

Dimostrata così l'esistenza di n valori elementari diversi che soddisfanno all'equazione (2), possiamo col loro mezzo esprimere i valori elementari soddisfacenti alle rispettive equazioni (4) (7) nell'ipotesi di $X=0$. Infatti differenziando le formule integrali dedotte dalle successive eguaglianze (8), otteniamo evidentemente

$$(9)\qquad \beta_1 = \frac{1}{dx}\,d\frac{y_2}{y_1}\,,\qquad \beta_2 = \frac{1}{dx}\,d\frac{y_3}{y_1}\,,\quad\cdots\cdots\ \beta_{n-1} = \frac{1}{dx}\,d\frac{y_n}{y_1}\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{dx}\,d\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{1}{dx}\,d\frac{d\frac{y_3}{y_1}}{d\frac{y_2}{y_1}}\,,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{dx}\,d\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{1}{dx}\,d\frac{d\dfrac{d\frac{y_4}{y_1}}{d\frac{y_2}{y_1}}}{d\dfrac{d\frac{y_3}{y_1}}{d\frac{y_2}{y_1}}}\,,\ \cdots\cdots\cdots$$

etc.

Ora delle relazioni (3) (6) abbiamo inoltre

$$(10)\qquad y = y_1\int\beta_1\,dx\int\gamma_1\,dx\int\varepsilon_1\,dx\cdots\cdots\int\rho_1\,dx\int\sigma_1\,dx\int\tau\,dx\,,$$

e per la 1.ª delle eguaglianze (5) avendosi di mano in mano

$$(11)\qquad B_0 = A_0\,y_1\,,\quad C_0 = B_0\,\beta_1\,,\quad E_0 = C_0\,\gamma_1\,,\cdots\ T_0 = S_0\,\tau_1\,,$$

ricaviamo

$$T_0 = A_0\, y_1\, \beta_1\, \gamma_1 \cdots\cdots \rho_1\, \sigma_1 ,$$

e quindi dall' ultima delle equazioni (7) otteniamo

$$(12) \qquad \tau = \frac{X}{A_0\, y_1\, \beta_1\, \gamma_1 \cdots\cdots \rho_1\, \sigma_1} .$$

Sostituiti nella formula (10) i valori (9) di β_1, γ_1, ε_1 etc. ed il valore (12) di τ, abbiamo in essa l'espressione dell'integrale completo dell'equazione (1) per mezzo degli n valori elementari soddisfacenti alla equazione (2).

Siccome poi analogamente alla 2.ª delle eguaglianze (5) abbiamo

$$B_1 = n\, A_0\, y'_1 + A_1\, y_1 \;, \quad C_1 = (n-1)\, B_0\, \beta'_1 + B_1\, \beta_1 \;, \cdots\; S_1 = 2\, R_0\, \rho'_1 + R_1\, \rho_1 ,$$

ossia (11)

$$\frac{B_1}{B_0} = n\, \frac{y'_1}{y_1} + \frac{A_1}{A_0} \;, \quad \frac{C_1}{C_0} = (n-1)\frac{\beta'_1}{\beta_1} + \frac{B_1}{B_0} \;, \cdots\; \frac{S_1}{S_0} = 2\frac{\rho'_1}{\rho_1} + \frac{R_1}{R_0} ,$$

otterremo dalla somma di queste eguaglianze

$$(13) \qquad \frac{S_1}{S_0} = 2\,\frac{\rho'_1}{\rho_1} + 3\,\frac{\pi'_1}{\pi_1} + \cdots\cdots + (n-1)\,\frac{\beta'_1}{\beta_1} + n\,\frac{y'_1}{y_1} + \frac{A_1}{A_0} .$$

Ma l' integrazione della penultima delle equazioni (7) ci offre

$$\sigma = e^{-\int \frac{S_1}{S_0} \mathrm{d}x} \int \frac{e^{\int \frac{S_1}{S_0} \mathrm{d}x}\, X\, \mathrm{d}x}{S_0} .$$

D' altronde l' equazione (13) moltiplicata per $\mathrm{d}x$ ed integrata somministra

$$e^{\int \frac{S_1}{S_0} \mathrm{d}x} = \rho_1^2\, \pi_1^3 \cdots\cdots \beta_1^{n-1}\, y_1^n\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} ,$$

e dalle equazioni (11) si raccoglie

$$S_0 = A_0\, y_1\, \beta_1 \cdots\cdots \pi_1\, \rho_1 .$$

Risulta dunque

$$(14)\qquad \sigma = \frac{e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx}}{y_1^n \beta_1^{n-1} \cdots \pi_1^3 \rho_1^2} \int e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx} y_1^{n-1} \beta_1^{n-2} \cdots \pi_1^2 \rho_1 \frac{X}{A_0} dx;$$

e pertanto la formula

$$(15)\qquad y = y_1 \int \beta_1 dx \int \gamma_1 dx \int \cdots \int \pi_1 dx \int \rho_1 dx \int \sigma dx,$$

che pur si deduce dalle relazioni (3) (6), esprime l'integrale completo dell'equazione (1) in funzione di $n-1$ valori elementari soddisfacenti all' equazione (2), poichè σ si esprime, mercè la formula (14), in funzione di $\beta_1, \gamma_1 \cdots \rho_1$, e queste quantità sono date (9) per mezzo di $y_1, y_2 \cdots y_{n-1}$

Le formule (10) (14) sono state proposte e dimostrate dal Libri (Crelle, *Journal für die Mathematik*, Tomo X, p. 167), ma furono esibite la prima volta da Laplace con metodo diverso, e con lieve modificazione di forma (*Miscellanea Taurinensia*, T. IV). Sembra però che la citata Memoria del Laplace sia stata negli ultimi tempi obbliata, poichè il dotto annalista sig. Moigno ascrive le due formule (10) (14) al Dubourguet (Moigno, *Leçons de calcul différentiel et intégral*, l. c.).

Avendosi dalla penultima equazione (7)

$$S_0 \sigma_1' + S_1 \sigma_1 = 0,$$

ne viene (13)

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_1} + 2\frac{\rho_1'}{\rho_1} + 3\frac{\pi_1'}{\pi} + \cdots + (n-1)\frac{\beta_1'}{\beta_1} + n\frac{y_1'}{y_1} + \frac{A_1}{A_0} = 0,$$

ossia, denotando con *log.* il logaritmo iperbolico che ha per base $e = 2,718\ldots$, troviamo

$$(16)\qquad -\frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{dx} d \log. \sigma_1 \rho_1^2 \pi_1^3 \cdots \beta_1^{n-1} y_1^n.$$

Questa formula esprime il coefficiente $\frac{A_1}{A_0}$ per mezzo degli n valori elementari $y_1, y_2 \cdots y_n$. Moltiplicando per dx, ed integrando, si avrebbe il valore di σ_1, e quindi quello di y_n espresso per mezzo degli altri $n-1$ va-

lori elementari. L'espressione di σ_1 sarebbe evidentemente quella che risulta dalla formula (14), allorchè vi si ponga $X = 0$.

§ II.

Sviluppo delle due formule di Laplace in integrali semplici.

Passiamo ad indicare il procedimento analitico con cui Laplace nella già citata Memoria (*Miscellanea Taurinensia* T. IV) ha sviluppato in integrali semplici la formula (10).

Dividendo la (10) per y_1, indi differenziando e dividendo per $\beta_1 dx$, poscia di nuovo differenziando e dividendo per $\gamma_1 dx$, e così successivamente, è chiaro che dopo $n-1$ differenziazioni si avrà una equazione lineare dell'ordine $n-1$, il cui secondo membro sarà $\sigma_1 \int \tau \, dx$. Adoperando il segno Σ nel senso indicato dalla formula del calcolo alle differenze, in cui si suppone $\Delta p = 1$,

$$\sum_{p=m}^{p=n} F(p) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n-1),$$

potremo rappresentare la predetta equazione nel modo seguente

$$(17) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n} \, y^{(p)} = \sigma_1 \int \tau \, dx,$$

essendo $\varphi_{0,n}$, $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n} \cdots$ determinate funzioni di y_1, $y_2 \cdots y_{n-1}$, e delle loro derivate, ed intendendosi che $y^{(0)}$ equivalga ad y.

Ora poichè per le relazioni (8) si avrebbe, prescindendo dalle costanti arbitrarie,

$$y_n = y_1 \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \cdots \int \rho_1 \, dx \int \sigma_1 dx,$$

otterremo del pari

$$(18) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n} \, y_n^{(p)} = \sigma_1,$$

e quindi si avrà l' eguaglianza

$$(19) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n}\, y^{(p)} = \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n}\, y_n^{(p)} \int \tau \, \mathrm{d}x \,.$$

Sia C_n la costante arbitraria relativa ad $\int \tau \, \mathrm{d}x$. Si avrà nell'ipotesi di $X = 0$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n}\, y^{(p)} = C_n \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n}\, y_n^{(p)} ,$$

e poichè allora l'integrale completo dell'equazione (1) sarebbe

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots\cdots + C_n\, y_n ,$$

osserveremo di passaggio, che l' anzidetta equazione (19) nel caso di $X = 0$ dovendo essere soddisfatta da

$$y = C_m\, y_m + C_n\, y_n ,$$

ci offre l' identità

$$(20) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_{p,n}\, y_m^{(p)} = 0$$

per ciascuno dei valori $1, 2, 3, \cdots\cdots n-1$ di m.

Ora se nella serie de'valori elementari, tenendo tuttora per ultimo y_n, disponiamo gli altri in tutt'altro modo, e denotiamo con $\overline{\varphi}_{p,n}$, $\overline{\sigma}_1$, $\overline{\tau}$ le quantità corrispondenti a quelle dianzi denotate con $\varphi_{p,n}$, σ_1 , τ , avremo in conformità alle (17) (18)

$$(21) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \overline{\varphi}_{p,n}\, y^{(p)} = \overline{\sigma}_1 \int \overline{\tau} \, \mathrm{d}x ,$$

$$(22) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \overline{\varphi}_{p,n}\, y_n^{(p)} = \overline{\sigma}_1 ,$$

e quindi l'eguaglianza simile alla (19)

$$\sum_{p=0}^{p=n} \overline{\varphi}_{p,n}\, y^{(p)} = \sum_{p=0}^{p=n} \overline{\varphi}_{p,n}\, y_n^{(p)} \int \overline{\tau}\, dx\,,$$

la quale per $X = 0$, ossia per $\tau = 0$ (12), dovendo essere soddisfatta da $y = C_n y_n$ ci indica che la costante arbitraria relativa ad $\int \overline{\tau} dx$ è la stessa che quella di $\int \tau\, dx$.

Pertanto sottraendo l'una dall'altra le due equazioni (17) (21) dopo di averle divise rispettivamente per σ_1, $\overline{\sigma}_1$, otterremo

$$\sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\varphi_{p,n}}{\sigma_1} - \frac{\overline{\varphi}_{p,n}}{\overline{\sigma}_1} \right\} y^{(p)} = \int (\tau - \overline{\tau})\, dx\,,$$

senza costante arbitraria nel 2.° membro. Ma supposta $X = 0$, e quindi (12) $\tau = 0$; $\overline{\tau} = 0$, quest' ultima equazione, che diviene

$$\sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\varphi_{p,n}}{\sigma_1} - \frac{\overline{\varphi}_{p,n}}{\overline{\sigma}_1} \right\} y^{(p)} = 0\,,$$

dev' essere per sè stessa identica, poichè essendo dell' ordine $n-1$, è soddisfatta da un'espressione di y contenente n costanti arbitrarie; troviamo dunque

$$(23) \qquad \frac{\overline{\varphi}_{p,n}}{\overline{\sigma}_1} = \frac{\varphi_{p,n}}{\sigma_1}\,,$$

e conseguentemente

$$\overline{\tau} = \tau\,;$$

cosicchè le funzioni $\frac{\varphi_{p,n}}{\sigma_1}$ e τ sono simmetriche rapporto ad y_1, y_2, . . . y_{n-1}, purchè nella serie de' valori elementari di y si attribuisca l'ultimo posto ad y_n. È facile poi riconoscere che si avrebbe

$$\frac{\varphi_{n-1\,,\,n}}{\sigma_1} = \frac{1}{y_1\, \beta_1\, \gamma_1 \cdots \rho_1\, \sigma_1}$$

e quindi si ravvisa essere $y_1\, \beta_1\, \gamma_1 \cdots\cdots \sigma_1$, funzione simmetrica di y_1, $y_2 \cdots\cdots y_{n-1}$, lo che conferma l' invariabilità della funzione τ (12) rapporto a questi valori elementari che precedono y_n.

Ciò posto, se denotiamo in generale con $\varphi_{p,(q)}$, $\sigma_{1,(q)}$, $\tau_{(q)}$ le funzioni corrispondenti a quelle già denotate con $\varphi_{p,n}$, σ_1 , τ , allorchè nella serie dei valori elementari di y si tiene per ultimo y_q , avremo conformemente alla **(17)** le n eguaglianze

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\varphi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y^{(p)} = \int \tau_{(1)} \, dx ,$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\varphi_{p,(2)}}{\sigma_{1,(2)}} y^{(p)} = \int \tau_{(2)} \, dx ,$$

. . . .

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\varphi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} y^{(p)} = \int \tau_{(n)} \, dx ,$$

le quali rispettivamente moltiplicate per y_1 , y_2 , $\cdots\cdots$ y_n , e sommate insieme ci offrono

$$(24) \quad \sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\varphi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y_1 + \frac{\varphi_{p,(2)}}{\sigma_{1,(2)}} y_2 + \cdots + \frac{\varphi_{p,(n)}}{\sigma_{1(n)}} y_n \right\} y^{(p)} = y_1 \int \tau_{(1)} dx + y_2 \int \tau_{(2)} dx + \cdots + y_n \int \tau_{(n)} dx .$$

Ma per $X = 0$ il 2.° membro di questa equazione diviene

$$C_1 \, y_1 + C_2 \, y_2 + \cdots\cdots + C_n \, y_n , \quad \text{ossia } y ,$$

abbiamo dunque in detta ipotesi l' eguaglianza dell'ordine $n-1$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\varphi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y_1 + \frac{\varphi_{p,(2)}}{\sigma_{1,(2)}} y_2 + \cdots\cdots + \frac{\varphi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} y_n \right\} y^{(p)} = y ,$$

la quale dovendo verificarsi per una espressione di y dotata di n costanti arbitrarie, sarà identica per qualunque valore di y. Troviamo dunque che la formula

$$(25) \quad \frac{\varphi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y_1 + \frac{\varphi_{p,(2)}}{\sigma_{1,(2)}} y_2 + \cdots\cdots + \frac{\varphi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} y_n$$

equivale all'unità per $p = 0$, e si annulla per ogni altro valore $1, 2, \cdots n-1$ di p. E poichè questa formula è indipendente da X otterremo dall' equazione (24) per integrale completo dell'equazione (1)

$$(26) \qquad y = y_1 \int \tau_{(1)}\, dx + y_2 \int \tau_{(2)}\, dx + \cdots\cdots + y_n \int \tau_{(n)}\, dx,$$

cioè lo sviluppo in integrali semplici della formula (10).

Si potrebbe osservare che la formula (26) non è di facile applicazione, poichè oltre la determinazione di $\tau_{(n)}$ esige un nuovo calcolo non meno laborioso per ciascuna delle altre funzioni $\tau_{(n-1)}, \tau_{(n-2)} \cdots\cdots \tau_{(2)}, \tau_{(1)}$. Ma troveremo nel § III. alcune relazioni, per cui dopo di aver calcolato $\tau_{(n)}$, è alquanto più facile determinare tutte le altre funzioni sottoposte a' segni d' integrazione. Esprimeremo altresì queste quantità mediante funzioni alternanti.

In generale possiamo considerare la serie di m valori elementari y_1, $y_2, \cdots y_m$, e formando i valori di $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{m-1}, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_{m-2}$, ecc. colla legge indicata dalle relazioni (9), giungere mercè le formule (5), che servono a dedurre le successive equazioni (7), alla equazione lineare dell' ordine $n-m$.

$$(27) \qquad H_0\, z^{(n-m)} + H_1\, z^{(n-m-1)} + H_2\, z^{(n-m-2)} + \cdots\cdots + H_{n-m-1}\, z' + H_{n-m}\, z = X.$$

Per le relazioni (3) (6) avremo evidentemente

$$(28) \qquad y = y_1 \int \beta_1\, dx \int \gamma_1\, dx \cdots \int \eta_1\, dx \int z\, dx,$$

e si potrà sviluppare del pari questa espressione in integrali semplici. Infatti differenziando replicatamente la eguaglianza (28) in modo da far sparire i segni d'integrazione, ad eccezione dell'ultimo, otterremo analogamente alla (17)

$$(29) \qquad \sum_{p=0}^{p=m} \varphi_{p,m}\, y^{(p)} = \eta_1 \int z\, dx,$$

e in conformità alla (18) avremo

$$(30) \qquad \sum_{p=0}^{p=m} \varphi_{p,m}\, y_m^{(p)} = \eta_1.$$

La funzione $\frac{\varphi_{p,m}}{\eta_1}$ conformemente alla (23) sarebbe simmetrica rapporto ad y_1, y_2, $\cdots\cdot y_{m-1}$. Lo stesso dicasi della funzione ϑ e de' coefficienti H_0, $H_1, \cdots H_{n-m}$ della equazione (27) che determina ϑ. Se poi denotiamo con $\varphi_{p,(r)}$, $\eta_{1,(r)}$, $\vartheta_{(r)}$ le funzioni corrispondenti a $\varphi_{p,m}$, η_1, ϑ, allorchè nella serie de' valori elementari y_1, y_2, $\cdots y_m$ si tiene per ultimo y_r, troveremo analogamente alla (25) che la formula

$$(31) \qquad \frac{\varphi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}} y_1 + \frac{\varphi_{p,(2)}}{\eta_{1,(2)}} y_2 + \cdots\cdots + \frac{\varphi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}} y_m$$

equivale all'unità per $p=0$, e si annulla pegli altri valori 1, 2, 3, $\cdots m-1$ di p. In conseguenza dal moltiplicare rispettivamente per y_1, y_2, $\cdots\cdot y_m$ e sommare insieme le seguenti equazioni, che si deducono dalla (29), ritenendo a vicenda per ultimo nella serie degli anzidetti valori elementari il 1.°, il 2.°, il 3.° ecc.,

$$\sum_{p=0}^{p=m} \frac{\varphi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}} y^{(p)} = \int \vartheta_{(1)}\, d\, x,$$

$$\sum_{p=0}^{p=m} \frac{\varphi_{p,(2)}}{\eta_{1,(2)}} y^{(p)} = \int \vartheta_{(2)}\, d\, x,$$

. . . .

$$\sum_{p=0}^{p=m} \frac{\varphi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}} y^{(p)} = \int \vartheta_{(m)}\, d\, x;$$

otterremo immediatamente (31)

$$(32) \qquad y = y_1 \int \vartheta_{(1)}\, d\, x + y_2 \int \vartheta_{(2)}\, d\, x + \cdots\cdots + y_m \int \vartheta_{(m)}\, d\, x.$$

Daremo fra poco (§ III) le relazioni finite per cui $\vartheta_{(1)}$, $\vartheta_{(2)}$, $\cdots \vartheta_{(m-1)}$ si possono di mano in mano determinare per mezzo di $\vartheta_{(m)}$.

Supponiamo presentemente $m = n - 1$, e dedurremo dalla (32)

$$(33) \qquad y = y_1 \int \sigma_{(1)} \, d\, x + y_2 \int \sigma_{(2)} \, d\, x + \cdots + y^{n-1} \int \sigma_{(n-1)} \, d\, x .$$

Anche in questa formula, ch' è lo sviluppo in integrali semplici della (15), possiamo l' una dopo l' altra determinare $\sigma_{(n-2)}$, $\sigma_{(n-3)} \cdots \cdots \sigma_1$ per mezzo di $\sigma_{(n-1)}$ (§ III). Ma vedremo (§ V) che tutte le funzioni poste sotto i segni di integrazione nella formula (33) si possono esprimere per funzioni alternanti di y_1, $y_2 \cdots \cdots y_{n-1}$. Il valore di $\sigma_{(n-1)}$, cioè di σ, è dato dalla formula (14).

Siccome mutando nella (15) σ in σ_1, e sopprimendo le costanti arbitrarie si ha il valore di y_n, ne segue che denotando con $\sigma_{1,(q)}$ la funzione che corrisponde a σ_1, allorchè nella serie de'valori elementari y_1, y_2, $\cdots \cdots y_{n-1}$, di cui è composta, si attribuisce l'ultimo posto ad y_q, avremo dalla (33) il seguente valore di y_n espresso per y_1, $y_2 \cdots \cdots y_{n-1}$

$$(34) \qquad y_n = y_1 \int \sigma_{1,(1)} \, d\, x + y_2 \int \sigma_{1,(2)} \, d\, x + \cdots + y_{n-1} \int \sigma_{1,(n-1)} \, d\, x ,$$

senza mestieri di aggiungere costanti arbitrarie a verun integrale. Il valore di σ_1 ossia di $\sigma_{1,(n-1)}$ sarebbe dato dalla formula (14) postovi $X = 0$, di maniera che, denotata con K una costante arbitraria, si avrebbe

$$(35) \qquad \sigma_1 = \frac{K \, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} d\, x}}{y_1^n \, \beta_1^{n-1} \cdots \cdots \pi_1^3 \, \rho_1^2} .$$

Sostituito questo valore di σ_1 nella (12), ci darebbe

$$(36) \qquad \tau = \frac{y_1^{n-1} \, \beta_1^{n-2} \, \gamma_1^{n-3} \cdots \cdots \pi_1^2 \, \rho_1 \, X}{K A_0} \, e^{\int \frac{A_1}{A_0} d\, x} .$$

Potrebbesi nell' uso della formula (26) adoperare questo valore di τ ossia di $\tau_{(n)}$ espresso pe' valori elementari y_1, $\cdots \cdots y_{n-1}$, escluso y_n; ma allora conviene avvertire che la costante K avrebbe il valore determinato che assume (35) la formula

$$y_1^n\,\beta_1^{n-1}\,\cdots\cdots\,\rho_1^2\,\sigma_1\,e^{\int\frac{A_1}{A_0}dx}$$

allorchè vi si pongono le espressioni de' valori elementari y_1 , y_2 , $\cdots\cdots y_n$.

§ III.

Trasformazione generale d' un integrale replicato, che può servire allo sviluppo del medesimo in integrali semplici. Modo di dedurne il calcolo successivo delle quantità sottoposte a' segni d'integrazione nelle formule (26) (32) (33), *per mezzo d' una sola di dette funzioni.*

Abbiasi in primo luogo l' integrale duplice

$$\frac{y}{y_1}=\int\beta_1\,dx\int\gamma\,dx\,,$$

e dall' integrazione per parti otterremo

$$(37)\qquad \frac{y}{y_1}=\int\beta_1\,dx\times\int\gamma\,dx-\int\gamma\,dx\int\beta_1\,dx.$$

Sia poscia proposto l' integrale triplo

$$\frac{y}{y_1}=\int\beta_1\,dx\int\gamma_1 dx\int\varepsilon\,dx\,,$$

e si avrà a primo tratto (37)

$$\frac{y}{y_1}=\int\beta_1 dx\left\{\int\gamma_1\,dx\times\int\varepsilon\,dx-\int\varepsilon\,dx\int\gamma_1\,dx\right\};$$

quindi

$$\frac{y}{y_1}=\int\beta_1\,dx\int\gamma_1\,dx\times\int\varepsilon\,dx-\int\varepsilon\,dx\int\beta_1 dx\int\gamma_1\,dx$$

$$-\int\beta_1\,dx\times\int\varepsilon\,dx\int\gamma_1\,dx+\int\varepsilon\,dx\int\gamma_1\,dx\times\int\beta_1 dx,$$

ossia
$$\frac{y}{y_1} = \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \varepsilon \, dx - \int \beta_1 \, dx \times \int \varepsilon \, dx \int \gamma_1 \, dx$$
$$+ \int \varepsilon \, dx \overline{\left\{ \int \gamma_1 \, dx \times \int \beta_1 \, dx - \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \right\}}$$

ed in fine

$$\frac{y}{y_1} = \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \varepsilon \, dx - \int \beta_1 \, dx \times \int \varepsilon \, dx \int \gamma_1 \, dx + \int \varepsilon \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \beta_1 \, dx \tag{38}$$

Sia in terzo luogo l' integrale quadruplice

$$\frac{y}{y_1} = \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \zeta \, dx ,$$

e si avrà dapprima (38)

$$\frac{y}{y_1} = \int \beta_1 \, dx \left\{ \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \times \int \zeta \, dx - \int \gamma_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx + \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \right\},$$

poscia coll' integrazione per parti

$$\frac{y}{y_1} = \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \times \int \zeta \, dx - \int \zeta \, dx \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx$$
$$- \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx + \int \overline{\zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \times \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx}$$
$$+ \int \beta_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx - \int \overline{\zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \beta_1 \, dx}$$
$$= \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \times \int \zeta \, dx - \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx + \int \beta_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx$$
$$- \int \zeta \, dx \overline{\left\{ \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \beta_1 \, dx - \int \varepsilon_1 \, dx \times \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx + \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \right\}},$$

cioè (38)

$$\frac{y}{y_1} = \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \times \int \zeta \, dx - \int \beta_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \tag{39}$$
$$+ \int \beta_1 \, dx \times \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx - \int \zeta \, dx \int \varepsilon_1 \, dx \int \gamma_1 \, dx \int \beta_1 \, dx .$$

Procedendo con simili riduzioni si troverà in generale per qualsivoglia integrale replicato dell' ordine m la formula

$$(40)\qquad \int \beta_1 \,dx \int \gamma_1 \,dx \int \varepsilon_1 \,dx \cdots\cdots \int \eta_1 dx \int \vartheta \,dx =$$

$$\int \overline{\beta_1 \,dx \int \gamma_1 \,dx \cdots \int \eta_1 \,dx} \times \int \vartheta \,dx - \int \overline{\beta_1 \,dx \int \gamma_1 \,dx \int \cdots \int \zeta_1 \,dx} \times \int \overline{\vartheta \,dx \int \eta_1 \,dx}$$

$$+ \int \overline{\beta_1 \,dx \int \gamma_1 \,dx \int \cdots} \times \int \overline{\vartheta \,dx \int \eta_1 \,dx \int \zeta_1 \,dx} - \cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{m-2} \int \beta_1 dx \times \int \overline{\vartheta \,dx \int \eta_1 dx \int \cdots \int \gamma_1 dx} + (-1)^{m-1} \int \vartheta dx \int \eta_1 dx \int \zeta_1 dx \int \cdots \int \gamma_1 dx \int \beta_1 dx .$$

Dal modo con cui si deducono le formule successive (37) (38), ecc., si rileva che le costanti arbitrarie non vanno aggiunte se non a' segni d' integrazione che immediatamente succedono al segno $\times$ di moltiplicazione.

Il noto sviluppo

$$\int^m X \,dx^m = \frac{1}{2.3\ldots(m-1)} \left\{ \begin{array}{l} x^{m-1} \int X \,dx - (m-1)\, x^{m-2} \int x X \,dx + \frac{(m-1)(m-2)}{2} x^{m-3} \int x^2 X \,dx \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^{m-1} \int x^{m-1} X \,dx \end{array} \right\}$$

è un corollario della formula (40) che risulta dal porvi

$$\beta_1 = \gamma_1 = \cdots\cdots = \eta_1 = 1 , \quad \vartheta = X.$$

Presentemente ammettiamo che $y_2 \cdots\cdots y_m$ si esprimano per β_1, $\gamma_1 \cdots\cdots \eta_1$, mediante le relazioni (8). Moltiplicando l' eguaglianza (40) per y_1 otterremo (28)

$$y = y_m \int \vartheta \,dx - y_{m-1} \int \vartheta \,dx \int \eta_1 \,dx + y_{m-2} \int \vartheta \,dx \int \eta_1 \,dx \int \zeta_1 \,dx - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{m-1} y_1 \int \vartheta \,dx \int \eta_1 \,dx \int \zeta_1 \,dx \int \cdots\cdots \int \gamma_1 \,dx \int \beta_1 \,dx .$$

Il paragone di questa formula colla (32) ci esibisce

$$(41)\quad \vartheta_{(m)} = \vartheta , \quad -\vartheta_{(m-1)} = \vartheta_{(m)} \int \eta_1 \,dx , \quad \vartheta_{(m-2)} = \vartheta_{(m)} \int \eta_1 \,dx \int \zeta_1 \,dx , \cdots\cdots$$

$$(-1)^{m-2} \vartheta_{(2)} = \vartheta_{(m)} \int \eta_1 dx \int \zeta_1 dx \cdots \int \gamma_1 dx , \quad (-1)^{m-1} \vartheta_{(1)} = \vartheta_{(m)} \int \eta_1 dx \int \cdots \int \gamma_1 dx \int \beta_1 dx ;$$

e poichè per la trasformazione (40) abbiamo (8)

$$\int\eta_1 dx\int\zeta_1 dx=\int\eta_1 dx\times\int\zeta_1 dx-\int\zeta_1 dx\int\eta_1 dx=\int\eta_1 dx\times\int\zeta_1 dx-\int\zeta_2 dx\ ,$$

$$\int\eta_1 dx\int\zeta_1 dx\int\varepsilon_1 dx=\int\eta_1 dx\int\zeta_1 dx\times\int\varepsilon_1 dx-\int\eta_1 dx\times\int\varepsilon_1 dx\int\zeta_1 dx+\int\varepsilon_1 dx\int\zeta_1 dx\int\eta_1 dx$$

$$=\int\eta_1 dx\int\zeta_1 dx\times\int\varepsilon_1 dx-\int\eta_1 dx\times\int\varepsilon_2 dx+\int\varepsilon_3 dx,$$

ecc.

se moltiplichiamo queste eguaglianze per $\vartheta_{(m)}$, ne ricaveremo (41)

$$(42)\qquad -\vartheta_{(m-1)}=\vartheta_{(m)}\int\eta_1 dx$$

$$-\vartheta_{(m-2)}=\vartheta_{(m-1)}\int\zeta_1 dx+\vartheta_{(m)}\int\zeta_2 dx$$

$$-\vartheta_{(m-3)}=\vartheta_{(m-2)}\int\varepsilon_1 dx+\vartheta_{(m-1)}\int\varepsilon_2 dx+\vartheta_{(m)}\int\varepsilon_3 dx$$

. . . .

$$-\vartheta_{(1)}=\vartheta_{(2)}\int\beta_1 dx+\vartheta_{(3)}\int\beta_2 dx+\cdots\cdots+\vartheta_{(m)}\int\beta_{m-1} dx$$

ovvero

$$(43)\qquad -\vartheta_{(m-1)}=\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\vartheta_{(m)}\ ,\qquad -\vartheta_{(m-2)}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\vartheta_{(m-1)}+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\vartheta_{(m)}\ ,$$

$$-\vartheta_{(m-3)}=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\vartheta_{(m-2)}+\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\vartheta_{(m-1)}+\frac{\gamma_4}{\gamma_1}\vartheta_{(m)}\ ,$$

. . . .

$$-\vartheta_{(1)}=\frac{y_2}{y_1}\vartheta_{(2)}+\frac{y_3}{y_1}\vartheta_{(3)}+\frac{y_4}{y_1}\vartheta_{(4)}-\cdots\cdots+\frac{y_m}{y_1}\vartheta_{(m)}\ .$$

In simil guisa, supponendo $m=n-1$, avremo

$$(44)\qquad -\sigma_{(n-2)}=\frac{\pi_2}{\pi_1}\sigma_{(n-1)}\ ,$$

$$-\sigma_{(n-3)}=\frac{\xi_2}{\xi_1}\sigma_{(n-2)}+\frac{\xi_3}{\xi_1}\sigma_{(n-1)}\ ,$$

. . . .

$$-\sigma_{(1)}=\frac{y_2}{y_1}\sigma_{(2)}+\frac{y_3}{y_1}\sigma_{(3)}+\cdots+\frac{y_{n-1}}{y_1}\sigma_{(n-1)}\ ,$$

e le stesse relazioni hanno pur luogo, se a $\sigma_{(n-1)}$, $\sigma_{(n-2)} \cdots\cdots \sigma_{(1)}$ sostituiamo i rispettivi valori $\sigma_{1,(n-1)}$, $\sigma_{1,(n-2)}$, $\cdots\cdots \sigma_{1,(1)}$ nell' ipotesi di $X = 0$.

Parimenti per $m = n$ otteniamo

$$(45) \qquad -\tau_{(n-1)} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\tau_{(n)},$$

$$-\tau_{(n-2)} = \frac{\pi_2}{\pi_1}\tau_{(n-1)} + \frac{\pi_3}{\pi_1}\tau_{(n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\tau_{(1)} = \frac{y_2}{y_1}\tau_{(2)} + \frac{y_3}{y_1}\tau_{(3)} + \cdots\cdots + \frac{y_n}{y_1}\tau_{(n)}.$$

Mercè queste relazioni (44) (45), viene agevolata l' applicazione delle formule (26) (33) allo sviluppo dell' integrale completo dell' equazione (1), secondochè si conoscono n od $n-1$ valori elementari di y. Passiamo a mostrare come le funzioni sottoposte a' segni d' integrazione nelle formule (26) (33) si possono esprimere per funzioni determinanti od alternate de' predetti valori elementari.

§ IV.

Riduzione a nuova forma dell' integrale completo d' una equazione lineare, espresso in funzione de' valori elementari soddisfacenti alla equazione ridotta.

Col mezzo delle relazioni (5), e di quelle che analogamente hanno luogo per cadauna delle equazioni (7), si potrebbe determinare oltre di $\frac{A_1}{A_0}$ (16) anco $\frac{A_2}{A_0}$, $\frac{A_3}{A_0}$, $\cdots\cdots \frac{A_n}{A_0}$ in funzione di y_1, β_1, γ_1, $\cdots\cdots \sigma_1$ (9), e quindi de' valori elementari y_1, y_2, $\cdots\cdots y_n$. Ma sarà più spedito dedurre simultaneamente tutte queste espressioni dalle eguaglianze

$$(46)\qquad y_1^{(n)} + \frac{A_1}{A_0} y_1^{(n-1)} + \frac{A_2}{A_0} y_1^{(n-2)} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{A_0} y_1 = 0\,,$$

$$y_2^{(n)} + \frac{A_1}{A_0} y_2^{(n-1)} + \frac{A_2}{A_0} y_2^{(n-2)} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{A_0} y_2 = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n^{(n)} + \frac{A_1}{A_0} y_n^{(n-1)} + \frac{A_2}{A_0} y_n^{(n-2)} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{A_0} y_n = 0\,,$$

che risultano dalla (2) colla sostituzione degli n valori di y. Ora, per la regola della risoluzione di n equazioni di 1° grado ad n incognite, la frazione esprimente una qualsiasi $\frac{A_m}{A_0}$ delle quantità richieste, presa negativamente, ha per denominatore la funzione determinante rappresentabile col simbolo

$$\Sigma \left\{ \pm y_n^{(n-1)} y_{n-1}^{(n-2)} y_{n-2}^{(n-3)} \cdots\cdots y_2' y_1 \right\},$$

i cui termini si deducono di mano in mano dal primo $y_n^{(n-1)} y_{n-1}^{(n-2)} \cdots y_2' y_1$ coll'eseguire tutte le possibili disposizioni delle quantità $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ sotto gl' indici fissi $n-1$, $n-2$, ecc. di derivazione, oppure delle derivate $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)} \cdots y^{(1)}$, $y^{(0)} = y$ sopra gl' indici fissi inferiori n, $n-1$, $n-2, \cdots 2$, 1, mutando il segno ogniqualvolta da un dato termine si passa ad un altro, mediante un numero dispari di alternazioni. Si ottiene poi il numeratore della frazione esprimente $-\frac{A_m}{A_0}$, cambiando in ogni termine del denominatore l' indice di derivazione $(n-m)$ nell' indice (n).

Rappresentando gli eguali risultati de' due modi di alternazione testè indicati colle notazioni rispettive $\chi^{\overline{n-1,0}}$, $\chi_{\overline{n,1}}$, verremo a stabilire

$$(47)\qquad \chi^{\overline{n-1,0}} = \chi_{\overline{n,1}} = \Sigma \left(\pm y_n^{(n-1)} y_{n-1}^{(n-2)} \cdots\cdots y_2' y_1 \right),$$

ed ove occorra di accennare il risultato del cangiamento d' un indice inferiore m nell' indice r, ovvero d' un indice superiore (m) nell' indice (r), scriveremo rispettivamente $\chi^{\overline{n-1,0}}_{m)r}$, $\chi^{m)r}_{\overline{n,1}}$.

Avremo pertanto

$$(48) \qquad \frac{A_m}{A_0} = - \frac{\chi_{\overline{n,1}}^{n-m)n}}{\chi_{\overline{n,1}}},$$

e poichè per la detta legge di composizione delle funzioni determinanti od alternate troviamo

$$(49) \qquad \chi^{\overline{n-1,0}} = y_n^{(n-1)} \chi^{\overline{n-2,0}} - y_{n-1}^{(n-1)} \chi_{n-1)n}^{\overline{n-2,0}} - \cdots\cdots - y_1^{(n-1)} \chi_{1)n}^{\overline{n-2,0}},$$

ne viene (48) (47)

$$(50) \qquad \frac{A_1}{A_0} = - \frac{\chi_{\overline{n,1}}^{n-1)n}}{\chi_{\overline{n,1}}} = - \frac{y_n^{(n)} \chi^{\overline{n-2,0}} - y_{n-1}^{(n)} \chi_{n-1)n}^{\overline{n-2,0}} - \cdots\cdots - y_2^{(n)} \chi_{2)n}^{\overline{n-2,0}} - y_1^{(n)} \chi_{1)n}^{\overline{n-2,0}}}{y_n^{(n-1)} \chi^{\overline{n-2,0}} - y_{n-1}^{(n-1)} \chi_{n-1)n}^{\overline{n-2,0}} - \cdots\cdots - y_2^{(n-1)} \chi_{2)n}^{\overline{n-2,0}} - y_1^{(n-1)} \chi_{1)n}^{\overline{n-2,0}}}.$$

Ora è facile dimostrare, che il numeratore di questa frazione esprimente $\frac{A_1}{A_0}$ equivale alla derivata del suo denominatore. Infatti per formare la derivata della funzione (49) devesi prendere l'aggregato dei risultati che provengono dall'aumentarvi dell' unità ciascuno degl'indici di derivazione $(n-1)$, $(n-2)$, ecc. Ma il risultato che si deduce dall'accrescere di un' unità l'indice $(n-1)$ è appunto il numeratore della predetta frazione, e ciascuno de'risultati che provengono dall' aumentare d' una unità ogni altro indice $(n-2)$, $(n-3)$, ecc. va a zero, avendosi per ognuno de' valori $0, 1, 2, \cdots\cdots n-1$ di m

$$\Sigma \left\{ \pm y_n^{(n-1)} y_{n-1}^{(n-2)} \cdots\cdots y_{m+1}^{(m)} y_m^{(m)} \cdots\cdots y_2' y_1 \right\} = 0,$$

attesochè ad un dato termine di questa somma corrisponde sempre un termine eguale e di segno opposto, ch' è quello che procede dalla permutazione delle due quantità che si trovano dotate di due indici di derivazione fra loro eguali. Si ricava pertanto, se denotiamo la derivata col segno D,

$$(51) \qquad \frac{A_1}{A_0} = - \frac{D\chi^{\overline{n-1,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}} = - \frac{d.\log \chi^{\overline{n-1,0}}}{dx}.$$

Siccome poi la derivazione della formula (49) ci rende, a cagione di $D\chi^{\overline{n-1,0}} = \chi^{n-1)n}_{\overline{n,1}}$,

$$y^{(n-1)}_{n} D\chi^{\overline{n-2,0}} - y^{(n-1)}_{n-1} D\chi^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n} - \cdots\cdots - y^{(n-1)}_{1} D\chi^{\overline{n-2,0}}_{1)n} = 0,$$

e per la dianzi accennata proprietà delle funzioni determinanti abbiamo, comunque si ponga $n-2$, $n-3$, $\cdots\cdots 2, 1, 0$, in luogo di p,

$$y^{(p)}_{n} \chi^{\overline{n-2,0}} - y^{(p)}_{n-1} \chi^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n} - \cdots\cdots - y^{(p)}_{1} \chi^{\overline{n-2,0}}_{1)n} = 0;$$

derivando ripetutamente questa eguaglianza si otterrà in generale

(52)

$$y^{(n-m)}_{n} D^m \chi^{\overline{n-2,0}} - y^{(n-m)}_{n-1} D^m \chi^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n} - \cdots\cdots - y^{(n-m)}_{1} D^m \chi^{\overline{n-2,0}}_{1)n} = (-1)^{m-1} (m-1) D\chi^{\overline{n-1,0}}$$

$$y^{(n-m-1)}_{n} D^m \chi^{\overline{n-2,0}} - y^{(n-m-1)}_{n-1} D^m \chi^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n} - \cdots\cdots - y^{(n-m-1)}_{1} D^m \chi^{\overline{n-2,0}}_{1)n} = (-1)^m \chi^{\overline{n-1,0}},$$

$$y^{(n-r)}_{n} D^m \chi^{\overline{n-2,0}} - y^{(n-r)}_{n-1} D^m \chi^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n} - \cdots\cdots - y^{(n-r)}_{1} D^m \chi^{\overline{n-2,0}}_{1)n} = 0,$$

per tutti i valori $m+2$, $m+3 \cdots\cdots n$ di r, e per ogni valore $0, 1, 2, 3 \cdots\cdots n$ di m.

Dal paragone delle due formule (16) (50) si rileva che il rapporto

$$\frac{y_1^n \beta_1^{n-1} \gamma_1^{n-2} \cdots\cdots \rho_1^2 \sigma_1}{\chi^{\overline{n-1,0}}},$$

corrisponde ad un numero costante. Per determinare il valore di questo numero supponiamo

$$y_1 = e^{a_1 x}, \quad y_2 = e^{a_2 x}, \quad \cdots\cdots y_n = e^{a_n x},$$

e troveremo che l' una e l' altra funzione equivale alla formula

$$(53) \quad (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots\cdots (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots\cdots (a_n - a_{n-1})\, e^{(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) x}.$$

Ne segue che la costante cercata equivale ad 1, cosicchè risulta in generale

$$y_1^n \beta_1^{n-1} \gamma_1^{n-2} \cdots\cdots \rho_1^2 \sigma_1 = \chi^{\overline{n-1,0}} . \tag{54}$$

Osserveremo pure circa al valore di $-\frac{A_n}{A_0}$ (48) che il numeratore della frazione che lo esprime sarebbe

$$\Sigma \left\{ \pm y_n^{(n-1)} y_{n-1}^{(n-2)} \cdots\cdots y_3'' y_2' y_1^{(n)} \right\},$$

e poichè dal termine $y_n^{(n-1)} y_{n-1}^{(n-2)} \cdots\cdots y_3'' y_2' y_1^{(n)}$ si passa al termine $y_n^{(n)} y_{n-1}^{(n-1)} \cdots\cdots y_3''' y_2'' y_1'$ con $n-1$ permutazioni cioè di (n) con $(n-1)$, di $(n-1)$ con $(n-2)$, ecc., ed infine dell'indice $''$ coll'indice $'$, si troverà che questo numeratore essendo in conseguenza eguale a

$$(-1)^{n-1} \Sigma \left\{ \pm y_n^{(n)} y_{n-1}^{(n-1)} \cdots\cdots y_3''' y_2'' y_1' \right\},$$

si può dedurre colla stessa legge della formula (54), se non che in luogo di formare $\beta_1, \gamma_1, \cdots\cdots \sigma_1$ partendo (9) da' valori elementari $y_1, y_2, \cdots y_n$, converrà partire dalle derivate di questi y_1', y_2' ecc. Denotando questo risultato con $\chi_{\overline{n,1}}(y')$ otterremo

$$\frac{A_n}{A_0} = \frac{(-1)^n \chi_{\overline{n,1}}(y')}{\chi_{\overline{n,1}}} . \tag{55}$$

Ciò premesso, se nel sistema delle equazioni (46) scriviamo in luogo dell'ultima la proposta equazione (1) divisa per A_0, basterà mutare rispettivamente nella formula (50) $y_n, y_n', y_n'', \cdots\cdots y_n^{(n-1)}, y_n^{(n)}$ in $y, y', y'', \cdots\cdots y^{(n-1)}, y^{(n)} - \frac{X}{A_0}$ e si avrà, a cagione delle eguaglianze (49) (51),

$$\frac{A_1}{A_0} = - \frac{D\chi_{n)0}^{\overline{n-1,0}} - \chi^{\overline{n-2,0}} \frac{X}{A_0}}{\chi_{n)0}^{\overline{n-1,0}}} ,$$

cioè l'equazione lineare del 1° ordine

$$D\chi_{n)0}^{\overline{n-1,0}} + \frac{A_1}{A_0} \chi_{n)0}^{\overline{n-1,0}} = \chi^{\overline{n-2,0}} \frac{X}{A_0} ,$$

da cui si ritrae coll' integrazione

$$\chi_{n)0}^{\overline{n-1,0}} = e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx} \int e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx} \chi^{\overline{n-2,0}} \frac{X}{A_0} dx,$$

ossia (47) (49)

$$y^{(n-1)} \chi_{\overline{n-1,1}} - y^{(n-2)} \chi_{\overline{n-1,1}}^{n-2)n-1} - \cdots - y \chi_{\overline{n-1,1}}^{0)n-1} = e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx} \int e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx} \chi^{\overline{n-2,0}} \frac{X}{A_0} dx.$$

Questa equazione dell' ordine $n-1$, che sarebbe un integrale 1° dell' equazione (1), ha per valori elementari $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$, attesochè il suo primo membro va a zero per la dimostrata proprietà delle alternanti, se applichiamo inferiormente alla y uno degl' indici $1, 2, 3, \cdots n-1$. Sostituendovi l' espressione desunta dall' integrazione della (51) cioè (35) (54)

$$(56) \qquad e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx} = \frac{\chi^{\overline{n-1,0}}}{K},$$

daremo all' integrale testè ottenuto la forma

$$(57) \quad y^{(n-1)} - \frac{\chi_{\overline{n-1,1}}^{n-2)n-1}}{\chi_{\overline{n-1,1}}} y^{(n-2)} - \cdots - \frac{\chi_{\overline{n-1,1}}^{0)n-1}}{\chi_{\overline{n-1,1}}} y = \frac{\chi^{\overline{n-1,0}}}{\chi^{\overline{n-2,0}}} \int \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}} \frac{X}{A_0} dx.$$

Ora in quella guisa che si è dedotto l' integrale 1° (57) della proposta equazione (1), la quale possiamo scrivere (48) sotto l'aspetto seguente

$$y^{(n)} - \frac{\chi_{\overline{n,1}}^{n-1)n}}{\chi_{\overline{n,1}}} y^{(n-1)} - \cdots - \frac{\chi_{\overline{n,1}}^{0)n}}{\chi_{\overline{n,1}}} y = \frac{X}{A_0},$$

passeremo del pari dall' integrale 1° (57) all' integrale 2°

$$y^{(n-2)} - \frac{\chi^{n-3)n-2}_{\overline{n-2,1}}}{\chi_{\overline{n-2,1}}}\, y^{(n-3)} \ldots\ldots - \frac{\chi^{0)n-2}_{\overline{n-2,1}}}{\chi_{\overline{n-2,1}}}\, y = \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-3,0}}} \int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}\,\chi^{\overline{n-1,0}}\,dx}{\{\chi^{\overline{n-2,0}}\}^2} \int \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\,\frac{X}{A_0}\,dx\,,$$

e così giungeremo in generale all' integrale $(n-m+1)^{esimo}$

$$(58)\quad y^{(m-1)} - \frac{\chi^{m-2)m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\chi_{\overline{m-1,1}}}\, y^{(m-2)} \ldots\ldots - \frac{\chi^{0)m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\chi_{m-1,1}}\, y = \frac{\chi^{\overline{m-1,0}}}{\chi^{\overline{m-2,0}}} \int \frac{\chi^{\overline{m-2,0}}\,\chi^{\overline{m,0}}\,dx}{\{\chi^{\overline{m-1,0}}\}^2} \int \ldots\ldots \int \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\,\frac{X}{A_0}\,dx\,,$$

da cui si ritrae per $m=2$

$$y' - \frac{\chi^{0)1}_{\overline{1,1}}}{\chi_{\overline{1,1}}}\, y = \frac{\chi^{\overline{1,0}}}{\chi^{\overline{0,0}}} \int \frac{\chi^{\overline{0,0}}\,\chi^{\overline{2,0}}\,dx}{\{\chi^{\overline{1,0}}\}^2} \int \frac{\chi^{\overline{1,0}}\,\chi^{\overline{3,0}}\,dx}{\{\chi^{\overline{2,0}}\}^2} \int \ldots\ldots \int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}\,\chi^{\overline{n-1,0}}\,dx}{\{\chi^{\overline{n-2,0}}\}^2} \int \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\,\frac{X}{A_0}\,dx\,;$$

e poichè abbiamo (50) (51) $\dfrac{\chi^{0)1}_{\overline{1,1}}}{\chi_{\overline{1,1}}} = \dfrac{D\chi^{\overline{0,0}}}{\chi^{\overline{0,0}}}$, si otterrà coll'integrazione di questa equazione di 1° ordine l' integrale completo dell' equazione (1), espresso per mezzo di funzioni alternanti de' valori elementari di y,

$$(59)\quad y = \chi^{\overline{0,0}} \int \frac{\chi^{\overline{1,0}}}{\{\chi^{\overline{0,0}}\}^2}\,dx \int \frac{\chi^{\overline{0,0}}\,\chi^{\overline{2,0}}}{\{\chi^{\overline{1,0}}\}^2}\,dx \int \frac{\chi^{\overline{1,0}}\,\chi^{\overline{3,0}}}{\{\chi^{\overline{2,0}}\}^2}\,dx \int \ldots\ldots \int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}\,\chi^{\overline{n-1,0}}}{\{\chi^{\overline{n-2,0}}\}^2}\,dx \int \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\,\frac{X}{A_0}\,dx\,.$$

L' applicazione di questa formula all' equazione lineare a coefficienti costanti ci somministra, a cagione del valore (53) di $\chi^{\overline{n-1,0}}$, la formula Euleriana

$$y = e^{a_1 x} \int e^{(a_2 - a_1)x}\,dx \int e^{(a_3 - a_2)x}\,dx \int \ldots\ldots \int e^{(a_n - a_{n-1})x}\,dx \int \frac{e^{-a_n x}\,X}{A_0}\,dx\,,$$

in cui $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ sono le radici dell' equazione algebrica di grado n che ha gli stessi coefficienti della proposta.

§ V.

Sviluppo in integrali semplici dell'integrale completo dell'equazione (1), *espresso per funzioni alternate de' valori elementari di* y.

La nuova formula (59) si può immediatamente dedurre dalla (10), allorchè siasi stabilita l' identità (54). Imperocchè dalla (54) si ottiene

$$(60)\qquad y_1\,\beta_1\,\gamma_1\cdots\cdots\pi_1\,\rho_1\,\sigma_1=\frac{\overline{\chi^{n-1,0}}}{\overline{\chi^{n-2,0}}},$$

$$y_1\,\beta_1\,\gamma_1\cdots\cdots\pi_1\,\rho_1=\frac{\overline{\chi^{n-2,0}}}{\overline{\chi^{n-3,0}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1\,\beta_1\,\gamma_1=\frac{\overline{\chi^{2,0}}}{\overline{\chi^{1,0}}},$$

$$y_1\,\beta_1=\frac{\overline{\chi^{1,0}}}{\overline{\chi^{0,0}}},$$

donde risulta, col porre nella (54) $n=1$,

$$(61)\qquad y_1=\overline{\chi^{0,0}},\quad \beta_1=\frac{1}{\overline{\chi^{0,0}}}\,\frac{\overline{\chi^{1,0}}}{\overline{\chi^{0,0}}},\quad \gamma_1=\frac{\overline{\chi^{0,0}}}{\overline{\chi^{1,0}}}\,\frac{\overline{\chi^{2,0}}}{\overline{\chi^{1,0}}}\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_1=\frac{\overline{\chi^{n-4,0}}}{\overline{\chi^{n-3,0}}}\,\frac{\overline{\chi^{n-2,0}}}{\overline{\chi^{n-3,0}}},\qquad \sigma_1=\frac{\overline{\chi^{n-3,0}}}{\overline{\chi^{n-2,0}}}\,\frac{\overline{\chi^{n-1,0}}}{\overline{\chi^{n-2,0}}},$$

ed infine (12)

$$(62)\qquad \tau=\frac{\overline{\chi^{n-2,0}}}{\overline{\chi^{n-1,0}}}\,\frac{X}{A_0}.$$

Fatte le sostituzioni di questi valori (61) nella (10) si avrà immediatamente la (59).

Supponendo che η_1 sia la $(m)^{esima}$ delle successive quantità y_1, β_1, γ_1, ec. abbiamo (61)

$$\eta_1 = \frac{\chi^{\overline{m-3,0}}}{\chi^{\overline{m-2,0}}} \frac{\chi^{\overline{m-1,0}}}{\chi^{\overline{m-2,0}}}.$$

Ora il confronto delle due corrispondenti eguaglianze (29) (58) ci esibisce, col porvi $y = y_m$,

$$\frac{\varphi_{p,m}}{\varphi_{m-1,m}} = -\frac{\chi^{p)m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\chi_{\overline{m-1,1}}}, \qquad \frac{\eta_1}{\varphi_{m-1,m}} = \frac{\chi^{\overline{m-1,0}}}{\chi^{\overline{m-2,0}}}.$$

$$\vartheta = \frac{\chi^{\overline{m-2,0}}\chi^{\overline{m,0}}}{\left\{\chi^{\overline{m-1,0}}\right\}^2}\int\frac{\chi^{\overline{m-3,0}}\chi^{\overline{m-1,0}}\,dx}{\left\{\chi^{\overline{m-2,0}}\right\}^2}\int\cdots\int\frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\frac{X}{A_0}\,dx$$

Conseguentemente rinveniamo

$$\varphi_{m-1,m} = \frac{\chi^{\overline{m-3,0}}}{\chi^{\overline{m-2,0}}},$$

e in generale

$$(65) \qquad \varphi_{p,m} = -\frac{\chi^{\overline{m-3,0}}\chi^{p)m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\left\{\chi^{\overline{m-2,0}}\right\}^2}.$$

Volendo infine introdurre nelle formule (26) (33) le espressioni di τ, e di σ, allo scopo di svolgere l'integrale completo per mezzo di funzioni alternanti secondochè si conoscono n od $n-1$ valori elementari di y, troveremo nel 1° caso (62) coll'avvertenza, che nel formare $\tau_{(n-r)}$ da $\tau_{(n)}$ deesi cangiare $\chi^{\overline{n-1,0}}$ di segno,

$$(64) \quad \tau_{(n)} = \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\frac{X}{A_0}, \qquad -\tau_{(n-1)} = \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\frac{X}{A_0}, \qquad -\tau_{(n-2)} = \frac{\chi^{\overline{n-2,1}}_{n-2)n}}{\chi^{\overline{n-1,0}}}\frac{X}{A_0}, \text{ ecc.}$$

ovvero a cagione della (56)

$$(65)\qquad \tau_{(n)} = \frac{e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx}\, \overline{\chi^{n-2,0}}\, X}{K A_0}, \qquad -\tau_{(n-1)} = \frac{e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx}\, \overline{\chi^{n-2,0}_{n-1)n}}\, X}{K A_0},$$

$$-\tau_{(n-2)} = \frac{e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx}\, \overline{\chi^{n-2,0}_{n-2)n}}\, X}{K A_0}, \text{ ecc.}$$

essendo presentemente K una costante determinata mercè la (56), per qualsivoglia particolar valore di x.

Per conseguenza dalla formula (26) ritrarremo (64)

$$(66)\qquad y = y_n \int \frac{\overline{\chi^{n-2,0}}}{\overline{\chi^{n-1,0}}} \frac{X}{A_0} dx - y_{n-1} \int \frac{\overline{\chi^{n-2,0}_{n-1)n}}}{\overline{\chi^{n-1,0}}} \frac{X}{A_0} dx - \cdots\cdots - y_1 \int \frac{\overline{\chi^{n-2,0}_{1)n}}}{\overline{\chi^{n-1,0}}} \frac{X}{A_0} dx,$$

ed osservando che, denotata col segno $D_{y^{(p)}}$ la derivata parziale della funzione $\overline{\chi^{n-1,0}}$ rapporto ad $y^{(p)}$, si ha manifestamente (49)

$$(67)\qquad \overline{\chi^{n-2,0}} = \mathbf{D}_{y^{(n-1)}_n} \overline{\chi^{n-1,0}}, \qquad \overline{\chi^{n-2,0}_{n-r)n}} = -\mathbf{D}_{y^{(n-1)}_{n-r}} \overline{\chi^{n-1,0}},$$

daremo alla (66) l'aspetto seguente, che non reca peraltro verun compendio di calcolo,

$$(68)\qquad y = y_n \int \mathbf{D}_{y^{(n-1)}_n} \log \overline{\chi^{n-1,0}} . \frac{X}{A_0} dx + y_{n-1} \int \mathbf{D}_{y^{(n-1)}_{n-1}} \log \overline{\chi^{n-1,0}} . \frac{X}{A_0} dx + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + y_1 \int \mathbf{D}_{y^{(n-1)}_1} \log \overline{\chi^{n-1,0}} . \frac{X}{A_0} dx .$$

Avremo poi (65)

$$(69)\qquad y = y_n \int \overline{\chi^{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1 dx}{A_0}} \frac{X}{A_1 K} dx - y_{n-1} \int \overline{\chi^{n-2,0}_{n-1)n}}\, e^{\int \frac{A_1 dx}{A_0}} \frac{X}{A_0 K} dx - \cdots\cdots$$

$$- y_1 \int \overline{\chi^{n-2,0}_{1)n}}\, e^{\int \frac{A_1 dx}{A_0}} \frac{X}{A_0 K} dx ,$$

ovvero (67)

$$(70)\qquad y = y_n \int \mathrm{D}_{y_n^{(n-1)}} \overline{\chi^{n-1,0}} \cdot e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0 K} \mathrm{d}x + y_{n-1} \int \mathrm{D}_{y_{n-1}^{(n-1)}} \overline{\chi^{n-1,0}} \cdot e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0 K} \mathrm{d}x +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + y_1 \int \mathrm{D}_{y_1^{(n-1)}} \overline{\chi^{n-1,0}} \cdot e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0 K} \mathrm{d}x\,,$$

essendo K la costante che equivale (56) al valore di

$$\overline{\chi^{n-1,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x},$$

corrispondente ad $x = 0$, od a qualsivoglia valore particolare di x.

Nell'altro caso in cui si esiga lo sviluppo dell' integrale completo dell' equazione (1), conoscendosi $n-1$ valori elementari di y, otterremo (14) (60)

$$(71)\qquad \sigma = \sigma_{(n-1)} = \frac{\overline{\chi^{n-3,0}}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x}}{\left\{ \overline{\chi^{n-2,0}} \right\}^2} \int e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \overline{\chi^{n-2,0}} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x\,,$$

$$\sigma_{(n-2)} = - \frac{\overline{\chi^{n-3,0}_{n-2)n-1}}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x}}{\left\{ \overline{\chi^{n-2,0}} \right\}^2} \int e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \overline{\chi^{n-2,0}} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x\,,$$

$$\sigma_{(n-3)} = - \frac{\overline{\chi^{n-3,0}_{n-3)n-1}}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x}}{\left\{ \overline{\chi^{n-2,0}} \right\}^2} \int e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \overline{\chi^{n-2,0}} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x\,,$$

ecc.

di maniera che ricaveremo dalla formula (33)

$$
(72)\qquad y = y_{n-1}\int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x}}{\left\{ \chi^{\overline{n-2,0}} \right\}^2} \mathrm{d}x \int \chi^{\overline{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x ,
$$

$$
- y_{n-2}\int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}_{n-2)n-1}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x}}{\left\{ \chi^{\overline{n-2,0}} \right\}^2} \mathrm{d}x \int \chi^{\overline{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x ,
$$

$$
- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
$$

$$
- y_1 \int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}_{1)n-1}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x}}{\left\{ \chi^{\overline{n-2,0}} \right\}^2} \mathrm{d}x \int \chi^{\overline{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x ,
$$

oppure (67)

$$
(73)\qquad - y = y_{n-1}\int D_{y^{(n-2)}_{n-1}} \left\{ \frac{1}{\chi^{\overline{n-2,0}}} \right\} \cdot e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \int \chi^{\overline{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x ,
$$

$$
+ y_{n-2}\int D_{y^{(n-2)}_{n-2}} \left\{ \frac{1}{\chi^{\overline{n-2,0}}} \right\} \cdot e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \int \chi^{\overline{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x ,
$$

$$
- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
$$

$$
+ y_1 \int D_{y^{(n-2)}_1} \left\{ \frac{1}{\chi^{\overline{n-2,0}}} \right\} \cdot e^{-\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x \int \chi^{\overline{n-2,0}}\, e^{\int \frac{A_1}{A_0} \mathrm{d}x} \frac{X}{A_0} \mathrm{d}x .
$$

Nel caso di $X = 0$ troviamo quindi (72), detta c una costante arbitraria,

$$(74)\quad \frac{y}{c} = y_{n-1}\int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx}}{\left\{\chi^{\overline{n-2,0}}\right\}^2} dx - y_{n-2}\int \frac{\chi^{\overline{n-3,0}}_{n-2)n-1}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx}}{\left\{\chi^{\overline{n-2,0}}\right\}^2} dx - \ldots$$

$$\ldots \ldots - y_1 \int \frac{\chi^{\overline{n-2,0}}_{1)n-1}\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx}}{\left\{\chi^{\overline{n-2,0}}\right\}^2} dx,$$

oppure (73)

$$(75)$$

$$\frac{y}{c} = y_{n-1}\int D_{y_{n-1}}^{(n-2)}\left\{\frac{1}{\chi^{\overline{n-2,0}}}\right\}\cdot e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx} dx + \cdots + y_1 \int D_{y_1}^{(n-2)}\left\{\frac{1}{\chi^{\overline{n-2,0}}}\right\}\cdot e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx} dx .$$

Quest' ultima formula è stata recentemente proposta dal prof. Malmsten di Upsal (*Dublin and Cambridge Mathematical Journal*), e dimostrata dal prof. Tardy (Tortolini, *Annali di scienze matematiche e fisiche, aprile* 1850), come venne dapprima accennato.

§ VI.

Espressione generale delle successive derivate della variabile dipendente.

Avendosi per le formule (61) (63)

$$(76)\qquad \frac{\varphi_{p,m}}{\eta_1} = -\frac{\chi^{p)m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\chi^{\overline{m-1,0}}},$$

si rileva ad evidenza che questa funzione è simmetrica rapporto ad y_1, $y_2 \ldots\ldots$ y_{m-1}, come si è già provato nel § II, attesochè ambedue le funzioni alternanti

$\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}$, $\chi^{\overline{m-1,0}}$ mutano di segno senza cangiar di valore per qualunque alternazione di due degli indici inferiori $m-1$, $m-2$, ... 2, 1.

Possiamo ora dimostrare una proposizione più generale di quella che si è stabilita nel § II riguardo alle formule (25) (31). Infatti avendo già denotato con $\varphi_{p,(q)}$ $\eta_{1,(q)}$ le quantità corrispondenti a $\varphi_{p,m}$ η_1 allorchè nella serie dei valori elementari successivi y_1, y_2, ... y_{m-1}, y_m si attribuisce l'ultimo posto ad y_q, troviamo (76) denotando con $\left\{\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}\right\}_{r)m}$ il risultato della sostituzione dell' indice m all' indice inferiore r nella funzione $\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}$, attesa la proprietà dell' alternante $\chi^{\overline{m-1,0}}$ di mutar di segno per l' alternazione di due indici inferiori m, r,

$$y_m^{(q)}\frac{\varphi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}}+y_{m-1}^{(q)}\frac{\varphi_{p,(m-1)}}{\eta_{1,(m-1)}}+\dots\dots+\frac{y_1^{(q)}\varphi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}}=$$

$$-\frac{y_m^{(q)}\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}-y_{m-1}^{(q)}\left\{\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}\right\}_{m-1)m}-y_{m-2}^{(q)}\left\{\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}\right\}_{m-2)m}\dots\dots-y_1^{(q)}\left\{\chi_{\overline{m-1,1}}^{p)m-1}\right\}_{1)m}}{\chi^{\overline{m-1,0}}},$$

e nel caso di $p=m-1$

$$y_m^{(q)}\frac{\varphi_{m-1,(m)}}{\eta_{1,(m)}}+y_{m-1}^{(q)}\frac{\varphi_{m-1,(m-1)}}{\eta_{1,(m-1)}}+\dots\dots+y_1^{(q)}\frac{\varphi_{m-1,(1)}}{\eta_{1,(1)}}=$$

$$\frac{y_m^{(q)}\chi^{\overline{m-2,0}}-y_{m-1}^{(q)}\chi_{m-1)m}^{\overline{m-2,0}}-y_{m-2}^{(q)}\chi_{m-2)m}^{\overline{m-2,0}}-\dots\dots-y_1^{(q)}\chi_{1)m}^{\overline{m-2,0}}}{\chi^{\overline{m-1,0}}}.$$

Ora è facile comprendere che il numeratore della 1.ª di queste due espressioni si riduce a $-\chi^{\overline{m-1,0}}$ per $q=p$, e va a zero per ogni altro valore di q inferiore ad m; è poi evidente (49) che il numeratore della 2.ª espressione diviene $\chi^{\overline{m-1,0}}$ per $q=p=m-1$, e si annulla per ogni altro valore 0, 1, 2, ... $m-2$ di q. Pertanto la funzione

$$(77)\qquad y_m^{(q)}\frac{\varphi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}}+y_{m-1}^{(q)}\frac{\varphi_{p,(m-1)}}{\eta_{1,(m-1)}}+\dots\dots+y_1^{(q)}\frac{\varphi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}},$$

equivale all'unità per $q = p$, e va a zero per ogni altro valore di q inferiore ad m, e in conseguenza moltiplicando rispettivamente per $y_m^{(p)}$, $y_{m-1}^{(p)}$, $\cdots$ $y_1^{(p)}$, e sommando le equazioni, che si desumono dalla (29) divisa per η_1 col porvi $\varphi_{p,(q)}$, $\eta_{1,(q)}$, in luogo di $\varphi_{p,m}$, η_1, e col dare a q i valori m, $m-1$, $m-2 \cdots\cdots 1$, si otterrà

$$(78) \qquad y^{(p)} = y_m^{(p)} \int \vartheta_{(m)} \, \mathrm{d}\, x + y_{m-1}^{(p)} \int \vartheta_{(m-1)} \, \mathrm{d}\, x + \cdots\cdots + y_1^{(p)} \int \vartheta_{(1)} \, \mathrm{d}\, x \,,$$

cioè per $m = n - 1$

$$(79) \qquad y^{(p)} = y_{n-1}^{(p)} \int \sigma_{(n-1)} \, \mathrm{d}\, x + y_{n-2}^{(p)} \int \sigma_{(n-2)} \, \mathrm{d}\, x + \cdots\cdots + y_1^{(p)} \int \sigma_{(1)} \, \mathrm{d}\, x \,,$$

e per $m = n$

$$(80) \qquad y^{(p)} = y_n^{(p)} \int \tau_{(n)} \, \mathrm{d}\, x + y_{n-1}^{(p)} \int \tau_{(n-1)} \, \mathrm{d}\, x + \cdots\cdots + y_1^{(p)} \int \tau_{(1)} \, \mathrm{d}\, x \,;$$

cosicchè le formule (26) (32) (33) e quindi anco le (66) (69) (72) (74) hanno luogo del pari, se alle primitive y, y_1, y_2, ecc. si sostituiscono le rispettive derivate d' un medesimo ordine p, purchè i valori 1, 2, 3, ecc. di p non eccedano $m - 1$ nella (78), $n - 2$ nelle (72) (74) (79), ed $n - 1$ nelle (66) (69) (80).

Se poi si voglia conseguire le espressioni d' ogni derivata di y superiore all' ordine $n - 1$ per mezzo degli n valori elementari y_1, y_2, $\cdots\cdots$ y_n, ovvero d'ogni derivata di y d'un ordine superiore ad $n - 2$ in funzione di $n - 1$ valori elementari di y, assumiamo in primo luogo

$$(81) \qquad y^{(n+r)} = \sum_{q=1}^{q=n+1} y_q^{(n+r)} \int \tau_{(q)} \mathrm{d}x + Q_0 \mathrm{D}^r \frac{X}{A_0} + Q_1 \mathrm{D}^{r-1} \frac{X}{A_0} + Q_2 \mathrm{D}^{r-2} \frac{X}{A_0} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + Q_{r-1} \mathrm{D} \frac{X}{A_0} + Q_r \frac{X}{A_0} \,,$$

e poichè derivando r volte la proposta equazione (1) divisa per A_0, e supponendo

$$(82)\quad M_1 = \frac{A_1}{A_0},$$

$$M_2 = \frac{A_2}{A_0} + r\,\mathrm{D}\,\frac{A_1}{A_0},$$

$$M_3 = \frac{A_3}{A_0} + r\,\mathrm{D}\,\frac{A_2}{A_0} + \frac{r(r-1)}{2}\,\mathrm{D}^2\,\frac{A_1}{A_0},$$

. . . .

$$M_n = \frac{A_n}{A_0} + r\,\mathrm{D}\,\frac{A_{n-1}}{A_0} + \frac{r(r-1)}{2}\,\mathrm{D}^2\,\frac{A_{n-2}}{A_0} + \cdots\cdots$$

$$M_{n+1} = r\,\mathrm{D}\,\frac{A_n}{A_0} + \frac{r(r-1)}{2}\,\mathrm{D}^2\,\frac{A_{n-1}}{A_0} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2\cdot 3}\,\mathrm{D}^3\,\frac{A_{n-2}}{A_0} + \text{etc.}$$

. . . .

$$M_{n+r} = \mathrm{D}^r\,\frac{A_n}{A_0},$$

si ha l' equazione

$$y^{(n+r)} + M_1\,y^{(n+r-1)} + M_2\,y^{(n+r-2)} + \cdots\cdots + M_{n+r}\,y = \mathrm{D}^r\,\frac{X}{A_0},$$

tuttora soddisfatta nell' ipotesi di $X=0$ da $y=y_1$, $y=y_2\cdots\cdot y=y_n$; si renderà manifesto dal moltiplicare per 1, M_1, M_2, ecc. e sommare le equazioni successive che risultano dalla formula (81) e dalla (80), scrivendo nell' una dopo r i numeri inferiori, compreso lo zero, e nell' altra in luogo di p i numeri $n-1$, $n-2$, $\cdots\cdot 2$, 1, 0, che Q_0, Q_1, $Q_2\cdots\cdot Q_r$ vengono determinate dalle eguaglianze

$$(83)\quad Q_0 = 1,$$

$$Q_1 + M_1 = 0,$$

$$Q_2 + M_1\,Q_1 + M_2 = 0,$$

$$Q_3 + M_1\,Q_2 + M_2\,Q_1 + M_3 = 0,$$

. . . .

$$Q_r + M_1\,Q_{r-1} + M_2\,Q_{r-2} + \cdots\cdots + M_{r-1}\,Q_1 + M_r = 0.$$

Introdotti nella (81) i valori di Q_0, Q_1, Q_2, $\cdots\cdots Q_r$ (83) espressi per mezzo di M_1, M_2, $\cdots\cdots M_r$ (82), si avrà la richiesta espressione della derivata di y superiore all' ordine $n-1$.

Per avere l' espressione di questa derivata in funzione di $n-1$ valori elementari y_1, y_2, $\cdots\cdots y_{n-1}$, osserveremo primieramente che dalla replicata derivazione della formula (79) risulta

$$(84)\qquad y^{(p)}_{n-1}\,\sigma_{(n-1)} + y^{(p)}_{n-2}\,\sigma_{(n-2)} + \cdots\cdots + y^{(p)}_{1}\,\sigma_{(1)} = 0\,,$$

pe' valori 0, 1, 2, $\cdots\cdots n-3$ di p. Poniamo quindi

$$(85)\qquad y^{(n+r)} = \sum_{q=1}^{q=n} y^{(n+r)}_q \int \sigma_{(q)}\, dx + D^r \frac{X}{A_0} + Q_1\, D^{r-1} \frac{X}{A_0} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ Q_r \frac{X}{A_0} + Q_{r+1} \sum_{q=1}^{q=n} y^{(n-2)}_q\, \sigma_{(q)}\,,$$

e sommiamo insieme, dopo di averle moltiplicate rispettivamente per 1, M_1, M_2 ecc., le equazioni che si deducono dalla (85) scrivendo dopo di r i numeri inferiori ed anco 0, poscia l' equazione

$$y^{(n-1)} = \sum_{q=1}^{q=n} y^{(n-1)}_p \int \sigma_{(p)}\, dx + \sum_{p=1}^{p=n} y^{(n-2)}_p\, \sigma_{(p)}\,,$$

che si ottiene dal derivare l' equazione (79) nel caso di $p=n-2$, ed infine le eguaglianze desunte dalla (79) col porvi in luogo di p i suoi valori $n-2$, $n-3$, $\cdots\cdots 1$, 0. Arriveremo evidentemente a determinare Q_1, $Q_2 \cdots\cdots Q_{r+1}$ colle stesse equazioni (83).

Conviene avvertire che la formula (85) ha luogo anco per $r=-1$ e si riduce allora alla espressione di $y^{(n-1)}$ testè indicata.

§ VII.

Applicazione di alcune formule ottenute negli Articoli precedenti alle equazioni lineari co' coefficienti costanti.

Supponiamo nell'equazione (1) A_1, A_2, $\cdots\cdots A_n$ costanti ed $A_0 = 1$, e riguardiamo primieramente come diseguali le radici a_1, a_2, $\cdots\cdots a_n$ dell'equazione algebrica che ha gli stessi coefficienti della proposta

$$F(a) = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1} a + A_n = 0 . \tag{86}$$

Abbiamo allora

$$y_1 = e^{a_1 x}, \quad y_2 = e^{a_2 x}, \quad \cdots\cdots y_n = e^{a_n x};$$

e siccome in questo caso risulta (53)

$$\frac{\overline{\chi^{n-2,0}}}{\overline{\chi^{n-1,0}}} = \frac{e^{-a_n x}}{(a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots\cdots(a_n - a_{n-1})} = \frac{e^{-a_n x}}{F'(a_n)},$$

troveremo (66) la nota formula

$$y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{e^{a_q x} \int e^{-a_q x} X \, \mathrm{d}x}{F'(a_q)} . \tag{87}$$

Le derivate di y d'un ordine p inferiore ad n verranno espresse (80) da

$$y^{(p)} = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^p \, e^{a_q x} \int e^{-a_q x} X \, \mathrm{d}x}{F'(a_q)} , \tag{88}$$

ed ogni altra derivata di y avrà (84) per espressione generale

$$y^{(n+r)} = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{n+r} \, e^{a_q x} \int e^{-a_q x} X \, \mathrm{d}x}{F'(a_q)} + \sum_{p=0}^{p=r+1} Q_p \, \mathrm{D}^{r-p} X , \tag{89}$$

essendo le quantità Q_0, Q_1, ... Q_r determinate (82) (83) dalle equazioni

$$(90) \qquad Q_0 = 1\,, \quad Q_1 + A_1 = 0\,, \quad Q_2 + A_1 Q_1 + A_2 = 0\,,$$
$$Q_3 + A_1 Q_2 + A_2 Q_1 + A_3 = 0\,, \quad \text{ecc.}$$

È facile verificare che la derivata d' una qualunque delle formule spettanti a' due sistemi (88) (89) coincide coll' equazione susseguente, come pure che la 1.ª equazione del sistema (88) procede dalla derivazione della (87), attesochè dallo spezzamento della frazione $\frac{1}{F(u)}$ avendosi

$$\frac{1}{F(u)} = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{1}{F'(a_q)\,(u - a_q)}\,,$$

ovvero

$$\frac{1}{u^{n-1}\left(1 - \frac{a_1}{u}\right)\left(1 - \frac{a_2}{u}\right)\cdots\cdots\left(1 - \frac{a_n}{u}\right)} = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{1}{F'(a_q)\left(1 - \frac{a_q}{u}\right)}\,,$$

ricaviamo mercè lo sviluppo in serie secondo le potenze di $\frac{1}{u}$, avuto riguardo alle relazioni (90),

$$\frac{1}{u^{n-1}} + \frac{Q_1}{u^n} + \frac{Q_2}{u^{n+1}} + \cdots\cdots + \frac{Q_r}{u^{n+r-1}} + \text{ecc.} =$$
$$\sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{1}{F'(a_q)} \left\{ 1 + \frac{a_q}{u} + \frac{a_q^2}{u^2} + \cdots\cdots + \frac{a_q^{n+r-1}}{u^{n+r-1}} + \text{ecc.} \right\},$$

e dal confronto de' gruppi affetti dalle eguali potenze di $\frac{1}{u}$ raccogliamo le identità

$$(91) \qquad \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{1}{F'(a_q)} = 0\,, \quad \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q}{F'(a_q)} = 0\,, \cdots\cdots \quad \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{n-2}}{F'(a_q)} = 0\,,$$
$$\sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{n+r-1}}{F'(a_q)} = Q_r\,.$$

Le formule (87) (88) (89) si possono svolgere nel modo seguente

$$(92)\qquad y = \frac{e^{a_n x}\int e^{-a_n x} X\,dx}{F'(a_n)} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{e^{a_q x}\int e^{-a_q x} X\,dx}{F'(a_q)}$$

$$y^{(p)} = \frac{a_n^p\, e^{a_n x}\int e^{-a_n x} X\,dx}{F'(a_n)} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q^p\, e^{a_q x}\int e^{-a_q x} X\,dx}{F'(a_q)}$$

$$y^{(n+r)} = \frac{a_n^{n+r}\, e^{a_n x}\int e^{-a_n x} X\,dx}{F'(a_n)} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q^{n+r}\, e^{a_q x}\int e^{-a_q x} X\,dx}{F'(a_q)} + \sum_{p=}^{p=r+1} Q_p\, D^{r-p} X.$$

Postovi $a_n = - A_1 - (a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1})$, ne abbiamo le espressioni di y, $y^{(p)} \cdots y^{(n+r)}$ che risultano dalle formule (72) (79) (85). Infatti da quest' ultime a cagione (53) dell'eguaglianza

$$\frac{\chi^{\overline{n-3,0}}}{\chi^{\overline{n-2,0}}} = \frac{e^{-a_{n-1}x}}{(a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_2)\cdots\cdots(a_{n-1} - a_{n-2})} = \frac{(a_{n-1} - a_n)\, e^{-a_{n-1}x}}{F'(a_{n-1})}$$

si ricava

$$y = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q - a_n}{F'(a_q)}\, e^{a_q x}\int e^{(a_n - a_q)x}\,dx \int e^{-a_n x} X\,dx$$

$$y^{(p)} = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q - a_n}{F'(a_q)}\, a_q^p\, e^{a_q x}\int e^{(a_n - a_q)x}\,dx \int e^{-a_n x} X\,dx$$

$$y^{(n+r)} = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q - a_n}{F'(a_q)} \left\{ e^{a_q x}\, a_q^{n+r}\int e^{(a_n - a_q)x}\,dx \int e^{-a_n x} X\,dx + Q_{r+1}\, e^{a_n x}\, a_q^{n-2}\int e^{-a_n x} X\,dx \right\}$$

$$+ \sum_{p=0}^{p=r+1} Q_p\, D^{r-p} X$$

coll'avvertenza che nella 2ª. di queste formule p non eccede $n-2$, e che la 3ª. sussiste anco per $r=-1$.

Ora avendosi dall'integrazione per parti

$$e^{a_q x}\int e^{(a_n-a_q)x}dx\int e^{-a_n x}Xdx=\frac{e^{a_n x}\int e^{-a_n x}Xdx-e^{a_q x}\int e^{-a_q x}Xdx}{a_n-a_q}$$

e dalle identità (91), pe' valori $0, 1, 2, \cdots n-2$ di p,

$$\sum_{q=1}^{q=n}\frac{a_q^p}{F'(a_q)}=-\frac{a_n^p}{F'(a_n)}, \qquad \text{inoltre}$$

$$\sum_{q=1}^{q=n}\frac{a_q^{n-1}}{F'(a_q)}=1-\frac{a_n^{n-1}}{F'(a_n)}, \qquad \sum_{q=1}^{q=n}\frac{a_q^{n+r}}{F'(a_q)}=Q_{r+1}-\frac{a_n^{n+r}}{F'(a_n)};$$

rendesi perciò manifesta la coincidenza delle tre formule dianzi desunte dalle (72) (79) (85) colle espressioni (92).

Nel caso in cui l'equazione algebrica (86) abbia m radici eguali ad a_1, altrettanti valori elementari di y vengono espressi dalle note formule

$$y_1=e^{a_1 x}, \quad y_2=e^{a_1 x}x, \quad y_3=e^{a_1 x}x^2 \cdots\cdots y_m=e^{a_1 x}x^{m-1}.$$

Infatti, pel teorema di Hudde riguardante le equazioni algebriche dotate di m radici fra loro eguali, abbiamo in simil caso le equazioni identiche

$$F(a_1)=0; \quad F'(a_1)=0; \quad F''(a_1)=0; \quad \cdots\cdots F^{(m-1)}(a_1)=0$$

Ora, introdotto nelle formule (5), a partire dall'ultima, il valore $y_1=e^{a_1 x}$, che evidentemente soddisfa all'equazione (2), troviamo

$$B_{n-1}=F'(a)e^{a_1 x}=0, \quad B_{n-2}=\tfrac{1}{2}F''(a_1)e^{a_1 x}=0, \cdots B_{n-m+1}=\frac{F^{(m-1)}(a_1)e^{a_1 x}}{2.3\ldots\ldots(m-1)}=0;$$

di maniera che l'equazione (4) perde i termini affetti da $\beta, \beta', \beta'' \cdots \beta^{(m-2)}$, e quindi ha per $m-1$ valori elementari

$$\beta_1 = 1 \; ; \quad \beta_2 = 2x \; ; \quad \beta_3 = 3x^2 \cdots\cdots \beta_{m-1} = (m-1)x^{m-2}$$

Questi valori sostituiti nelle formule (8) ci danno ad evidenza le predette espressioni di y_1, y_2, $\cdots\cdot y_m$.

Ciò posto, onde applicare agevolmente le formule (45) al caso di più gruppi di radici eguali spettanti alla equazione (86) conviene disporre i valori elementari di y (9) in guisa che si succedano in ordine ascendente tutti quelli che corrispondono ad uno stesso gruppo di radici eguali, vale a dire che vengono espressi dalla medesima esponenziale moltiplicata per le successive potenze 0, 1, 2 ecc. della x. Denotiamo rispettivamente con n_1, n_2, $\ldots . n_r$ il numero delle radici eguali ad a_1, $a_2 \cdots\cdot a_r$, cosicchè sia $n_1 + n_2 + \cdots$ $\cdots + n_r = n$. Rappresentiamo inoltre con $\tau_{(n_q),q}$ il valore (12) di τ, ossia di $\tau_{(n)}$ allorchè nella serie (9) de' valori elementari di y ordinati nel modo testè indicato si attribuisce l'ultimo posto ad $e^{a_q x} x^{n_q - 1}$ e sieno $\tau_{(n_q - 1),q}$; $\tau_{(n_q - 2),q} \cdots$ $\tau_{(1),q}$ le quantità corrispondenti a τ, allorchè si colloca rispettivamente nell'ultimo posto

$$e^{a_q x} x^{n_q - 2}, \quad e^{a_q x} x^{n_q - 3}, \quad \cdots\cdots e^{a_q x} x \; ; \; e^{a_q x}.$$

Per conseguire i valori di $\tau_{(n_q - 1),q}$; $\tau_{(n_q - 2),q}$; $\cdots\cdot \tau_{(1),q}$ dopo di aver ottenuto quello di $\tau_{(n_q),q}$ basterà impiegare un numero $n_q - 1$ delle successive equazioni (45). Eseguita simile ricerca per ciascuno de' valori 1, 2, $\cdots\cdots r$ dell'indice q, avremo dalla (26)

$$y = \sum_{p=1}^{p=n_1+1} e^{a_1 x} x^{n_1 - p} \int \tau_{(n_1 - p + 1),1} \, dx + \sum_{p=1}^{p=n_2+1} e^{a_2 x} x^{n_2 - p} \int \tau_{(n_2 - p + 1),2} \, dx + \cdots\cdot$$

$$+ \sum_{p=1}^{p=n_r+1} e^{a_r x} x^{n_r - p} \int \tau_{(n_r - p + 1),r} \, dx \, ,$$

ovvero per brevità di notazione

$$(93) \qquad y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} e^{a_q x} x^{n_q - p} \int \tau_{(n_q - p + 1), q} dx .$$

Data a cagion d'esempio l'equazione a coefficienti costanti del 5° ordine

$$y''''' + A_1 y'''' + A_2 y''' + A_3 y'' + A_4 y' + A_5 y = X ,$$

supponiamo che l'equazione ausiliaria algebrica (86) abbia tre radici eguali ad a_1, e le due rimanenti eguali ad a_2. Dalla prima disposizione de' valori elementari di y dedurremo facilmente (9)

$$y_1 = e^{a_1 x} , \quad y_2 = e^{a_1 x} x ; \quad y_3 = e^{a_1 x} x^2 , \quad y_4 = e^{a_2 x} , \quad y_5 = e^{a_2 x} x ;$$

$$\beta_1 = 1 , \quad \beta_2 = 2x , \quad \beta_3 = (a_n - a_1) e^{(a_2 - a_1) x} , \quad \beta_4 = \left\{ 1 + (a_2 - a_1) x \right\} e^{(a_2 - a_1) x} ;$$

$$\gamma_1 = 2 , \quad \gamma_2 = (a_2 - a_1)^2 e^{(a_2 - a_1) x} , \quad \gamma_3 = \left\{ 2 (a_2 - a_1) + (a_2 - a_1)^2 x \right\} e^{(a_2 - a_1) x} ;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (a_2 - a_1)^3 e^{(a_2 - a_1) x} , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left\{ 3 (a_2 - a_1)^2 + (a_2 - a_1)^3 x \right\} e^{(a_2 - a_1) x} ;$$

$$\sigma_1 = 1 ;$$

e quindi (12) (45)

$$\tau_{(2), 2} = \frac{X e^{-a_2 x}}{(a_2 - a_1)^3} , \quad \tau_{(1), 2} = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tau_{(2), 2} = - \left\{ \frac{3 + (a_2 - a_1) x}{(a_2 - a_1)^4} \right\} X e^{-a_2 x} .$$

Poscia dall'altra disposizione nella quale l'ultimo posto viene occupato da $e^{a_1 x} x^2$ avremo

$$y_1 = e^{a_2 x} , \quad y_2 = e^{a_2 x} x , \quad y_3 = e^{a_1 x} , \quad y_4 = e^{a_1 x} x , \quad y_5 = e^{a_1 x} x^2 ;$$

$$\beta_1 = 1 , \quad \beta_2 = (a_1 - a_2) e^{(a_1 - a_2) x} , \quad \beta_3 = \left\{ 1 + (a_1 - a_2) x \right\} e^{(a_1 - a_2) x} ;$$

$$\beta_4 = \left\{ 2x + (a_1 - a_2) x^2 \right\} e^{(a_1 - a_2) x} ;$$

$$\gamma_1 = (a_1 - a_2)\, e^{2(a_1 - a_2)x} \ , \quad \gamma_2 = \left\{ 2(a_1 - a_2) + (a_1 - a_2)^2 x \right\} e^{(a_1 - a_2)x} \ ,$$

$$\gamma_3 = \left\{ 2 + 4(a_1 - a_2)x + (a_1 - a_2)^2 x^2 \right\} e^{(a_1 - a_2)x} \ ;$$

$$\varepsilon_1 = 1 \ , \quad \varepsilon_2 = \frac{4 + 2(a_1 - a_2)x}{a_1 - a_2} \ ;$$

$$\sigma_1 = 2 \ ;$$

e conseguentemente

$$\tau_{(3),1} = \frac{1}{2} \frac{X e^{-a_1 x}}{(a_1 - a_2)^2} \ , \quad \tau_{(2),1} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tau_{(3),1} = -\left\{ \frac{2 + (a_1 - a_2)x}{(a_1 - a_2)^3} \right\} X e^{-a_1 x}$$

$$\tau_{(1),1} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\tau_{(2),1} - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\tau_{(3),1} = \left\{ \frac{3 + 2(a_1 - a_2)x + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2 x^2}{(a_1 - a_2)^4} \right\} X e^{-a_1 x}$$

Indi la formula (93) ci darà l'integrale completo richiesto

$$y = e^{a_1 x} x^2 \int \tau_{(3),1} dx + e^{a_1 x} x \int \tau_{(2),1} dx + e^{a_1} \int \tau_{(1),1} dx + e^{a_2 x} x \int \tau_{(2),2} dx + e^{a_2 x} \int \tau_{(1),2} dx \ .$$

Giova avvertire che si avrebbe potuto, adoprando tutte le eguaglianze (45), calcolare, mercè una sola disposizione de' valori elementari di y, tutte le quantità $\tau_{(5)}$, $\tau_{(4)}$, $\cdots\cdots \tau_{(1)}$ che entrano nell' espressione (26) dell' integrale completo che si ricerca.

Ottenuto lo sviluppo finale dell' espressione di y , per avere, anco nel caso in cui l'equazione algebrica corrispondente alla proposta equazione lineare sia dotata di radici eguali, l'espressione di qualsivoglia derivata di y d' un ordine p inferiore ad n, basterà (80) sostituire nella (93) a' valori elementari di y, che moltiplicano gl' integrali, le rispettive loro derivate dell' ordine p. Se poi si voglia la derivata di y d' un ordine $n+r$ non minore di n, converrà inoltre (81) aggiungere al risultato d' una simile sostituzione la formula rappresentabile con $\sum_{p=0}^{p=r+1} Q_p \, D^{p-r} X$.

§ VIII.

Appendice sul modo di sviluppare l'integrale completo d'una equazione lineare a coefficienti costanti, allorchè l'equazione algebrica corrispondente sia dotata d'uno o di più gruppi di radici eguali.

Dal processo di calcolo poc' anzi istituito nell' applicazione delle relazioni (9) (45) si può comprendere, che l'espressione generale di $\tau_{(n_q-p+1),\,q}$ nella (93) equivale al prodotto di $Xe^{-a_q x}$ per una funzione di x intera e razionale del grado $p-1$. Il metodo che sono per esporre onde sviluppare l'integrale completo d'una equazione lineare a coefficienti costanti, nel caso di alcune radici eguali, servirà a confermare questa osservazione, ed a render più semplice l'applicazione delle relazioni (45) allo sviluppo dell'integrale medesimo.

Allorchè l'equazione algebrica (86) si suppone dotata d'un numero n di radici eguali ad a_1, di n_2 radici eguali ad a_2 ecc., in fine di n_r radici eguali ad a_r, la formula di Eulero riferita alla fine del § IV, che rappresenta l'integrale completo d'un'equazione lineare dell'ordine n a coefficienti costanti, diviene

(94)

$$y = e^{a_1 x}\int^{n_1} e^{(a_2-a_1)x}\,dx^{n_1}\int^{n_2} e^{(a_3-a_2)x}\,dx^{n_2}\int\cdots\int^{n_{r-1}} e^{(a_r-a_{r-1})x}\,dx^{r-1}\int^{n_r} e^{-a_r x}X\,dx^{n_r}.$$

Pongasi

$$e^{a_r x}\int^{n_r} e^{-a_r x}X\,dx^{n_r} = Z$$

e la formula

$$y = e^{a_1 x}\int^{n_1} e^{(a_2-a_1)x}\,dx^{n_1}\int^{n_2} e^{(a_3-a_2)x}\,dx^{n_2}\int\cdots\int^{n_{r-1}} e^{-a_{r-1}x}Z\,dx^{n_{r-1}}$$

rappresenterà del pari l'integrale completo della seguente equazione lineare a coefficienti costanti dell'ordine $n-n_r$

$$y^{(n-n)_r} + K_{1,r}\, y^{(n-n_r-1)} + K_{2,r}\, y^{(n-n_r-1)} + \cdots\cdots + K_{n-n_r,r}\, y = Z,$$

a cui corrisponde l'equazione algebrica

$$a^{n-n_r} + K_{1,r}\, a^{n-n_r-1} + K_{2,r}\, a^{n-n_r-2} + \cdots\cdots + K_{n-n_r,r} = 0$$

evidentemente dotata delle stesse radici dell'equazione (86), escluse le n_r radici eguali ad a_r. Volendo conoscere le espressioni di $K_{1,r}$, $K_{2,r}$ ecc. per mezzo di a_r e de' coefficienti A_1, A_2, ecc. dell'equazione proposta (1) stabiliremo l'eguaglianza

$$a^{n-n_r} + K_{1,r}\, a^{n-n_r-1} + K_{2,r}\, a^{n-n_r-2} + \cdots\cdots + K_{n-n_r,r} = \frac{F(a)}{(a-a_r)^{n_r}} =$$

$$\left\{a^n + A_1\, a^{n-1} + A_2\, a^{n-2} + \cdots + A_n\right\}\left\{a^{-n_r} + n_r\, a_r\, a^{-n_r-1} + \frac{n_r(n_r+1)}{2} a_r^2\, a^{-n_r-2} + \text{ec.}\right\}$$

e quindi ricaveremo da' confronti

$$(95) \qquad K_{1,r} = A_1 + n_r a_r,$$

$$K_{2,r} = A_2 + n_r A_1 a_r + \frac{n_r(n_r+1)}{2} a_r^2,$$

$$K_{3,r} = A_3 + n_r A_2 a_r + \frac{n_r(n_r+1)}{2} A_1 a_r^2 + \frac{n_r(n_r+1)(n_r+2)}{2.3} a_r^3,$$

. . . .

$$K_{n-n_r,r} = A_{n-n_r} + n_r A_{n-n_r-1} a_r + \frac{n_r(n_r+1)}{2} A_{n-n_r-2}\, a_r^2 + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{n_r(n_r+1)\cdots\cdots(n-1)}{2.3\ldots\ldots(n-n_r)} a_r^{n-n_r}.$$

Conseguentemente l'equazione

$$(96) \qquad y^{(n-n_r)} + K_{1,r}\, y^{(n-n_r-1)} + K_{2,r}\, y^{(n-n_r-2)} + \cdots + K_{n-n_r}\, y = e^{a_r x} \int^{n_r} e^{-a_r x} X dx^{n_r}$$

sarà un integrale $(n_r)^{esimo}$ della proposta equazione a coefficienti costanti dell'ordine n (1), e coinciderà colla (58) ovvero colla (29), allorchè si ponga $m = n - n_r + 1$.

Derivando l'equazione (96) un numero $n_r - 1$ di volte avremo colla (96) un numero n_r di equazioni lineari contenenti le successive derivate di y fino alla $(n-1)^{esima}$ inclusivamente. Immaginiamo di aver similmente dedotto e derivato le equazioni analoghe alla (96) che risultano dal sostituire all'indice r i numeri inferiori $r-1$, $r-2$, $\cdots\cdots$ 2, 1, ed avremo in tutto un numero $n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_r = n$ di equazioni di primo grado non solo rapporto ad y, y', $y'' \cdots\cdots y^{(n-1)}$, ma ancora relativamente agl'integrali che si contengono ne' secondi membri di dette equazioni, e che vengono rappresentati dalla formula $e^{a_q x}\int^p e^{-a_q x} X dx^p$, in cui p è suscettibile de' valori 1, 2, 3 $\cdots\cdots n_q$, mentre q assume i valori successivi 1, 2, 3 $\cdots\cdots r$. Pertanto se dalle accennate n equazioni ben distinte l'una dall'altra, ed insieme esistenti, supponiamo dedotte le quantità y, y', y'', $\cdots\cdots y^{(n-1)}$ troveremo in generale che il valore di $y^{(m)}$ per $m < n$ viene rappresentato dalla doppia somma

$$(97) \qquad y^{(m)} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \overset{\overline{m}}{L}_{p,q} e^{a_q x} \int^p e^{-a_q x} X d x^p$$

denotandosi con $\overset{\overline{m}}{L}_{p,q}$ n costanti da determinarsi.

Avremo parimenti

$$(98) \qquad y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} L_{p,q} e^{a_q x} \int^p e^{-a_q x} X d x^p .$$

Per determinare in quest'ultima formula le costanti rappresentate da $L_{p,q}$, è d'uopo osservare ch'esse non dipendono dalla forma della funzione X. Supponiamo $X = e^{ax}$, ed eseguiamo le integrazioni accennate dalle due formule (94) (98), senza mai aggiungere costante arbitraria, attesochè nell'eguagliare le due espressioni (94) (98) di y, i gruppi contenenti le n costanti arbitrarie, che rendono l'integrale completo, debbono costituire una separata equazione.

Avremo in conseguenza dall'eguagliare i risultati delle integrazioni eseguite nelle due formule (94) (98), prescindendo dalle costanti arbitrarie,

$$\frac{e^{ax}}{(a-a_1)^{n_1}(a-a_2)^{n_2}\cdots\cdots(a-a_{r-1})^{n_{r-1}}(a-a)^{n_r}} = \sum_{q=1}^{q=r+1}\sum_{p=1}^{p=n_q+1}\frac{L_{p,q}\,e^{ax}}{(a-a_q)^p}$$

ossia dividendo pel fattor comune e^{ax}

$$\frac{1}{F(a)} = \sum_{p=1}^{q=r+1}\sum_{p=1}^{p=n_q+1}\frac{L_{p,q}}{(a-a_q)^p}$$

È quindi manifesto che le n costanti $L_{p,q}$ sono i numeratori delle frazioni parziali provenienti dalla finale decomposizione della frazione $\frac{1}{F(a)}$, cosicchè per la nota teorica dello spezzamento delle frazioni troviamo

$$(99) \qquad L_{p,q} = n_q(n_q-1)(n_q-2)\cdots\cdots(n_q-p+1)\,\mathrm{D}_{a_q}^{n_q-p}\frac{1}{F^{(n_q)}(a_q)}$$

Così pure per determinare i valori delle costanti rappresentate da $\overline{L}^{m}_{p,q}$ nella espressione (97) di $y^{(m)}$, poichè non dipendono dalla forma di X, porremo come dianzi $X=e^{ax}$, e fatta astrazione da' gruppi delle costanti arbitrarie che debbono separatamente eguagliarsi, avremo dall'eguagliare la derivata $(m)^{esima}$ di y dedotta dalla formula (94) coll'espressione di $y^{(m)}$ risultante dalla formula (97)

$$\frac{a^m}{F(a)} = \sum_{q=1}^{q=r+1}\sum_{p=1}^{p=n_q+1}\frac{\overline{L}^{m}_{p,q}}{(a-a_q)^p}.$$

cosicchè $\overline{L}^{m}_{p,q}$ essendo il numeratore della frazione parziale, che ha per denominatore $(a-a_q)^{n_q}$ nella finale decomposizione di $\frac{a^m}{F(a)}$, verrà espresso dalla formula

$$L^{\overline{m}}_{p,q} = n_q (n_q - 1)(n_q - 2) \cdots\cdots (n_q - p + 1)\, D^{n_q - p}_{a_q} \frac{a^m}{F^{(n_q)}(a_q)} \tag{100}$$

la quale ha luogo non solo pe' valori di m inferiori ad n, ma altresì per qualsivoglia valore dell'indice m della derivata richiesta. Imperocchè se sommiamo insieme la proposta equazione (1) a coefficienti costanti moltiplicata per Q_i (90) colle sue derivate 1^a, 2^a, 3^a, $\cdots\cdots$ $(i)^{esima}$ rispettivamente moltiplicate per Q_{i-1}, Q_{i-2}, $\cdots\cdots$ Q_1, Q_0, abbiamo a cagione delle eguaglianze (90)

$$y^{(n+i)} + (A_1 Q_i + A_2 Q_{i-1} + \cdots)\, y^{(n-1)} + (A_2 Q_i + A_3 Q_{i-1} + \cdots)\, y^{(n-2)} + \cdots + A_n Q_i y$$

$$= D^i X + Q_1 D^{i-1} X + Q_2 D^{i-2} X + \cdots\cdots + Q_{i-1} DX + Q_i X .$$

Ma poichè le espressioni di y, y', y'', $\cdots\cdots$ $y^{(n-1)}$ hanno tutte la stessa forma (97) (98), ne verrà del pari

$$y^{(n+i)} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} L^{\overline{n+i}}_{p,q}\, e^{a_q x} \int^p e^{-a_q x} X dx^p + \sum_{p=0}^{p=i+1} Q_p D^{i-p} X \tag{101}$$

e se supponiamo come sopra $X = e^{ax}$, e prescindiamo da'gruppi delle costanti arbitrarie, dedurremo dall'eguagliare la derivata $(n+i)^{esima}$ di $y = \frac{e^{ax}}{F(a)}$ (94) coll'espressione (101) di $y^{(n+i)}$

$$\frac{a^{n+i}}{F(a)} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{L^{\overline{n+i}}_{p,q}}{(a-a_q)^{n_q}} + \sum_{p=0}^{p=i+1} Q_p\, a^{i-p}$$

che rappresenta lo spezzamento della frazione $\frac{a^{n+i}}{F(a)}$. Per conseguenza la costante $L^{\overline{n+i}}_{p,q}$ verrà pure espressa dalla formula (100), mutato m in $n+i$.

Sviluppando nella espressione (98) l'integrale d'ordine p in integrali semplici abbiamo

$$y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{p(p+1)(p+2)\ldots\ldots n_q}{1.2.3\ldots(p-1)p\ldots n_q} L_{p,q} e^{a_q x} \times$$

$$\left\{ x^{p-1}\int e^{-a_q x} X dx - (p-1)x^{p-2}\int e^{-a_q x} x X dx + \frac{(p-1)(p-2)}{2} x^{p-3}\int e^{-a_q x} x^2 X dx + \text{ecc.} \right\},$$

e se nella funzione sottoposta al doppio segno di somma attribuiamo a p i suoi valori $1, 2, 3 \ldots n_q$ raccogliendo poscia i gruppi degl' integrali affetti dalla stessa potenza di x e dalla medesima esponenziale, si otterrà agevolmente

$$(102) \quad y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{q=1}^{p=n_q+1} e^{a_q x} x^{n_q - p} \int \left\{ L_{n_q-p+1,q} - L_{n_q-p+2,q}\, x + \tfrac{1}{2} L_{n_q-p+3,q}\, x^2 - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{(-1)^{p-1} L_{n_q,q}\, x^{p-1}}{2.3\ldots\ldots(p-1)} \right\} \frac{e^{-a_q x} X dx}{2.3\ldots(n_q-p)},$$

coll'avvertenza che i coefficienti numerici $\frac{1}{2\cdot 3\cdots(p-1)}$, $\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n_q-p)}$ si riducono all'unità, il primo per $p=1$, ed il secondo per $p=n_q$, come si ravvisa dalle equazioni identiche

$$\frac{1}{2.3\ldots\ldots(p-1)} = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots n_q}{1.2.3\ldots\ldots n_q}, \quad \frac{1}{2.3\ldots\ldots(n_q-p)} = \frac{(n_q-p+1)(n_q-p+2)\ldots n_q}{1.2.3\ldots\ldots n_q}.$$

Il paragone della formula (102) colla (93) ci esibisce

$$(103) \qquad \tau_{(n_q-p+1)} = \left\{ L_{n_q-p+1,q} - L_{n_q-p+2,q}\, x + \tfrac{1}{2} L_{n_q-p+3,q}\, x^2 - \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{p-1} L_{n_q,q}\, x^{p-1}}{2.3\ldots\ldots(p-1)} \right\} \frac{e^{-a_q x} X}{2.3\ldots\ldots(n_q-p)},$$

e quindi resta provato ciò che venne asserito al principio del presente § VIII circa alla forma della funzione $\tau_{(n_q-p+1),q}$.

Ora se immaginiamo ordinati i valori elementari di y nella serie delle eguaglianze (9) in guisa che si succedano senza interruzione tutti quelli che corrispondono ad uno stesso gruppo di radici eguali, cioè che vengono espressi dalla medesima esponenziale moltiplicata per le potenze ascendenti $0, 1, 2$, ec. della x, incominciando da quelli che hanno per fattor comune l'esponenziale $e^{a_1 x}$, e proseguendo cogli altri gruppi di valori elementari corrispondenti alle radici rispettivamente eguali ad $a_2, a_3, \cdots a_r$; è manifesto che le funzioni già denotate (26) (§ II) con $\tau_{(n)}, \tau_{(n-1)}, \tau_{(n-2)}, \cdots \tau_{(1)}$ equivalgono rispettivamente (93) a $\tau_{(n_r), r}, \tau_{(n_r-1), r}, \tau_{(n_r-2), r} \cdots \tau_{(1), r}, \tau_{(n_{r-1}), r-1} \cdots \tau_{(1), 1}$. Pertanto eguagliando l'espressione (12) di τ ossia di $\tau_{(n)}$ col valore di $\tau_{(n_r), r}$ desunto dalla formula (103) si ottiene un' equazione identica, donde, ponendovi $x = 0$ e denotando con (y_1), (β_1), ecc. i valori di y_1, β_1, ecc. corrispondenti ad $x = 0$, ricaviamo

$$L_{n_r, r} = \frac{1.2.3\ldots\ldots(n_r-1)}{(y_1)(\beta_1)\cdots\cdots(\rho_1)(\sigma_1)} \tag{104}$$

Sostituendo poscia le espressioni (103) di $\tau_{(n_r), r}, \tau_{(n_r-1), r}, \cdots \tau_{(1), r}$ $\tau_{(n_{r-1}), r-1}, \tau_{(n_{r-1}-1), r-1}$, ecc. corrispondenti ad $x = 0$ nelle eguaglianze (45) in luogo di $\tau_{(n)}, \tau_{(n-1)}$, troviamo

(105)

$$-\frac{L_{n_r-1, r}}{1.2.3\ldots(n_r-2)} = \frac{(\rho_2)}{(\rho_1)} \frac{L_{n_r, r}}{1.2.3\ldots(n_r-1)}$$

$$-\frac{L_{n_r-2, r}}{1.2.3\ldots(n_r-3)} = \frac{(\pi_2)}{(\pi_1)} \frac{L_{n_r-1, r}}{1.2.3\ldots(n_r-2)} + \frac{(\pi_3)}{(\pi_1)} \frac{L_{n_r, r}}{1.2.3\ldots(n_r-1)}$$

$$-\frac{L_{n_r-3, r}}{1.2.3\ldots(n_r-4)} = \frac{(\xi_2)}{(\xi_1)} \frac{L_{n_r-2, r}}{1.2.3\ldots(n_r-3)} + \frac{(\xi_3)}{(\xi_1)} \frac{L_{n_r-1, r}}{1.2.3\ldots(n_r-2)} + \frac{(\xi_4)}{(\xi_1)} \frac{L_{n_r, r}}{1.2.3\ldots(n_r-1)}$$

. . . .

$$-\frac{L_{2, r}}{1} = \frac{(\nu_2)}{(\nu_1)} \frac{L_{3, r}}{1.2} + \frac{(\nu_3)}{(\nu_1)} \frac{L_{4, r}}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{(\nu_{n_r-1})}{(\nu_1)} \frac{L_{n_r, r}}{1.2.3\ldots(n_r-1)}$$

$$-L_{1,r}=\frac{(\mu_2)}{(\mu_1)}\frac{L_{2,r}}{1}+\frac{(\mu_3)}{(\mu_1)}\frac{L_{3,r}}{1.2}+\frac{(\mu_4)}{(\mu_1)}\frac{L_{4,r}}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{(\mu_{n_r})}{(\mu_1)}\frac{L_{n_r,r}}{1.2.3\ldots\ldots(n_r-1)}$$

$$-\frac{L_{n_{r-1},r-1}}{1.2.3\ldots(n_{r-1}-1)}=\frac{(\lambda_2)}{(\lambda_1)}L_{1,r}+\frac{(\lambda_3)}{(\lambda_1)}\frac{L_{2,r}}{1}+\frac{(\lambda_4)}{(\lambda_1)}\frac{L_{3,r}}{1.2}+\ldots+\frac{(\lambda_{n_r+1})}{(\lambda_1)}\frac{L_{n_r,r}}{1.2.3\ldots(n_r-1)}$$

$$-\frac{L_{n_{r-1}-1,r-1}}{1.2.3\ldots(n_{r-1}-2)}=\frac{(\varkappa_2)}{(\varkappa_1)}\frac{L_{n_{r-1},r-1}}{1.2.3\ldots(n_{r-1}-1)}+\frac{(\varkappa_3)}{(\varkappa_1)}L_{1,r}+\ldots+\frac{(\varkappa_{n_r+2})}{(\varkappa_1)}\frac{L_{n_r,r}}{1.2.3\ldots(n_r-1)}$$

ecc.

Invece di adoperare una sola disposizione de' valori elementari di y (9) e tutte le $(n-1)$ eguaglianze (105) onde calcolare i valori delle costanti $L_{p,q}$ comprese nello sviluppo (98) dell'integrale completo richiesto, si potrebbe rinnovare il calcolo, che serve a determinare β_1, $\beta_2 \cdots\cdots \beta_{n-1}$, γ_1, γ_2, ec., per ciascuna delle r disposizioni de' valori elementari di y in cui l'ultimo gruppo di detti valori elementari corrisponde alle radici rispettivamente eguali ad a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, $\cdots\cdots a_1$, cioè in generale alle radici eguali ad a_q, bastando allora impiegare un numero n_q-1 delle successive equazioni (105) per cadauno de' valori $1, 2, 3 \cdots\cdots r-1$, r dell'indice q. I valori delle costanti $L_{p,q}$ affette da uno stesso valore dell'indice q verranno infatti esibite (104) (105) dalle eguaglianze

$$(106)\qquad L_{n_q,q}=\frac{1.2.3\ldots\ldots(n_q-1)}{(y_1)(\beta_1)\cdots\cdots(\sigma_1)}$$

$$-L_{n_q-1,q}=\frac{(\rho_2)}{(\rho_1)}\frac{L_{n_q,q}}{n_q-1}$$

$$-L_{n_q-2,q}=\frac{(\pi_2)}{(\pi_1)}\frac{L_{n_q-1,q}}{n_q-2}+\frac{(\pi_3)}{(\pi_1)}\frac{L_{n_q,q}}{(n_q-2)(n_q-1)}$$

ecc.

Così a cagion d'esempio volendosi lo sviluppo dell' integrale completo dell' equazione di 5.° ordine proposta alla fine del § VII, nella supposizione che l'equazione algebrica corrispondente sia dotata di 3 radici eguali ad a_1, e di 2 radici eguali ad a_2, avremo dalla prima distribuzione de' valori elementari di y in cui l' ultimo posto è occupato da $e^{a_2 x} x$, mediante il calcolo di β_1, β_2, ecc. già istituito nel § VII,

$$(y_1) = 1\,, \quad (\beta_1) = 1\,, \quad (\gamma_1) = 2\,, \quad (\varepsilon_1) = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)^3\,, \quad (\varepsilon_2) = \tfrac{3}{2}(a_2 - a_1)^2\,, \quad (\sigma_1) = 1\,,$$

e quindi (106)

$$L_{2,2} = \frac{1}{(a_2 - a_1)^3}\,, \qquad L_{1,2} = -\frac{(\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1)} L_{2,2} = -\frac{3}{(a_2 - a_1)^4}\,;$$

poscia dall'altra disposizione de' valori elementari di y, per cui abbiamo (§ VII)

$$(y_1) = 1\,, \quad (\beta_1) = 1\,, \quad (\gamma_1) = (a_1 - a_2)^2\,, \quad (\gamma_2) = 2\,(a_1 - a_2)\,, \quad (\gamma_3) = 2\,,$$

$$(\varepsilon_1) = 1\,, \quad (\varepsilon_2) = \frac{4}{a_1 - a_2}\,, \quad (\sigma_1) = 2\,,$$

otterremo (106)

$$L_{3,1} = \frac{1}{(a_1 - a_2)^2}\,, \qquad L_{2,1} = -\frac{(\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1)}\,\frac{L_{3,1}}{2} = -\frac{2}{(a_1 - a_2)^3}\,,$$

$$L_{1,1} = -\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)} L_{2,1} - \frac{(\gamma_3)}{(\gamma_1)}\,\frac{L_{3,1}}{1.2} = \frac{3}{(a_1 - a_2)^4}\,,$$

e conseguentemente (98)

$$y = L_{1,1}\, e^{a_1 x} \int e^{-a_1 x} X \,\mathrm{d}x + L_{2,1}\, e^{a_1 x} \int^2 e^{-a_1 x} X \,\mathrm{d}x^2 + L_{3,1}\, e^{a_1 x} \int^3 e^{-a_1 x} X \,\mathrm{d}x^3$$

$$+ L_{1,2}\, e^{a_2 x} \int e^{-a_2 x} X \,\mathrm{d}x + L_{2,2}\, e^{a_2 x} \int^2 e^{-a_2 x} X \,\mathrm{d}x^2\,.$$

Eseguiti gli sviluppi ben noti degli integrali di 2.° e di 3.° ordine, si troverà questo risultato identico coll'espressione di y esposta alla fine del § VII.

Adoprando una sola delle distribuzioni già indicate de' valori elementari di y, per esempio la prima, si avrebbe con maggiore prontezza

$$(y_1) = 1, \quad (y_2) = 0, \quad (y_3) = 0, \quad (y_4) = 1, \quad (y_5) = 0,$$

$$(\beta_1) = 1, \quad (\beta_2) = 0, \quad (\beta_3) = a_2 - a_1, \quad (\beta_4) = 1,$$

$$(\gamma_1) = 2, \quad (\gamma_2) = (a_2 - a_1)^2, \quad (\gamma_3) = 2(a_2 - a_1),$$

$$(\varepsilon_1) = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)^3, \quad (\varepsilon_2) = \tfrac{3}{2}(a_2 - a_1)^2; \quad (\sigma_1) = 1.$$

La formula (104) e la prima delle equazioni (105) ci darebbero gli stessi valori dianzi ottenuti di $L_{2,2}$, $L_{1,2}$; poscia le successive equazioni (105) ci offriranno

$$\frac{L_{3,1}}{2} = -\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)} L_{1,2} - \frac{(\gamma_3)}{(\gamma_1)} L_{2,2} = \frac{1}{2(a_2 - a_1)^2},$$

$$L_{2,1} = -\frac{(\beta_2)}{(\beta_1)} \frac{L_{3,1}}{2} - \frac{(\beta_3)}{(\beta_1)} L_{1,2} - \frac{(\beta_4)}{(\beta_1)} L_{2,2} = \frac{2}{(a_2 - a_1)^3},$$

$$L_{1,1} = -\frac{(y_2)}{(y_1)} L_{2,1} - \frac{(y_3)}{(y_1)} \frac{L_{3,1}}{2} - \frac{(y_4)}{(y_1)} L_{1,2} - \frac{(y_5)}{(y_1)} L_{2,2} = \frac{5}{(a_2 - a_1)^4},$$

cioè i valori di $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, $L_{1,1}$ poc' anzi dedotti.

Gli stessi valori delle richieste costanti risulteranno del pari dall' applicazione della formula (99) trovata per induzione dall'Eulero (*Institutiones calculi integralis — editio altera*, vol. 2, p. 432) e dimostrata dal preclaro Analista G. Plana (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino* T. 31. p. 377). La dimostrazione presente è simile a quella che si legge nella già citata Memoria sulle equazioni lineari a coefficienti costanti (*Nuovi Saggi*

dell' Accademia di Padova, Vol. IV), e serve pure a scuoprire i valori (100) delle costanti comprese nello sviluppo (97) di qualsivoglia derivata della variabile dipendente.

§ IX.

Continuazione e fine dell' argomento trattato nel precedente § VIII.

Avendo dianzi osservato che i coefficienti $L_{p,q}$ della formula (98) sono i numeratori delle frazioni parziali in cui si decompone la frazione $\frac{1}{F(a)}$, potremo determinare i valori delle costanti $L_{p,q}$, mediante qualsivoglia de' metodi che servono ad eseguire lo spezzamento finale dell' anzidetta frazione. Pertanto i coefficienti $L_{n_q,q}$, $L_{n_q-1,q}$, $L_{n_q-2,q}$, $\cdots\cdots L_{1,q}$, che sono affetti da un indice comune q, verranno pure determinati mercè le eguaglianze

$$(107) \qquad f(a_q)\, L_{n_q,q} = 1\,,$$

$$f(a_q)\, L_{n_q-1,q} + f'(a_q)\, L_{n_q,q} = 0\,,$$

$$f(a_q)\, L_{n_q-2,q} + f'(a_q)\, L_{n_q-1,q} + \tfrac{1}{2} f''(a_q)\, L_{n_q,q} = 0\,,$$

. . . .

$$f(a_q)\, L_{1,q} + f'(a_q)\, L_{2,q} + \tfrac{1}{2} f''(a_q)\, L_{3,q} + \cdots\cdots + \frac{1}{2.3\ldots\ldots(n_q-1)} f^{(n_q-1)}(a_q)\, L_{n_q,q} = 0\,,$$

in cui si suppone (86) (95)

$$(108) \qquad f(a) = \frac{F(a)}{(a-a_q)^{n_q}} = a^{n-n_q} + K_{1,q}\, a^{n-n_q-1} + K_{2,q}\, a^{n-n_q-2} + \cdots\cdots + K_{n-n_q,q}\,;$$

ovvero

$$(a-a_q)^{n_q} f(a) = F(a)\;;$$

cosicchè col derivare quest' ultima eguaglianza un numero n_q, n_q+1, $n_q+2 \cdots\cdots 2n_q-1$ di volte, e poscia col sostituire ad a il valore particolare a_q troviamo

(109)

$$f(a_q) = \frac{1}{1.2.3\ldots(n_q-1)n_q} F^{(n_q)}(a_q)\,, \quad f'(a_q) = \frac{1}{2.3\ldots n_q(n_q+1)} F^{(n_q+1)}(a_q)\,,$$

$$f''(a_q) = \frac{1}{3.4\ldots(n_q+1)(n_q+2)} F^{(n_q+2)}(a_q)\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n_q-1)}(a_q) = \frac{1}{n_q(n_q+1)\ldots(2n_q-2)(2n_q-1)} F^{(2n_q-1)}(a_q)\,.$$

Per comprovare le (107) si osservi che dallo spezzamento della frazione $\frac{1}{F(a)}$ risulta

$$\frac{1}{F(a)} = \frac{L_{n_q,q}}{(a-a_q)^{n_q}} + \frac{L_{n_q-1,q}}{(a-a_q)^{n_q-1}} + \cdots + \frac{L_{1,q}}{a-a_q} + \frac{\Psi(a)}{f(a)}\,,$$

e quindi

$$f(a)\left\{L_{n_q,q} + L_{n_q-1,q}(a-a_q) + \cdots\cdots + L_{1,q}(a-a)^{n_q-1}\right\} + (a-a_q)^{n_q}\Psi(a) = 1\,.$$

Ponendo in questa equazione identica, e nelle sue derivate 1ª, 2ª, 3ª, $\cdots$ $\cdots\cdots$ $(n_q-1)^{esima}$, $a=a_q$ si ottengono ad evidenza le note relazioni (107), nelle quali si può introdurre in luogo di $f(a_q)$, $f'(a_q)$ ecc. le quantità equivalenti (109).

Immaginiamo moltiplicate rispettivamente per $\frac{x^m}{1\cdot2\cdot3\cdots m}$, $\frac{x^{m-1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)}$, $\cdots\cdots$ $\frac{x^2}{1,2}$, x, 1, e sommate insieme le $m+1$ equazioni, che si dedu-

cono dalla (103) colla sostituzione de' numeri 1, 2, 3, $\cdots m+1$ in luogo di p, ed otterremo

$$\frac{L_{n_q-m,\,q}}{1.2.3\ldots(n_q-m-1)}=\frac{e^{a_q x}}{X}\left\{\tau_{(n_q-m),q}+(n_q-m)\,\tau_{(n_q-m-1),q}\,x\cdots+\frac{(n_q-m)\ldots(n_q-1)}{2.3\ldots m}\tau_{(n_q),q}\,x^m\right\}.$$

Introdotti nelle (105) i valori di $L_{n_r,r}$, $L_{n_r-1,r}\cdots\cdots L_{1,r}$, $L_{n_{r-1},r-1}$ ecc. desunti da questa formula, avremo una serie di eguaglianze paragonabili colle (45), attesochè $\tau_{(n_r),r}$, $\tau_{(n_r-1),r}\cdots\cdots\tau_{(1),r}$, $\tau_{(n_{r-1}),r-1}$ ecc. corrispondono a $\tau_{(n)}$, $\tau_{(n-1)}$, ecc. Questo confronto ci condurrà alle equazioni della tavola seguente, da cui emerge lo sviluppo, e la più semplice legge di formazione delle funzioni (9), allorchè si tratti d'una equazione lineare a coefficienti costanti:

(110)

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=\dfrac{(\rho_2)}{(\rho_1)}+(n_r-1)\,x\,,\\[2ex]
\dfrac{\pi_2}{\pi_1}=\dfrac{(\pi_2)}{(\pi_1)}+(n_r-2)\,x\,,\qquad \dfrac{\pi_3}{\pi_1}=\dfrac{(\pi_3)}{(\pi_1)}+(n_r-1)\dfrac{(\pi_2)}{(\pi_1)}\,x+\dfrac{(n_r-1)(n_r-2)}{2}\,x^2\,,\\[2ex]
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\[2ex]
\dfrac{\mu_2}{\mu_1}=\dfrac{(\mu_2)}{(\mu_1)}+x\,,\qquad \dfrac{\mu_3}{\mu_1}=\dfrac{(\mu_3)}{(\mu_1)}+2\,\dfrac{(\mu_2)}{(\mu_1)}\,x+x^2\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{(\lambda_2)}{(\lambda_1)}\,e^{(a_r-a_{r-1})x},\qquad \frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\left\{\frac{(\lambda_3)}{(\lambda_1)}+\frac{(\lambda_2)}{(\lambda_1)}\,x\right\}e^{(a_r-a_{r-1})x},\;\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\lambda_{n_r+1}}{\lambda_1}=\left\{\frac{(\lambda_{n_r+1})}{(\lambda_1)}+(n_r-1)\,\frac{(\lambda_{n_r})}{(\lambda_1)}\,x+\frac{(n_r-1)\,(n_r-2)}{\;}\,\frac{(\lambda_{n_r-1})}{(\lambda_1)}\,x^2+\cdots+\frac{(\lambda_2)}{(\lambda_1)}\,x^{n_r-1}\right\}e^{(a_r-a_{r-1})\,x},$$

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}=\frac{(\varkappa_2)}{(\varkappa_1)}+(n_{r-1}-1)\,x\,,\qquad \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}=\frac{(\varkappa_3)}{(\varkappa_1)}\,e^{(a_r-a_{r-1})x}\,,\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}=\frac{(\vartheta_2)}{(\vartheta_1)}+x\,,\qquad \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}=\frac{(\vartheta_3)}{(\vartheta_1)}+2\,\frac{(\vartheta_2)}{(\vartheta_1)}\,x+x^2,\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\vartheta_{n_{r-1}+1}}{\vartheta_1}=\frac{(\vartheta_{n_{r-1}+1})}{(\vartheta_1)}\,e^{(a_r-a_{r-1})x}\,;\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\frac{(\eta_2)}{(\eta_1)}\,e^{(a_{r-1}-a_{r-2})x},\qquad \frac{\eta_3}{\eta_1}=\left\{\frac{(\eta_3)}{(\eta_1)}+\frac{(\eta_2)}{(\eta_1)}\,x\right\}e^{(a_{r-1}-a_{r-2})x},\;\ldots\ldots$$

$$\frac{\eta_{n_{r-1}+2}}{\eta_1}=\frac{(\eta_{n_{r-1}+2})}{(\eta_1)}\,e^{(a_r-a_{r-2})x}\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{(\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1)}\,e^{(a_2-a_1)x},\qquad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}=\left\{\frac{(\varepsilon_3)}{(\varepsilon_1)}+\frac{(\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1)}\,x\right\}e^{(a_2-a_1)x},\;\ldots\ldots$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)}+(n_1-1)\,x\,,\qquad \frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{(\gamma_3)}{(\gamma_1)}\,e^{(a_2-a_1)x},\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{(y_2)}{(y_1)}+x=x\,,\qquad \frac{y_3}{y_1}=\frac{(y_3)}{(y_1)}+2\,\frac{(y_2)}{(y_1)}\,x+x^2=x^2,\;\cdots\qquad \frac{y_{n_1}}{y_1}=x^{n_1-1},$$

$$\frac{y_{n_1+1}}{y_1}=\frac{(y_{n_1+1})}{(y_1)}\,e^{(a_2-a_1)x},\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{y_{n-n_r+1}}{y_1}=\frac{(y_{n-n_r+1})}{(y_1)}\,e^{(a_r-a_1)x},\cdots\quad \frac{y_n}{y_1}=\left\{\frac{(y_n)}{(y_1)}+(n_r-1)\frac{(y_{n-1})}{(y_1)}\,x\cdots+\frac{(y_{n-n_r+1})}{(y_1)}\,x^{n_r-1}\right\}e^{(a_r-a_1)x}.$$

È facile comprendere il modo con cui si formano queste $n-1$ file di $1,\ 2,\ 3\cdots,\ n-1$ equazioni relative alle lettere $\rho,\ \pi,\cdots\beta,\ y$. Il gruppo

delle prime $n_r—1$ file di equazioni si svolge, mercè i coefficienti delle progressive potenze del binomio, con una legge evidente. La susseguente n_r^{esima} fila relativa alla lettera λ presenta per fattore del secondo membro d'ogni equazione l'esponenziale $e^{(a_r-a_{r-1})x}$, e per coefficienti de' varii termini quelli della potenza $0, 1, 2, \cdots n_r—1$ del binomio. Succede poscia un 2.° gruppo di $n_{r-1}—1$ file che dapprima seguono la legge del precedente gruppo delle prime $n_r—1$ righe, e poscia procedono alla stessa guisa della predetta n_r^{esima} fila. Indi si incontra la $(n_{r-1}+n_r)^{esima}$ fila relativa alla lettera η, che si divide in due sezioni analoghe alla fila n_r^{esima}, se non che l'una contiene n_{r-1} equazioni ed offre per fattor comune de' secondi membri l'esponenziale $e^{(a_{r-1}-a_{r-2})x}$, mentre l'altra composta di n_r equazioni ha per fattore de' secondi membri $e^{(a_r-a_{r-2})x}$. Si troverebbe in seguito un 3.° gruppo di $n_{r-2}—1$ file soggette dapprima alla legge del 1.° gruppo già accennato, e poscia alla regola della fila predetta $(n_{r-1}+n_r)^{esima}$; dopo di che s' incontra una $(n_{r-2}+n_{r-1}+n_r)^{esima}$ fila divisa in tre sezioni conformi alla fila n_r^{esima}, ma separatamente costituite da n_{r-2}, n_{r-1}, n_r equazioni, i cui rispettivi fattori de' secondi membri sono le esponenziali $e^{(a_{r-2}-a_{r-3})x}$, $e^{(a_{r-1}-a_{r-3})x}$, $e^{(a_r-a_{r-3})x}$. A questo modo si giunge infine alla $(n-n_1)^{esima}$ fila relativa alla lettera ε che si compone di $r—1$ parti o sezioni analoghe sempre alla prefata n_r^{esima} riga, e costituite ad una ad una da n_2, $n_3 \cdots\cdots n_r$ equazioni, i cui secondi membri hanno per rispettivi fattori comuni $e^{(a_2-a_1)x}$, $e^{(a_3-a_1)x}, \cdots e^{(a_r-a_1)x}$. Non resta poscia che l'ultimo gruppo di $n_1—1$ file di eguaglianze, che cominciano qui pure colla solita legge del gruppo delle prime $n_r—1$ righe, e procedono in seguito alla stessa guisa della $(n-n_1)^{esima}$ fila testè indicata, come si scorge nell'ultima fila o serie delle equazioni relative ad y. Quindi è palese che se alcuno n_q de' numeri n_1, $n_2, \cdots n_r$ si riduce all'unità, dee mancare nella tavola (110) il gruppo delle $n_q—1$ file di eguaglianze, che precedono la riga in cui il secondo membro della prima equazione ha per fattore $e^{(a_q-a_{q-1})x}$, ovvero succedono alla fila ove la prima equazione ha per fattore del secondo membro l'esponenziale $e^{(a_{q+1}-a_q)x}$. Converrà poi applicare in ogni caso alle $n-1$ file consecutive della tavola (110) le lettere successive $\rho, \pi, \cdots \beta, y$ in guisa che queste corrispondano alle cifre impiegate nelle equazioni (1) (4) (7), e nelle relazioni (9).

Paragonando viceversa colle equazioni (105) quelle che risultano dal sostituire nelle (45) le espressioni (103) di $\tau_{(n_r),r}$ $\tau_{(n_r-1),r}$ $\cdots\cdots$ $\tau_{(1),r}$, $\tau_{(n_{r-1}),r-1}$ ecc., ossia di $\tau_{(n)}$, $\tau_{(n-1)}$, ecc., si avrebbero $\frac{(\rho_2)}{(\rho_1)}$, $\frac{(\pi_2)}{(\pi_1)}$, $\frac{(\pi_3)}{(\pi_1)}$ ecc. in funzione di $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\frac{\pi_2}{\pi_1}$, $\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ecc. Non tralascierò di notare che simili espressioni, del resto inutili, si formerebbero coll' alternare nelle (112) le quantità della prima di dette due serie con quelle dell'altra, e mutare il segno di x. La derivazione di queste eguaglianze ci condurrebbe ad altre relazioni di identità, di cui è superfluo occuparsi.

Onde avere una serie di equazioni esprimenti σ_1, ρ_1, π_1 ecc. per mezzo di (σ_1) (ρ_1) (π_1), e delle esponenziali $e^{(a_r-a_{r-1})x}$, $e^{(a_{r-1}-a_{r-2})x}$, ecc., basta osservare, che ponendo nella (103) $p=1$, $q=r$, e poscia sostituendovi i valori (12) (104) di $\tau=\tau_{(n_r),r}$, e di $L_{n_r,r}$, ritenuto $A_0=1$, si ha l'eguaglianza

$$y_1\,\beta_1\,\gamma_1\cdots\rho_1\,\sigma_1 = (y_1)(\beta_1)\cdots(\rho_1)(\sigma_1)\,e^{a_r x},$$

da cui si deduce di mano in mano, coll' esclusione dell'ultimo valore elementare di y,

$$y_1\beta_1\cdots\rho_1 = (y_1)(\beta_1)\cdots(\rho_1)\,e^{a_r x},\ \cdots\cdots\quad y_1\beta_1\cdots\mu_1 = (y_1)(\beta_1)\cdots(\mu_1)\,e^{a_r x},$$

$$y_1\beta_1\cdots\lambda_1 = (y_1)(\beta_1)\cdots(\lambda_1)\,e^{a_{r-1}x},\ \cdots\quad y_1\,\beta_1\cdots\vartheta_1 = (y_1)\cdots(\beta_1)\,e^{a_{r-1}x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1\beta_1\cdots\varepsilon_1 = (y_1)\cdots(\varepsilon_1)\,e^{a_1 x},\ \cdots\cdots\quad y_1\beta_1 = (y_1)(\beta_1)\,e^{a_1 x},\quad y_1 = (y_1)\,e^{a_1 x},$$

e si ha quindi, colla divisione de' due membri di ciascuna equazione per quelli della susseguente,

$$(111)$$

$$\sigma_1 = (\sigma_1),\quad \rho_1 = (\rho_1),\ \cdots\cdots\ \nu_1 = (\nu_1),\quad \mu_1 = (\mu_1)\,e^{(a_r-a_{r-1})x},$$

$$\lambda_1 = (\lambda_1),\quad \cdots\cdots\cdots\ \iota_1 = (\iota_1),\quad \vartheta_1 = (\vartheta_1)\,e^{(a_{r-1}-a_{r-2})x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_1),\ \cdots\cdots\cdots\ \beta_1 = (\beta_1),\quad y_1 = (y_1)\,e^{a_r x}.$$

Se alcuno de' numeri n_1, n_2 ecc., e in generale n_m equivale all' unità, è d' uopo nella fila di equazioni, l' ultima delle quali ha per fattore del secondo membro l' esponenziale $e^{a_m x}$, ritenere quest' ultima equazione, ed escludere tutte le precedenti, avendo sempre riguardo che le lettere ρ, π, $\cdots\cdots\beta$ si succedano non interrottamente, in guisa da corrispondere colle cifre della tavola (9). Così a cagion d'esempio se tutte le radici dell'equazione (86) sieno fra loro diseguali, cioè nel caso di $n_1 = n_2 \cdots = n_r = 1$, si avrebbe dal prospetto (111)

$$\sigma_1 = (\sigma_1)\, e^{(a_n - a_{n-1})x},\quad \rho_1 = (\rho_1)\, e^{(a_{n-1} - a_{n-2})x}, \cdots \beta_1 = (\beta_1)\, e^{(a_2 - a_1)x},\quad y = (y_1)\, e^{a_1 x} = e^{a_1 x}.$$

Mercè la derivazione delle equazioni (110), risalendo dall' ultima fila alle superiori otteniamo, a cagione delle eguaglianze (9),

(112)

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 2\dfrac{y_2}{y_1}, \cdots\cdots \quad \beta_{n_1-1} = (n_1-1)\dfrac{y_{n_1-1}}{y_1}, \\[2ex]
\beta_{n_1} = (a_2-a_1)\dfrac{y_{n_1+1}}{y_1}, \cdots\cdots \beta_{n_1+n_2-1} = (a_2-a_1)\dfrac{y_{n_1+n_2}}{y_1} + (n_2-1)\dfrac{y_{n_1+n_2-1}}{y_1}, \\[1ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[1ex]
\beta_{n-n_r} = (a_r-a_1)\dfrac{y_{n-n_r+1}}{y_1}, \cdots \quad \beta_{n-1} = (a_r-a_1)\dfrac{y_n}{y_1} + (n_r-1)\dfrac{y_{n-1}}{y_1}, \\[1ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[1ex]
\varepsilon_1 = \eta_1 - 1, \quad \varepsilon_2 = (a_2-a_1)\dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}, \quad \varepsilon_3 = (a_2-a_1)\dfrac{\gamma_4}{\gamma_1} + \dfrac{\gamma_3}{\gamma_1}, \cdots\cdots
\end{array}\right.$$

$$\zeta_1 = (a_2-a_1)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \zeta_2 = (a_2-a_1)\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \zeta_3 = (a_2-a_1)\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1} + 2\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vartheta_1 = (a_{r-1} - a_{r-2}) \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \vartheta_2 = (a_{r-1} - a_{r-2}) \frac{\eta_3}{\eta_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \dots\dots\dots$$

$$\vartheta_{n_{r-1}+1} = (a_r - a_{r-2}) \frac{\eta_{n_{r-1}+2}}{\eta_1}, \cdots \vartheta_{n_{r-1}+n_r} = (a_r - a_{r-2}) \frac{\eta_{n_{r-1}+n_r+1}}{\eta_1} + (n_r - 1) \frac{\eta_{n_{r-1}+n_r}}{\eta_1},$$

$$\left\{\begin{array}{l} \iota_1 = 1, \quad \iota_2 = 2 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \quad \cdots \quad \nu_{n_{r-1}-1} = (n_{r-1} - 1) \frac{\vartheta_{n_r}}{\vartheta_1}, \\ \iota_{n_{r-1}} = (a_r - a_{r-1}) \frac{\vartheta_{n_{r-1}+1}}{\vartheta_1} \cdots \iota_{n_{r-1}+n_r-1} = (a_r - a_{r-1}) \frac{\vartheta_{n_{r-1}+n_r}}{\vartheta_1} + (n_r - 1) \frac{\vartheta_{n_{r-1}+n_r-1}}{\vartheta_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 = \eta_{r-1} - 1, \quad \lambda_2 = (a_r - a_{r-1}) \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1} \quad \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

$$\mu_1 = (a_r - a_{r-1}) \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \dots\dots\dots \quad \mu_{n_r} = (a_r - a_{r-1}) \frac{\lambda_{n_r+1}}{\lambda_1} + (n_r - 1) \frac{\lambda_{n_r}}{\lambda_1},$$

$$\left\{\begin{array}{l} \nu_1 = 1, \quad \nu_1 = 2 \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \dots\dots\dots \quad \nu_{n_r-1} = (n_r - 1) \frac{\mu_{n_r-1}}{\mu_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_1 = n_r - 2, \quad \rho_2 = (n_r - 1) \frac{\pi_2}{\pi_1}, \\ \sigma_1 = n_r - 1. \end{array}\right.$$

Questa tavola si compone di $n-1$ file contenenti $n, n-1, \cdots 2, 1$ equazioni relative alle lettere $\beta, \gamma, \cdots \sigma$. Nel gruppo delle prime n_1-1 file troviamo per secondi membri delle prime equazioni i numeri rispettivi $1, 2, 3 \cdots \cdots n_1-1$, e per fattori de' secondi membri delle successive equazioni i numeri naturali progressivi fino inclusivamente ad n_1-1; poscia le rimanenti equazioni procedono colla legge della susseguente fila n_1^{esima} relativa alla lettera ζ, che si divide in $r-1$ parti o sezioni costituite rispettivamente da $n_2, n_3, \cdots n_r$ eguaglianze. Ognuna di queste parti, e in generale quella che

contiene n_m equazioni, offre ne' secondi membri un termine che ha per fattore $a_m - a_1$, ed un altro termine che si trova successivamente moltiplicato per $0, 1, 2, \cdots n_m - 1$. Poscia s'incontrerebbe un gruppo di $n_2 - 1$ file di equazioni, che incominciano colla legge osservata all'origine delle $n_1 - 1$ file del primo gruppo, purchè si cangi n_1 in n_2, ma giunte ad avere per fattore del secondo membro il numero $n_2 - 1$ procedono nel rimanente colla legge della $(n_1 + n_2)^{esima}$ fila consecutiva. Questa si troverebbe divisa in $r-2$ parti rispettivamente costituite da $n_3, n_4, \cdots\cdots n_r$ equazioni, e i secondi membri delle n_m equazioni di ciascuna parte conterrebbero del pari un termine affetto dal fattore $a_m - a_2$, ed un altro termine che ha progressivamente per coefficiente numerico $0, 1, 2 \cdots\cdots n_m - 1$. In simil guisa si arriva infine alla fila $(n - n_r)^{esima}$ relativa alla lettera μ, che contiene n_r equazioni, i cui secondi membri offrono un termine affetto dal fattore $a_r - a_{r-1}$, ed un altro termine moltiplicato di mano in mano per $0, 1, 2 \cdots n_r - 1$. A questa fila succede l'ultimo gruppo di $n_r - 1$ file di equazioni, i cui secondi membri analogamente a' gruppi anteriori cominciano co' numeri $1, 2, 3, \cdots n_r - 1$, e proseguono ad avere per fattori i numeri naturali successivi fino inclusivamente ad $n_r - 1$. Da ciò si comprende che se qualcuno de' numeri $n_1, n_2 \cdots n_r$, cioè in generale n_q fosse eguale all'unità, mancherebbe il gruppo delle $n_q - 1$ file di equazioni, che incominciano co' valori $1, 2, \cdots n_q - 1$, ossia che precedono la fila in cui la prima equazione ha per fattore del secondo membro $a_{q+1} - a_q$, ovvero succedono alla fila ove il secondo membro della prima equazione ha per fattore $a_q - a_{q-1}$. Sarà poi mestieri applicare in ogni caso alle file successive delle equazioni (112) le lettere $\beta, \gamma, \varepsilon \cdots$ senza interruzione, cosicchè queste corrispondano alle variabili delle equazioni (4) (7) e delle relazioni (9). Con queste avvertenze avremo a cagion d'esempio nel caso in cui tutte le radici dell'equazione (86) sieno fra loro diseguali, cioè nella supposizione di $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$,

$$\beta_1 = (a_2 - a_1)\frac{y_2}{y_1}, \qquad \beta_2 = (a_3 - a_1)\frac{y_3}{y_1}, \cdots \beta_{n-1} = (a_n - a_1)\frac{y_n}{y_1},$$

$$\gamma_1 = (a_3 - a_2)\frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \gamma_{n-2} = (a_n - a_2)\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1},$$

. . . .

$$\rho_1 = (a_{n-1} - a_{n-2}) \frac{\pi_2}{\pi_1}, \qquad \rho_2 = (a_n - a_{n-2}) \frac{\pi_3}{\pi_1},$$

$$\sigma_1 = (a_n - a_{n-1}) \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Ponendo nell'equazioni (112) $x=0$, ed avvertendo che per $x=0$ i valori elementari y_1, y_{n_1+1}, $y_{n_1+n_2+1}$ .... y_{n-n_r+1} di y si riducono all'unità, e tutti gli altri si annullano, raccoglieremo

(113)

$$(\beta_1) = 1, \quad (\beta_2) = 0, \ldots \quad (\beta_{n_1-1}) = 0,$$

$$(\beta_{n_1}) = a_2 - a_1, \quad (\beta_{n_1+1}) = 1, \quad (\beta_{n_1+2}) = 0, \ldots (\beta_{n_1+n_2-1}) = 0,$$

$$(\beta_{n_1+n_2}) = a_3 - a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\beta_{n-n_r}) = a_r - a_1, \quad (\beta_{n-n_r+2}) = 1, \quad (\beta_{n-n_r+3}) = 0, \ldots (\beta_{n-1}) = 0, \quad \text{ecc.}$$

È superfluo prolungare questa tabella oltre i valori di β corrispondenti ad $x=0$, poichè per formarla completamente basta chiudere entro parentesi le quantità rappresentanti i valori elementari di β, γ, ... ρ, σ nella tavola precedente (112).

Sostituiti i valori di (β_1), (β_2), ... (ρ_1), (ρ_2), (σ_1) nelle formule (110), (111), si avrebbero esplicitamente le espressioni de' valori elementari di ciascuna delle quantità σ, ρ, π, ecc. Queste espressioni si possono altresì calcolare agevolmente una dopo l'altra, mediante la serie delle equazioni (112). Ma senza mestieri di ricavare le formule esprimenti i detti valori elementari, basta calcolarne i valori numerici corrispondenti ad $x=0$, mercè la tabella (113), la cui legge di composizione è conforme a quella del sistema (112). Imperocchè dopo di aver dedotto questi valori particolari, avremo dalle equazioni (105) i valori di $L_{n_r, r}$, ... $L_{1,1}$, $L_{n_{r-1}, r-1}$ ecc., e conseguentemente (103) anco le espressioni di $\tau_{(n_r), r}$, $\tau_{(n_r-1), r}$ ecc. comprese nello sviluppo (93) dell'integrale completo d'ogni equazione lineare a coefficienti costanti.

Invece di adoperare la sola distribuzione de' valori elementari di y, in cui l'ultimo gruppo è quello de' valori che hanno per fattor comune l'esponenziale $e^{a_r x}$, ossia corrispondono alle n_r radici eguali ad a_r e calcolare i valori di tutte le costanti $L_{n_r, r}$, $\cdots L_{1, r}$, $L_{n_{r-1}, r-1}$ ecc., mediante l'intero sistema delle equazioni (105), si potrebbe eseguire il calcolo delle quantità (113) per cadauna delle r disposizioni de' valori elementari di y, in cui l'ultimo gruppo sia quello de' valori corrispondenti alle radici eguali ad a_q, attribuendo a q successivamente i valori $r, r-1 \cdots 3, 2, 1$. Basterebbe allora, per ciascun valore di q, ricavare i valori di $L_{n_q, q}$, $L_{n_q-1, q}$, $\cdots L_{1, q}$ dalle n_q equazioni (106).

Osserveremo a questo riguardo, che per qualunque disposizione de' valori elementari di y, in cui l'ultimo gruppo è costituito da valori relativi alle n_q radici eguali ad a_q, il paragone delle equazioni (106) colle (107) ci esibisce

$$(114) \qquad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n_q - 1)}{(y_1)(\beta_1) \cdots (\rho_1)(\sigma_1)} = \frac{1}{f(a_q)},$$

$$\frac{1}{n_q - 1} \frac{(\rho_2)}{(\rho_1)} = \frac{1}{n_q - 2} \frac{(\pi_2)}{(\pi_1)} = \cdots = \frac{(\mu_2)}{(\mu_1)} = \frac{f'(a_q)}{f(a_q)},$$

$$\frac{1}{(n_q-2)(n_q-1)} \frac{(\pi_3)}{(\pi_1)} = \frac{1}{(n_q-3)(n_q-2)} \frac{(\xi_3)}{(\xi_1)} = \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{(\mu_3)}{(\mu_1)} = \frac{1}{2} \frac{f''(a_q)}{f(a_q)};$$

. . . .

$$\frac{(\mu_{n_q})}{(\mu_1)} = \frac{f^{(n_q-1)}(a_q)}{f(a_q)};$$

cosicchè, ritenuta la 1.ª delle equazioni (106), possiamo esporre le rimanenti anco nel modo seguente

$$(115) \qquad L_{n_q, q} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n_q - 1)}{(y_1)(\beta_1) \cdots (\rho_1)(\sigma_1)},$$

$$- L_{n_q-1, q} = \frac{(\mu_2)}{(\mu_1)} L_{n_q, q},$$

$$-L_{n_q-2,q}=\frac{(\mu_2)}{(\mu_1)}L_{n_q-1,q}+\frac{1}{2}\frac{(\mu_3)}{(\mu_1)}L_{n_q,q},$$

. . . .

$$-L_{1,q}=\frac{(\mu_2)}{(\mu_1)}L_{2,q}+\frac{1}{2}\frac{(\mu_3)}{(\mu_1)}L_{3,q}+\cdots+\frac{1}{2.3\ldots(n_q-1)}\frac{(\mu_{n_q})}{(\mu_1)}L_{n_q,q}.$$

Si avrebbe inoltre dalle prime n_r—1, ossia in generale n_q—1 equazioni del sistema (110)

(116)

$$\frac{1}{n_q-1}\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{1}{n_q-2}\frac{\pi_2}{\pi_1}=\cdots=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}+x,$$

$$\frac{1}{(n_q-2)(n_q-1)}\frac{\pi_3}{\pi_1}=\frac{1}{(n_q-3)(n_q-2)}\frac{\xi_3}{\xi_1}=\cdots=\frac{1}{1.2}\frac{\mu_3}{\mu_1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{f''(a_q)}{f(a_q)}+2\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}x+x^2\right\},$$

. . . .

$$\frac{\mu_{n_q}}{\mu_1}=\frac{f^{(n_q-1)}(a_q)}{f(a_q)}+(n_q-1)\frac{f^{(n_q-2)}(a_q)}{f(a_q)}x+\frac{(n_q-1)(n_q-2)}{2}\frac{f^{(n_q-3)}(a_q)}{f(a_q)}x^2+\cdots+x^{n_q-1};$$

e si avrà quindi dalla derivazione di queste eguaglianze, a cagione delle relazioni (9), oppure dall' ultime n_q—1 equazioni del sistema (112)

(117)

$$\frac{\sigma_1}{n_q-1}=\frac{\rho_1}{n_q-2}=\cdots=\nu_1=1,$$

$$\frac{\rho_2}{(n_q-2)(n_q-1)}=\frac{\pi_2}{(n_q-3)(n_q-2)}=\cdots=\frac{\nu_2}{1.2}=\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}+x,$$

$$\frac{\pi_3}{(n_q-3)(n_q-2)(n_q-1)}=\cdots=\frac{\nu_3}{1.2.3}=\frac{1}{1\cdot 2}\left\{\frac{f''(a_q)}{f(a_q)}+2\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}x+x^2\right\},$$

. . . .

$$\frac{\nu_{n_q-1}}{n_q-1}=\frac{f^{(n_q-2)}(a_q)}{f(a_q)}+(n_q-2)\frac{f^{(n_q-3)}(a_q)}{f(a_q)}x+\cdots+x^{n_q-2};$$

Per mostrare con un esempio l'utilità della tavola (113), che risulta dalla (112) colla sostituzione di $x=0$, proponiamoci di nuovo l'equazione lineare a coefficienti costanti del 5.° ordine già trattata ne' §§ VII, VIII, supponendo che la relativa equazione algebrica abbia tre radici eguali ad a_1, e le due rimanenti eguali ad a_2. Disponiamo i valori elementari di y nella serie

$$y_1=e^{a_1x}, \quad y_2=e^{a_1x}x, \quad y_3=e^{a_1x}x^2, \quad y_4=e^{a_2x}, \quad y_5=e^{a_2x}x,$$

ed otterremo (113) (112)

$$(\beta_1)=1, \quad (\beta_2)=0, \quad (\beta_3)=a_2-a_1, \quad (\beta_4)=1,$$

$$(\gamma_1)=2, \quad (\gamma_2)=(a_2-a_1)\frac{(\beta_3)}{(\beta_1)}=(a_2-a_1)^2, \quad \gamma_3=(a_2-a_1)\frac{(\beta_4)}{(\beta_1)}+\frac{(\beta_3)}{(\beta_1)}=2(a_2-a_1),$$

$$(\varepsilon_1)=(a_2-a_1)\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)}=\tfrac{1}{2}(a_2-a_1)^3, \quad (\varepsilon_2)=(a_2-a_1)\frac{(\gamma_3)}{(\gamma_1)}+\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)}=\tfrac{3}{2}(a_2-a_1)^2,$$

$$(\sigma_1)=1,$$

cioè gli stessi valori già trovati alla fine del § VIII. Quindi le equazioni (105) ci daranno del pari (§ VIII) i valori noti di $L_{2,2}$, $L_{1,2}$, $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, $L_{1,1}$, e siccome la formula (103) ci offre le stesse espressioni ottenute nel § VII di $\tau_{(2),2}$, $\tau_{(1),2}$, $\tau_{(3),1}$, $\tau_{(2),1}$ $\tau_{(1),1}$, avremo dalla formula (93) lo sviluppo già noto (§ VII) dell'integrale completo richiesto.

Ordinando i valori elementari di y nell'altra serie

$$y_1=e^{a_2x}, \quad y_2=e^{a_2x}x, \quad y_3=e^{a_1x}, \quad y_4=e^{a_1x}x, \quad y_5=e^{a_1x}x^2,$$

si avrebbe (113)

$$(\beta_1)=1, \quad (\beta_2)=a_1-a_2, \quad (\beta_3)=1, \quad (\beta_4)=0,$$

$$(\gamma_1)=(a_1-a_2)\frac{(\beta_2)}{(\beta_1)}=(a_1-a_2)^2, \quad (\gamma_2)=(a_1-a_2)\frac{(\beta_3)}{(\beta_1)}+\frac{(\beta_2)}{(\beta_1)}=2(a_1-a_2),$$

$$(\gamma_3)=(a_1-a_2)\frac{(\beta_4)}{(\beta_1)}+2\frac{(\beta_3)}{(\beta_1)}=2,$$

$$(\varepsilon_1)=1\,,\qquad (\varepsilon_2)=2\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)}=\frac{4}{a_1-a_2}\,,$$

$$(\sigma_1)=2\,.$$

Questi valori vennero già dedotti in gran parte nel § VIII dalle relative espressioni de' valori elementari di β, γ, ε, σ ottenute alla fine del § VII, ponendovi $x=0$. Non lascieremo di osservare che queste espressioni risultano agevolmente dalla tavola (112), che ci esibisce coll'ultima distribuzione de' valori elementari di y

$$\beta_1=1\,,\ \beta_2=(a_1-a_2)\frac{y_3}{y_1}=(a_1-a_2)\,e^{(a_1-a_2)x}\,,\ \beta_3=(a_1-a_2)\frac{y_4}{y_1}+\frac{y_3}{y_1}=\left\{(a_1-a_2)x+1\right\}e^{(a_1-a_2)x}$$

$$\beta_4=(a_1-a_2)\frac{y_5}{y_1}+2\frac{y_4}{y_1}=\left\{(a_1-a_2)\,x^2+2x\right\}e^{(a_1-a_2)x}\,,$$

$$\gamma_1=(a_1-a_2)\frac{\beta_2}{\beta_1}=(a_1-a_2)^2e^{(a_1-a_2)x}\,,\ \gamma_2=(a_1-a_2)\frac{\beta_3}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1}=\left\{(a_1-a_2)^2+2(a_1-a_2)\right\}e^{(a_1-a_2)x}\,,$$

$$\gamma_3=(a_1-a_2)\frac{\beta_4}{\beta_1}+2\frac{\beta_3}{\beta_1}=\left\{(a_1-a_2)^2x^2+4\,(a_1-a_2)\,x+2\right\}e^{(a_1-a_2)x}\,,$$

$$\varepsilon_1=1\,,\qquad \varepsilon_2=2\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=2x+\frac{4}{a_1-a_2}\,,$$

$$\sigma_1=2\,.$$

Calcolati così i valori di $(\beta_1)\,(\beta_2)\cdots(\sigma_1)$ per ambedue le disposizioni de' valori elementari di y, possiamo mediante il sistema delle equazioni (106), ovvero delle (115), determinare in primo luogo $L_{2,2}$, $L_{1,2}$, poscia $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, $L_{1,1}$, avvertendo che le quantità $(\mu_1)\,(\mu_2)$ ecc. (115) corrispondono per la prima distribuzione de' valori particolari di y ad (ε_1), (ε_2), e nell'altra distribuzione a (γ_1), (γ_2), (γ_3). Avremo in conseguenza dalle (115), colla prima serie de' valori elementari di y,

$$L_{2,2}=\frac{1}{(y_1)(\beta_1)(\gamma_1)(\varepsilon_1)(\sigma_1)}=\frac{1}{(a_2-a_1)^3}\,,$$

$$L_{1,2} = -\frac{(\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1)} L_{2,2} = -\frac{3}{(a_2-a_1)^4},$$

e colla seconda serie di detti valori,

$$L_{3,1} = \frac{1 \cdot 2}{(y_1)(\beta_1)(\gamma_1)(\varepsilon_1)(\sigma_1)} = \frac{1}{(a_1-a_2)^2},$$

$$L_{2,1} = -\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)} L_{3,1} = -\frac{2}{(a_1-a_2)^3},$$

$$L_{1,1} = -\frac{(\gamma_2)}{(\gamma_1)} L_{2,1} - \frac{1}{2}\frac{(\gamma_3)}{(\gamma_1)} L_{3,1} = \frac{3}{(a_1-a_2)^4},$$

cioè torneremo a trovare gli stessi valori altrove accennati (§§ VII, VIII) delle quantità richieste.

Ricorrendo alla seconda distribuzione de' valori elementari di y si avrebbe (108) $f(a) = \frac{F(a)}{(a-a_1)^3} = (a-a_2)^2$, e le formule (116) ci offrirebbero

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{2}{a_1-a_2} + x, \qquad \frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{2}{(a_1-a_2)^2} + \frac{4x}{a_1-a_2} + x^2,$$

risultati che si accordano con quelli del calcolo delle funzioni β_1, $\beta_2 \cdots\cdots$ ε_1, ε_2, σ_1 poc'anzi istituito, mercè la tavola (112).

Termineremo coll'osservare, che se si tratti di svolgere l'espressione della derivata $(m)^{esima}$ di y, anzichè ricorrere alle formule (97), (101) e determinare le quantità $\overline{L}^{m}_{p,q}$, mediante la formula (100), oppure col sistema delle equazioni seguenti, che si deducono alla stessa guisa delle (107)

$$f(a_q)\, \overline{L}^{m}_{n_q,q} = a_q^m$$

$$f(a_q)\, \overline{L}^{m}_{n_q-1,q} + f'(a_q)\, \overline{L}^{m}_{n_q,q} = m a_q^{m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a_q)\, \overline{L}^{m}_{1,q} + f'(a_q)\, \overline{L}^{m}_{2,q} + \frac{1}{2} f''(a_q)\, \overline{L}^{m}_{3,q} + \cdots\cdots + \frac{f^{(n_q-1)}(a_q)}{2 \ldots (n_q-1)} \overline{L}^{m}_{n_q,q}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-n_q+2)}{1.2\ldots(n_q-1)} a_q^{m-n_q+1},$$

o con qualsivoglia altro metodo di decomposizione della frazione $\frac{a^m}{F(a)}$ nelle sue parziali, sarà più facile ed opportuno calcolare le quantità $L_{p,q}$, o collo spezzamento della frazione $\frac{1}{F(a)}$, oppure col metodo additato nel presente § IX, e quindi ottenere (103) le funzioni $\tau_{(n_r),r}, \cdots \tau_{(1),r}, \tau_{(n_{r-1}),r-1}$, ecc. equivalenti alle funzioni $\tau_{(n)}, \tau_{(n-1)}$, ecc. comprese nelle formule (80) 81). Imperocchè per passare dallo sviluppo (26) di y a quello di qualsivoglia sua derivata (80) (81) basta sostituire a' valori elementari $y_1, y_2, \cdots y_n$, che moltiplicano gli integrali, le lor derivate dell' egual ordine, e se questo sia il numero $n+i$ superiore ad $n-1$, aggiungervi il gruppo delle derivate successive di X rappresentabile colla formula

$$\sum_{p=0}^{p=i+1} Q_p \mathrm{D}^{i-p} X,$$

essendo i coefficienti Q_p determinati dalle equazioni (90).

Così avendo gia trovato (§§ VII, VIII, IX) per l'equazione lineare del 5.° ordine a coefficienti costanti, che ci ha servito più volte come esempio di applicazione,

$$y = e^{a_1 x} x^2 \int \tau_{(3),1} \mathrm{d}x + e^{a_1 x} x \int \tau_{(2),1} \mathrm{d}x + e^{a_1 x} \int \tau_{(1),1} \mathrm{d}x + e^{a_2 x} x \int \tau_{(2),2} \mathrm{d}x + e^{a_2 x} \int \tau_{(1),2} \mathrm{d}x,$$

otterremo immediatamente, a cagion d'esempio, colla settima derivazione dei soli moltiplicatori degli integrali, e coll'aggiunta del gruppo $Q_0 \mathrm{D}^2 X + Q_1 \mathrm{D} X + Q_2 X$,

$$\begin{aligned} y^{(7)} = {} & a_1^5 e^{a_1 x} (a_1^2 x^2 + 14 a_1 x + 42) \int \tau_{(3),1} \mathrm{d}x + a_1^6 e^{a_1 x} (a_1 x + 7) \int \tau_{(2),1} \mathrm{d}x \\ & + a_1^7 e^{a_1 x} \int \tau_{(1),1} \mathrm{d}x + a_2^6 e^{a_2 x} (a_2 x + 7) \int \tau_{(2),2} \mathrm{d}x + a_2^7 e^{a_2 x} \int \tau_{(1),2} \mathrm{d}x \\ & + \mathrm{D}^2 X - A_1 \mathrm{D} X + (A_1^2 - A_2) X. \end{aligned}$$

PARTE II.

Equazioni lineari alle differenze finite.

Capo I.

Formule esprimenti l' integrale completo d' ogni equazione lineare a differenze finite dell' ordine n, *per mezzo di* n, *od* n — 1 *valori elementari soddisfacenti alla rispettiva equazione ridotta.*

Le ricerche, che sono per esporre intorno alle equazioni lineari a differenze finite, essendo del tutto analoghe a quelle già istituite nella Parte I circa alle equazioni differenziali, i nove Capi, in cui si divide del pari questa Parte II, avranno intitolazioni corrispondenti, e i risultati delle presenti indagini verranno contrassegnati cogli stessi numeri progressivi spettanti alle formule affini della Parte I.

Data l'equazione lineare generale dell'ordine n a differenze finite fra due variabili x, y, che rappresenteremo sotto la forma

$$(1) \qquad A_0 E^n y + A_1 E^{n-1} y + \cdots + A_{n-1} E y + A_n y = X \,,$$

in cui $E^m y$ significa il valore variato m^{esimo} di y, supponiamo che la funzione y_1 della variabile indipendente x sia un valore elementare di y soddisfacente alla equazione consimile priva del 2.° membro

$$(2) \qquad A_0 E^n y + A_1 E^{n-1} y + \cdots + A_{n-1} E y + A_n y = 0 \,.$$

Assumiamo

$$(3) \qquad y = y_1 \Sigma \beta \,,$$

ed avremo per trasformata l'equazione

$$(4) \qquad B_0\,\mathrm{E}^{n-1}\beta + B_1\,\mathrm{E}^{n-2}\beta + \cdots + B_{n-2}\,\mathrm{E}\,\beta + B_{n-1}\beta = X\,,$$

i cui coefficienti verranno espressi nel modo seguente

$$(5)$$

$$B_0 = A_0\,\mathrm{E}^n y_1\,, \qquad B_1 = A_0\,\mathrm{E}^n y_1 + A_1\,\mathrm{E}^{n-1} y_1\,, \qquad B_2 = A_0\,\mathrm{E}^n y_1 + A_1\,\mathrm{E}^{n-1} y_1 + A_2\,\mathrm{E}^{n-2} y_1\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n-1} = A_0\,\mathrm{E}^n y_1 + A_1\,\mathrm{E}^{n-1} y_1 + \cdots + A_{n-1}\,\mathrm{E}^2 y_1 + A_{n-1}\,\mathrm{E}\,y_1 = -\,A_n\,y_1\,.$$

In simil guisa ponendo di mano in mano

$$(6) \qquad \beta = \beta_1 \Sigma \gamma\,, \qquad \gamma = \gamma_1 \Sigma \vartheta\,, \cdots\ \rho = \rho_1 \Sigma \sigma\,, \qquad \sigma = \sigma_1 \Sigma \tau\,,$$

si procederà dall'equazione (4) alle seguenti eguaglianze

$$(7) \qquad C_0\,\mathrm{E}^{n-2}\gamma + C_1\,\mathrm{E}^{n-3}\gamma + \cdots + C_{n-3}\,\mathrm{E}\gamma + C_{n-2}\,\gamma = X\,,$$

$$D_0\,\mathrm{E}^{n-3}\,\delta + D_1\,\mathrm{E}^{n-4}\,\delta + \cdots + D_{n-4}\,\mathrm{E}\,\delta + D_{n-3}\,\delta = X\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_0\,\mathrm{E}\,\sigma + S_1\,\sigma = X\,,$$

$$T_0\,\tau = X\,;$$

intendendo di denotare con β_1, γ_1, $\cdots \sigma_1$ de' valori elementari delle rispettive variabili β, γ, σ che soddisfacciano alle equazioni (4) (7) nella supposizione di $X = 0$. I coefficienti delle equazioni (7) si otterranno di mano in mano mercè relazioni analoghe alle (5), ponendo nelle (5) in luogo di B_0, B_1, $\cdots$ i coefficienti dell'equazione antecedente.

È manifesto dalle relazioni (3) (6), che la terz'ultima delle equazioni (7) offre due valori elementari di ρ soddisfacenti alla stessa equazione nell'ipotesi di $X = 0$. Così pure tre saranno i valori elementari soddisfacenti alla quart'ultima equazione nell'anzidetta ipotesi; di maniera che risalendo all'equazione (2) si troverà che questa equazione è verificata da n valori di y ben distinti fra loro. Tutti questi valori vengono determinati per mezzo de' seguenti integrali ne' quali si può prescindere dalle relative costanti arbitrarie

$$(8)\qquad \begin{aligned} &y_2 = y_1\Sigma\beta_1\,, \quad y_3 = y_1\Sigma\beta_2\,, \cdots y_n = y_1\Sigma\beta_{n-1}\,,\\ &\beta_2 = \beta_1\Sigma\gamma_1\,, \quad \beta_3 = \beta_1\Sigma\gamma_2\,, \cdots \beta_{n-1} = \beta_1\Sigma\gamma_{n-2}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\pi_2 = \pi_1\Sigma\rho_1\,, \quad \pi_3 = \pi_1\Sigma\rho_2\,,\\ &\rho_2 = \rho_1\Sigma\sigma_1\,. \end{aligned}$$

Viceversa se vogliasi dedurre i valori elementari soddisfacenti alle successive equazioni (4) (7) nell' ipotesi di $X=0$, per mezzo degli n valori elementari y_1, y_2, $\cdots y_n$ di y, troviamo (8)

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\beta_1 = \Delta\frac{y_2}{y_1}\,, \quad \beta_2 = \Delta\frac{y_3}{y_1}\,, \cdots\cdots \beta_{n-1} = \Delta\frac{y_n}{y_1}\,,\\ &\gamma_1 = \Delta\frac{\beta_2}{\beta_1}\,, \quad \gamma_2 = \Delta\frac{\beta_3}{\beta_1}\,, \cdots\cdots \gamma_{n-2} = \Delta\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\sigma_1 = \Delta\frac{\rho_2}{\rho_1}\,. \end{aligned}$$

Ciò posto, abbiamo (3) (6)

$$(10)\qquad y = y_1\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\cdots\Sigma\rho_1\Sigma\sigma_1\Sigma\tau\,;$$

e poichè per la 1.^{ma} delle eguaglianze (5) applicata anco alle successive equazioni (7) risulta

$$(11)\qquad B_0 = A_0\,\mathrm{E}^n y_1\,, \quad C_0 = B_0\,\mathrm{E}^{n-1}\beta_1\,, \quad D_0 = C_0\,\mathrm{E}^{n-2}\gamma_1\,, \cdots\cdots T_0 = S_0\,\mathrm{E}\,\sigma_1\,,$$

avremo dal moltiplicare fra loro queste eguaglianze

$$T_0 = A_0\mathrm{E}^n y_1\cdot\mathrm{E}^{n-1}\beta_1\cdot\mathrm{E}^{n-2}\gamma_1\cdots\cdots\mathrm{E}^2\rho_1\cdot\mathrm{E}\,\sigma_1\,,$$

e quindi dall' ultima delle (7) otterremo

$$(12)\qquad \tau = \frac{X}{A_0\mathrm{E}^n y_1\cdot\mathrm{E}^{n-1}\beta_1\cdots\cdots\mathrm{E}^2\rho_1\cdot\mathrm{E}\sigma_1}\,.$$

Sostituendo questo valore di τ, ed i valori (9) di β_1, γ_1, ... σ_1, nella formula (10), si ha l'espressione dovuta pure a Laplace (*Miscellanea Taurinensia* T. IV.) dell'integrale completo dell'equazione (1), mediante gli n valori elementari di y soddisfacenti (2) alla stessa equazione priva del 2.° membro.

L' ultima delle relazioni (5) applicata a ciascuna delle equazioni (7) ci esibisce (2)

$$B_{n-1} = -A_n y_1, \quad C_{n-2} = -B_{n-1}\beta_1, \quad \dots . S_1 = -R_2 \rho_1 .$$

Dal prodotto di queste eguaglianze, e similmente dalla 1.ma delle relazioni (5) applicata alle successive equazioni (7) si deduce

$$S_1 = (-1)^{n-1} A_n y_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \rho_1, \quad S_0 = A_0 E^n y_1 \cdot E^{n-1}\beta_1 \dots . E^2 \rho_1,$$

e conseguentemente

$$(15) \qquad \frac{S_1}{S_0} = \frac{(-1)^{n-1} A_n}{A_0} \frac{y_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \rho_1}{E^n y_1 . E^{n-1}\beta_1 \dots E^2 \rho_1} .$$

Ora avendosi ad evidenza

$$\log E^n y_1 - \log y_1 = \Delta \log \left\{ E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2} y_1 \dots . E y_1 \cdot y_1 \right\},$$

si ricava dalla (13)

$$\log\left\{-\frac{S_1}{S_0}\right\} = \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0} - \Delta \log \left\{ E^{n-1} y_1 . E^{n-2} y_1 \dots E y_1 \cdot y_1 \right\} - \Delta \log \left\{ E^{n-2}\beta_1 \cdots E\beta_1 \cdot \beta_1 \right\}$$

$$- \dots \dots - \Delta \log \left\{ E^2 \pi_1 \cdot E \pi_1 \cdot \pi_1 \right\} - \Delta \log . \left\{ E\rho_1 \cdot \rho_1 \right\} .$$

e si ha quindi integrando

$$\Sigma \log \left\{-\frac{S_1}{S_0}\right\} = \Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0} - \log \left\{ E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(y_1 \beta_1) \cdots E(y_1 \beta_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1 \beta_1 \cdots \rho_1 \right\} .$$

Introducendo questo valore di $\Sigma \log \left(-\frac{S_1}{S_0}\right)$, ed il valore di S_1, che precede l'eguaglianza (13), nella formula

$$\sigma = -e^{\Sigma \log\left\{-\frac{S_1}{S_0}\right\}} \Sigma \left\{ \frac{X}{S_1} e^{-\Sigma \log\left\{-\frac{S_1}{S_0}\right\}} \right\}$$

esprimente l'integrale completo della penultima delle equazioni (7), in cui e rappresenta la base 2, 718 ··· de' logaritmi iperbolici, troviamo

(14)

$$\sigma = \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \Sigma \left\{ \frac{X}{(-1)^n A_n} E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(y_1\beta_1) \cdots E(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \right\}}{E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(y_1\beta_1) \cdots E(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1\beta_1 \cdots \rho_1}.$$

Questa espressione di σ sostituita nella seguente formula, che si deduce dalle progressive eguaglianze (6),

$$(15) \qquad y = y_1 \Sigma \beta_1 \Sigma \gamma_1 \Sigma \cdots \Sigma \rho_1 \Sigma \sigma$$

determina l'integrale completo dell'equazione (1) per mezzo di $n-1$ valori elementari di y. Pertanto il Teorema di Lagrange si avvera anco per le equazioni lineari a differenze finite, come venne osservato da Condorcet e da Laplace (*Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris,* année 1770, p. 108, 135. — *Miscellanea Taurinensia* T. IV, p. 273. — *Mémoires présentés à l'Académie de Paris* T. VII, p. 37.).

Eliminando $\frac{S_1}{S_0}$ fra l'eguaglianza (13) e la penultima delle (7), in cui si supponga $X=0$, e quindi $\sigma=\sigma_1$, si ottiene

$$(16) \qquad (-1)^n \frac{A_n}{A_0} = \frac{E^n y_1 \cdot E^{n-1}\beta_1 \cdot E^{n-2}\gamma_1 \cdots E^2\rho_1 \cdot E\sigma_1}{y_1\beta_1\gamma_1 \cdots \rho_1\sigma_1}$$

$$= e^{\Delta \log \left\{ E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(\gamma_1\beta_1) \cdots E(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1\beta_1 \cdots \sigma_1 \right\}},$$

cioè l'espressione del termine $\frac{A_n}{A_0}$ in funzione (9) degli n valori elementari $y_1, y_2, \cdots y_n$. Il valore di σ_1 dedotto dall'integrazione dell'equazione (16), ch'è lineare di 1.° ordine rapporto a σ_1, si troverà corrispondere a quello esibito nell'ipotesi di $X=0$ dalla formula (14), attesochè per l'analisi precedente è facile riconoscere l'esistenza della seguente equazione identica

$$\Sigma \log \frac{y_1\beta_1\gamma_1 \cdots \rho_1}{E^n y_1 \cdot E^{n-1}\beta_1 \cdots E^2\rho_1} = -\log \left\{ E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(y_1\beta_1) \cdots E(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1\beta_1 \cdots \rho_1 \right\}.$$

Capo II.

Evoluzione delle due formule (10) (15) in integrali semplici.

Onde sviluppare in integrali semplici le formule (10) (15), si divida la (10) per y_1 e se ne prenda la differenza finita, poscia si divida per β_1 e si differenzii di nuovo, e così progressivamente. Dopo $n-1$ differenziazioni si otterrà un'equazione lineare in y dell'ordine $n-1$, il cui secondo membro sarà evidentemente $\sigma_1 \Sigma \tau$; e se immaginiamo introdotte nel 1.° membro le note espressioni lineari delle differenze finite per mezzo delle variate di y; potremo dare a quest'equazione l'aspetto

$$\sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \overset{p}{\mathrm{E}} y = \sigma_1 \Sigma \tau \,, \tag{17}$$

intendendo che $\psi_{p,n}$ rappresenti una determinata funzione di y_1, $y_2 \cdots y_{n-1}$ e de' loro valori variati, e che il segno $\sum_{p=0}^{p=n}$ denoti un aggregato di termini che risultano dalla formula sottoposta colla sostituzione in luogo di p dei valori $0, 1, 2, \cdots n-1$.

Siccome poi dalla (15) ponendovi $X=0$, e prescindendo dalle costanti arbitrarie, si ricava

$$y_n = y_1 \Sigma \beta_1 \Sigma \gamma_1 \Sigma \cdots\cdots \Sigma \rho_1 \Sigma \sigma_1 \,,$$

si avrà nella stessa guisa

$$\sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \overset{p}{\mathrm{E}} y_n = \sigma_1 \,, \tag{18}$$

e per conseguenza

$$\sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \overset{p}{\mathrm{E}} y = \sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \overset{p}{\mathrm{E}} y_n \cdot \Sigma \tau \,. \tag{19}$$

Si chiami C_n la costante arbitraria relativa a $\Sigma\tau$, e si avrà nella supposizione di $X=0$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \mathrm{E}^p y = C_n \sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \mathrm{E}^p y_n ,$$

e poichè in questa ipotesi l'integrale completo dell'equazione (1) diviene, com'è ben noto,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_n y_n ;$$

si otterrà l'equazione identica

$$(20) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \psi_{p,n} \mathrm{E}^p y_m = 0$$

per ciascun valore 1, 2, 3, $\cdots n-1$ di m.

Denotiamo al presente con $\overline{\psi}_{p,n}$, $\overline{\sigma}_1$, $\overline{\tau}$ le funzioni corrispondenti a $\psi_{p,n}$, σ_1, τ, che risultano dall'ordinare in qualunque modo i valori elementari y_1, y_2, $\cdots$, purchè nella loro serie diasi l'ultimo posto ad y_n. Avremo analogamente alle (17), (18)

$$(21) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \overline{\psi}_{p,n} \mathrm{E}^p y = \overline{\sigma}_1 \Sigma \overline{\tau} ,$$

$$(22) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \overline{\psi}_{p,n} \mathrm{E}^p y_n = \overline{\sigma}_1 ,$$

e quindi otterremo (19)

$$\sum_{p=0}^{p=n} \overline{\psi}_{p,n} \mathrm{E}^p y = \sum_{p=0}^{p=n} \overline{\psi}_{p,n} \mathrm{E}^p y_n \Sigma \overline{\tau} .$$

Questa eguaglianza dovendo essere soddisfatta, nell'ipotesi di $X=0$, da $y=C_n y_n$ ci mostra, che la costante arbitraria relativa a $\Sigma \overline{\tau}$ è la stessa che quella di $\Sigma \tau$.

In conseguenza col sottrarre l'una dall'altra le due equazioni (17) (21), dopo di averle divise rispettivamente per σ_1, $\overline{\sigma}_1$, otterremo nell'ipotesi di $X=0$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\psi_{p,n}}{\sigma_1} - \frac{\overline{\psi}_{p,n}}{\overline{\sigma}_1} \right\} \mathrm{E}^p y = 0 ;$$

e poichè questa equazione dell' ordine $n-1$ è soddisfatta da una espressione di y che contiene n costanti arbitrarie, concluderemo che la predetta equazione è per se stessa identica, e si avrà quindi identicamente

$$\frac{\overline{\psi}_{p,n}}{\overline{\sigma}_1} = \frac{\psi_{p,n}}{\sigma_1}, \tag{23}$$

e perciò (17) (21)

$$\overline{\tau} = \tau;$$

di maniera che le funzioni $\frac{\psi_{p,n}}{\sigma_1}$, τ sono simmetriche rapporto ad y_1, y_2, ... y_{n-1}, purchè nella serie de'valori elementari di y si tenga per ultimo y_n. Siccome poi si avrebbe nel formare la (17)

$$\frac{\psi_{n-1,n}}{\sigma_1} = \frac{1}{E^{n-1}y_1 \cdot E^{n-2}\beta_1 \cdots E\rho_1 \cdot \sigma_1},$$

ne segue essere $E^{n-1}y_1 \cdot E^{n-2}\beta_1 \cdots\cdots E\rho_1 \cdot \sigma_1$ funzione simmetrica di y_1, y_2, ... y_{n-1}, ritenuto per ultimo y_n. Lo stesso si potrà dire della variata di questa funzione, e ciò conferma l' invariabilità testè dimostrata della funzione τ (12) rapporto a' valori elementari che precedono l' ultimo y_n.

Ora denotando in generale con $\psi_{p,(q)}$, $\sigma_{1,(q)}$, $\tau_{(q)}$ le funzioni corrispondenti a quelle già denotate con $\psi_{p,n}$, σ_1, τ, allorchè nella serie de' valori elementari si tiene per ultimo y_q, avremo in conformità alla (17)

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\psi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(2)}} E^p y = \Sigma\, \tau_{(1)},$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\psi_{p,(2)}}{\sigma_{1,(2)}} E^p y = \Sigma\, \tau_{(2)},$$

. . . .

$$\sum_{p=0}^{p=n} \frac{\psi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} E^p y = \Sigma\, \tau_{(n)}.$$

Queste equazioni rispettivamente moltiplicate per y_1, y_2, $\cdots$ y_n e sommate insieme ci esibiscono

(24)

$$\sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\psi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y_1 + \cdots + \frac{\psi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} y_n \right\} \mathrm{E}^p y = y_1 \Sigma \tau_{(1)} + y_2 \Sigma \tau_{(2)} + \cdots + y_n \Sigma \tau_{(n)} .$$

Ma per $X=0$ il 2.° membro di questa eguaglianza diviene

$$C_1 y_1 + C_2 y + \cdots + C_n y_n = y ;$$

abbiamo dunque nella detta ipotesi l' equazione dell' ordine $n-1$

$$\sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\psi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y_1 + \cdots + \frac{\psi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} y_n \right\} \mathrm{E}^p y = y ,$$

la quale, verificandosi per una espressione di y dotata di n costanti arbitrarie, sarà per se stessa identica. Quindi la formula

$$(25) \qquad \frac{\psi_{p,(1)}}{\sigma_{1,(1)}} y_1 + \frac{\psi_{p,(2)}}{\sigma_{1,(2)}} y_2 + \cdots + \frac{\psi_{p,(n)}}{\sigma_{1,(n)}} y_n$$

risulta eguale all' unità per $p=0$, e si annulla per ogni altro valore 1, 2, $\cdots$ $n-1$ di p. Conseguentemente raccogliamo dall' equazione (24) per integrale completo dell' equazione (1)

$$(26) \qquad y = y_1 \Sigma \tau_{(1)} + y_2 \Sigma \tau_{(2)} + \cdots + y_n \Sigma \tau_{(n)} ,$$

e questa formula dovuta a Laplace ci presenta lo sviluppo in integrali semplici dell' espressione (10).

L' uso della formula (26) richiederebbe, oltre la determinazione di $\tau_{(n)}$, altrettanti calcoli non meno laboriosi per conseguire ciascun' altra funzione $\tau_{(n-1)}$, $\tau_{(n-2)}$, $\cdots$ $\tau_{(1)}$. Ma nel Cap. III esporremo alcune relazioni, mercè le quali, dopo di avere calcolato $\tau_{(n)}$, si rende più facile assegnare tutte l' altre funzioni poste sotto i segni di integrazione. Queste verranno altresì espresse (Cap. V) per mezzo di formule alternate o determinanti.

Consideriamo in generale la serie di m valori elementari y_1, y_2, $\cdots$ y_m, e formando i valori di β_1, β_2, $\cdots$ β_{m-1}, γ_1, $\gamma_2 \cdots \eta_1$ colla legge accennata dalle eguaglianze (9), giungeremo mercè le formule (5), che servono a formare i coefficienti delle successive equazioni (7), all'equazione lineare

$$(27) \qquad H_0 \mathrm{E}^{n-m} \vartheta + H_1 \mathrm{E}^{n-m-1} \vartheta + \cdots + H_{n-m-1} \mathrm{E} \vartheta + H_{n-m} \vartheta = X ,$$

il cui integrale completo sarà per le relazioni (3) (6)

$$(28) \qquad y = y_1 \Sigma \beta_1 \Sigma \gamma_1 \Sigma \cdots \Sigma \eta_1 \Sigma \vartheta ,$$

e si potrà sviluppare del pari in integrali semplici. Imperocchè differenziando replicatamente l'eguaglianza (20) in maniera da togliere i segni d'integrazione, fuori dell'ultimo, troveremo analogamente alla (17)

$$(29) \qquad \sum_{p=0}^{p=m} \psi_{p,m} \mathrm{E}^p y = \eta_1 \Sigma \vartheta ,$$

ed in conformità alla (18) otterremo

$$(30) \qquad \sum_{p=0}^{p=m} \psi_{p,m} \mathrm{E}^p y_m = \eta_1 .$$

La funzione $\frac{\psi_{p,m}}{\eta_1}$ come la (23) si troverebbe simmetrica rapporto ad y_1, y_2, $\cdots$ y_{m-1}, cioè non cangia finchè nella serie de' valori elementari di y, co' quali si formano le quantità β_1, β_2, $\cdots$ β_{m-1}, γ_1, $\gamma_2 \cdots \eta_1$ (9), si tenga per ultimo y_m. Lo stesso si potrà dire della funzione ϑ, e quindi anco de' coefficienti dell'equazione (27), che determina ϑ. Se poi denotiamo con $\psi_{p,(r)}$ $\eta_{1,(r)}$, $\vartheta_{(r)}$ le funzioni $\psi_{p,m}$, η_1, ϑ, allorchè nella serie de' valori y_1, y_2, $\cdots$ y_m si attribuisce l'ultimo posto ad y_r, si troverà analogamente alla (25) che la formula

$$(31) \qquad \frac{\psi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}} y_1 + \frac{\psi_{p,(2)}}{\eta_{1,(2)}} y_2 + \cdots + \frac{\psi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}} y_m$$

equivale all'unità per $p = 0$, e si annulla pegli altri valori 1, 2, 3, $\cdots\cdots$ $m-1$ di p.

Pertanto col moltiplicare rispettivamente per y_1, y_2, $\cdots y_m$ e sommare insieme le seguenti equazioni, che si deducono dalla (29) ritenendo a vicenda per ultimo nella serie de' predetti valori y_1, y_2, ecc., cioè

$$\sum_{p=o}^{p=m} \frac{\psi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}} E^p y = \Sigma\, \vartheta_{(1)} ,$$

$$\sum_{p=o}^{p=m} \frac{\psi_{p,(2)}}{\eta_{1,(2)}} E^p y = \Sigma\, \vartheta_{(2)} ,$$

. . . .

$$\sum_{p=o}^{p=m} \frac{\psi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}} E^p y = \Sigma\, \vartheta_{(m)} ,$$

ricaveremo evidentemente (31)

$$(32) \qquad y = y_1\, \Sigma\, \vartheta_{(1)} + y_2\, \Sigma\, \vartheta_{(2)} + \cdots + y_m\, \Sigma\, \vartheta_{(m)} \,.$$

Le relazioni esprimenti $\vartheta_{(1)}$, $\vartheta_{(2)}$, $\cdots$ $\vartheta_{(m-1)}$ per mezzo di $\vartheta_{(m)}$ verranno pure esposte fra poco nel Cap. III.

Supponiamo $m=n-1$, ed otterremo dalla (32)

$$(33) \qquad y = y_1\, \Sigma\, \sigma_{(1)} + y_2\, \Sigma\, \sigma_{(2)} + \cdots + y_{n-1}\, \Sigma\, \sigma_{(n-1)} \,.$$

Le quantità $\sigma_{(n-2)}$, $\sigma_{(n-3)}$, $\cdots$ $\sigma_{(1)}$ comprese in questa formula, ch' è lo sviluppo della (15), si troveranno del pari espresse (Cap. III) per mezzo di $\sigma_{(1)}$. Vedremo poscia (Cap. V), in qual modo le funzioni poste sotto i segni d' integrazione nella (33) si possono esprimere col mezzo di funzioni alternate o determinanti. Il valore di $\sigma_{(n-1)}$ ossia di σ è assegnato dalla formula (14).

Mutando σ in σ_1 nella (15), e sopprimendo le costanti arbitrarie, si avrebbe il valore di y_n, come venne altra volta osservato (Cap. II). In conseguenza se denotiamo con $\sigma_{1,(q)}$ la funzione corrispondente a σ_1, allorchè nella serie de' valori elementari y_1, y_2, $\cdots y_{n-1}$, da cui dipende, si attribuisce l' ultimo posto ad y_q, avremo dalla (33) il seguente valore di y_n espresso pegli altri valori elementari di y

$$(34) \qquad y_n = y_1\, \Sigma\, \sigma_{1,(1)} + y_2\, \Sigma\, \sigma_{1,(2)} + \cdots + y_{n-1}\, \Sigma\, \sigma_{1,(n-1)} \,.$$

In questa formula non è mestieri di aggiungere agli integrali finiti alcuna

costante arbitraria. L' espressione di σ_1 ossia di $\sigma_{1,(n-1)}$ è data dalla formula (14), allorchè vi si ponga $X=0$, cosicchè denotando con K una costante arbitraria avremo

$$(35)\qquad \sigma_1 = \frac{K\, e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(y_1\beta_1) \cdots E\,(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1\beta_1 \cdots \rho_1} \,.$$

Questo valore di σ_1 introdotto nella (12) ci esibisce

$$(36)\qquad \tau = \frac{X}{(-1)^n A_n K}\, e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}\, E^{n-1} y_1 E^{n-2}(y_1\beta_1) \cdots E\,(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) \,.$$

Sostituendo i valori (35) (36) di σ_1, τ nell' ultima delle formule (6) troviamo riprodotta l' espressione (14). Se poi si voglia introdurre il valore (36) di τ ossia di $\tau_{(n)}$ nella formula (26), la costante K assumerà un valore determinato, che sarà quello (35) della espressione equivalente

$$E^n y_1 \cdot E^{n-1}(y_1\beta_1) \cdots E\,(y_1\beta_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1\beta_1 \cdots \rho_1\sigma_1\, e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}$$

allorchè vi sieno sostituite le funzioni di x esprimenti i valori elementari y_1, y_2, $\cdots$ y_n.

Capo III.

Trasformazione d'ogni integrale finito replicato, da cui risulta l'evoluzione d'un integrale d'ordine n *in integrali semplici. Modo di calcolare le quantità sottoposte a' segni di integrazione nelle formule* (26) (32) (33) *per mezzo di una sola di dette funzioni.*

Dal calcolo delle differenze finite avendosi

$$\Delta \left\{ \Sigma \beta_1 \times \Sigma \gamma \right\} = \left\{ \Sigma \gamma + \gamma \right\} E\,\Sigma \beta_1 - \Sigma \beta_1 \times \Sigma \gamma = \beta_1 \Sigma \gamma + \gamma\, E\,\Sigma \beta_1 \,,$$

se ne deduce coll' integrazione

$$\Sigma\beta_1\Sigma\gamma = \Sigma\beta_1 \times \Sigma\gamma - \Sigma\gamma E \Sigma\beta_1 \,. \tag{37}$$

Questa formula analoga a quella, che serve ad integrare per parti le funzioni differenziali, ci somministra

$$\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta = \Sigma\beta_1 \left\{ \Sigma\gamma_1 \times \Sigma\delta - \Sigma\delta E \Sigma\gamma_1 \right\}$$

$$= \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 \times \Sigma\delta - \Sigma\beta_1 \times \Sigma\delta E \Sigma\gamma_1 - \Sigma\delta E \left\{ \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 - \Sigma\gamma_1 \times \Sigma\beta_1 \right\},$$

per cui sostituendo a $\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1$ il relativo sviluppo (37) avremo

$$\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta = \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 \times \Sigma\delta - \Sigma\beta_1 \times \Sigma\delta E \Sigma\gamma_1 + \Sigma\delta E \Sigma\gamma_1 E \Sigma\beta_1 \,. \tag{38}$$

Successivamente troviamo

$$\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1\Sigma\zeta = \Sigma\beta_1 \left\{ \Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1 \times \Sigma\zeta - \Sigma\gamma_1 \times \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 + \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 E \Sigma\gamma_1 \right\}$$

$$= \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1 \times \Sigma\zeta - \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 \times \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 + \Sigma\beta_1 \times \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 E \Sigma\gamma_1$$

$$- \Sigma\zeta E \left\{ \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1 - \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1 \times \Sigma\delta_1 + \Sigma\beta_1 \times \Sigma\delta_1 E \Sigma\gamma_1 \right\},$$

e quindi introducendo in luogo di $\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1$ il corrispondente sviluppo (38) dedurremo

$$\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1\Sigma\zeta = \Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\delta_1 \times \Sigma\zeta - \Sigma\beta_1\Sigma\gamma \times \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 \tag{39}$$

$$+ \Sigma\beta_1 \times \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 E \Sigma\gamma_1 - \Sigma\zeta E \Sigma\delta_1 E \Sigma\gamma_1 E \Sigma\beta_1 \,.$$

In generale per ogni integrale finito moltiplice d'un ordine m risulta il seguente modo di evoluzione

$$\Sigma\beta_1\Sigma\gamma_1\Sigma\cdots\Sigma\zeta_1\Sigma\eta_1\Sigma\vartheta = \Sigma\beta_1\Sigma\cdots\Sigma\eta_1 \times \Sigma\vartheta - \Sigma\beta_1\Sigma\cdots\Sigma\zeta_1 \times \Sigma\vartheta E \Sigma\eta_1 \tag{40}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^{m-2} \Sigma\beta_1 \times \Sigma\vartheta E \Sigma\eta_1 E \Sigma\zeta_1 E \Sigma\cdots E \Sigma\gamma_1$$

$$+ (-1)^{m-1} \times \Sigma\vartheta E \Sigma\eta_1 E \Sigma\cdots E \Sigma\gamma_1 E \Sigma\beta_1 \,,$$

essendo palese dal modo con cui si dedussero queste formule, che non conviene aggiungere costanti arbitrarie fuorchè agli integrali immediatamente

preceduti da' segni $\times$ di moltiplicazione, e che ogni segno Σ, E si estende a tutta la formula successiva fino all' incontro d' uno de' segni $-$, $+$, $\times$.

Ponendo nella formula (40) $\beta_1 = \gamma_1 = \eta_1 = 1$, $\vartheta = X$ ne ricaviamo, a cagione dell' identità

$$\mathrm{E}\,\Sigma\,\mathrm{E}^{r-1}\,\Sigma^{r-1}\,1 = \mathrm{E}^r\,\Sigma^r\,1\,,$$

(40 , A)

$$\Sigma^m X = \Sigma^{m-1}1 \times \Sigma X - \Sigma^{m-2}1 \times \Sigma X \mathrm{E}\,\Sigma_1 + \Sigma^{m-3}1 \times \Sigma X \mathrm{E}^2\,\Sigma^2 1$$

$$- \cdots + (-1)^{m-2}\Sigma 1 \times \Sigma X \mathrm{E}^{m-2}\,\Sigma^{m-2}1 + (-1)^{m-1} \times \Sigma X \mathrm{E}^{m-1}\,\Sigma^{m-1}1\,.$$

Secondo l'osservazione poc' anzi espressa conviene sostituire in questa formula agli integrali replicati dell' unità i loro valori calcolati senza mai aggiungere costante arbitraria. Ora nell' ipotesi di $\Delta x = h$ costante si avrebbe in conseguenza

$$\Sigma\,1 = \frac{x}{h}\,, \qquad \Sigma^2\,1 = \frac{\Sigma x}{h} = \frac{1}{2}\frac{x}{h^2} - \frac{1}{2}\frac{x}{h}\,,$$

$$\Sigma^3\,1 = \frac{1}{2h^2}\,\Sigma x^2 - \frac{1}{2h}\,\Sigma x = \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{h^3} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{x}{h}\,,$$

$$\Sigma^4\,1 = \frac{1}{2.3.4}\frac{x^4}{h^4} - \frac{1}{4}\frac{x^3}{h^3} + \frac{11}{2.3.h^2}\frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{4}\frac{x}{h}\,,$$

ecc.

$$\mathrm{E}\,\Sigma\,1 = 2\left\{\frac{1}{2}\frac{x}{h} + \frac{1}{2}\right\}, \qquad \mathrm{E}^2\,\Sigma^2\,1 = 3\left\{\frac{x^2}{2.3.h^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{h} + \frac{1}{3}\right\},$$

$$\mathrm{E}^3\,\Sigma^3\,1 = 4\left\{\frac{1}{2.3.4}\frac{x^3}{h^3} + \frac{1}{4}\frac{x^2}{h^2} + \frac{11}{2.3.4}\frac{x}{h} + \frac{1}{4}\right\},$$

ecc.

Per ogni altra supposizione relativa a Δx è abbastanza chiaro, che converrebbe introdurre in queste formule $\Sigma\,1$ in luogo di $\frac{x}{h}$. Ma per darne una facile dimostrazione, e trovare la legge con cui procedono le dette formule,

possiamo dedurre (37) dalla integrazione per parti, senza mai aggiungere costante arbitraria,

$$\Sigma E \Sigma 1 = \Sigma 1 \times E \Sigma 1 - \Sigma E \Sigma 1 ,$$

e quindi

$$2 \Sigma E \Sigma 1 = \Sigma 1 \times E \Sigma 1 ,$$

poscia

$$\Sigma E \Sigma E \Sigma 1 = \Sigma 1 \times E \Sigma E \Sigma 1 - \Sigma E (E \Sigma 1 \times \Sigma 1)$$

$$= \Sigma 1 \times E \Sigma E \Sigma 1 - 2 \Sigma E \Sigma E \Sigma 1 ,$$

cioè

$$3 \Sigma E \Sigma E \Sigma 1 = \Sigma 1 \times E \Sigma E \Sigma 1 ,$$

e in generale

$$r E^{r-1} \Sigma^r 1 = \Sigma 1 \times E^{r-1} \Sigma^{r-1} 1 ,$$

ovvero

$$r E^r \Sigma^r 1 = E \Sigma 1 \times E \left\{ E^{r-1} \Sigma^{r-1} 1 \right\} .$$

Conseguentemente otterremo

$$(40 , B) \qquad E^r \Sigma^r 1 = \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots r} E \Sigma 1 \times E^2 \Sigma 1 \times E^3 \Sigma 1 \times \cdots \times E^r \Sigma 1$$

$$= \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots r} (\Sigma 1 + 1)(\Sigma 1 + 2)(\Sigma 1 + 3) \cdots (\Sigma 1 + r) ,$$

e quindi retrovariando questa espressione r volte, e denotando con E^{-r} un numero r di retrovariazioni, si avrà pure

$$(40 , C) \qquad \Sigma^r 1 = \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots r} E^{-r+1} \Sigma 1 \times E^{-r+2} \Sigma 1 \times \cdots \times E^{-1} \Sigma 1 \times \Sigma 1$$

$$= \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots r} (\Sigma 1 - r + 1)(\Sigma 1 - r + 2)(\Sigma 1 - r + 3) \cdots (\Sigma 1 - 1) \Sigma 1 .$$

Colla sostituzione di queste espressioni di $\Sigma^r 1$, $E^r \Sigma^r 1$ nello sviluppo (40 , A) di $\Sigma^m X$ troviamo questo integrale moltiplice sviluppato nel modo seguente

(40 , D)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \Sigma^m X = (\Sigma 1 - m + 2)(\Sigma 1 - m + 3) \cdots (\Sigma 1 - 1) \Sigma 1 \times \Sigma X$$

$$- (m-1)(\Sigma 1 - m + 3) \cdots (\Sigma 1 - 1) \Sigma 1 \cdot \Sigma \overline{X (\Sigma 1 + 1)}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{2} (\Sigma 1 - m + 4) \cdots (\Sigma 1 - 1) \Sigma 1 \cdot \Sigma \overline{X (\Sigma 1 + 1)(\Sigma 1 + 2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{m-1} \times \Sigma \overline{X (\Sigma 1 + 1)(\Sigma 1 + 2) \cdots (\Sigma 1 + m - 1)} .$$

Si dedurrebbe quindi in particolare

$$\Sigma^2 X = (\Sigma 1 - 1)\,\Sigma X - \Sigma X \Sigma 1\,,$$

$$1\cdot 2\,\Sigma^3 X = (\overline{\Sigma 1}^2 - 3\,\Sigma 1 + 2)\,\Sigma X - (2\,\Sigma 1 - 3)\,\Sigma X \Sigma 1 + \Sigma X \overline{\Sigma 1}^2,$$

$$1\cdot 2\cdot 3\,\Sigma^4 X = (\overline{\Sigma 1}^3 - 6\,\overline{\Sigma 1}^2 + 11\,\Sigma 1 - 6)\,\Sigma X - (3\,\overline{\Sigma 1}^2 - 12\,\Sigma 1 + 11)\,\Sigma X \Sigma 1$$
$$+ (3\,\Sigma 1 - 6)\,\Sigma X \overline{\Sigma 1}^2 - \Sigma X \overline{\Sigma 1}^3, \qquad \text{ecc.}$$

Supponiamo ora che β_1, γ_1, $\cdots \eta_1$ nella (40) sieno le quantità in funzione delle quali si esprimono y_1, y_3, $\cdots\cdots y_m$, mediante le relazioni (8). Moltiplicando l'espressione (40) per y_1 avremo (28)

$$y = y_m\,\Sigma\vartheta - y_{m-1}\,\Sigma\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1 + y_{m-2}\,\Sigma\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1 - \cdots\cdots$$
$$+ (-1)^{m-2} y_2\,\Sigma\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\cdots\mathrm{E}\,\Sigma\gamma_1 + (-1)^{m-1} y_1\,\Sigma\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\cdots\mathrm{E}\,\Sigma\beta_1\,,$$

e dal confronto di questa formula colla (32) si verrà a conseguire

$$(41)$$

$$\vartheta_{(m)} = \vartheta\,, \qquad \vartheta_{(m-1)} = -\,\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,, \qquad \vartheta_{(m-2)} = \vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1\,, \cdots\cdots$$
$$\vartheta_{(2)} = (-1)^{m-2}\,\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1\mathrm{E}\,\Sigma\cdots\mathrm{E}\,\Sigma\gamma_1\,, \quad \vartheta_{(1)} = (-1)^{m-1}\,\vartheta\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\cdots\mathrm{E}\,\Sigma\beta_1\,.$$

Ma per la trasformazione (40) abbiamo

$$\Sigma\zeta_1\,\Sigma\eta_1 = \Sigma\zeta_1 \times \Sigma\eta_1 - \Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1\,,$$

$$\Sigma\delta_1\Sigma\zeta_1\Sigma\eta_1 = \Sigma\delta_1\Sigma\zeta_1 \times \Sigma\eta_1 - \Sigma\delta_1 \times \Sigma\eta_1\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1 + \Sigma\eta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1\mathrm{E}\,\Sigma\delta_1\,; \qquad \text{ecc.}$$

in conseguenza introducendo nelle formule (41) i valori di $\Sigma\eta_1\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1$, $\Sigma\eta\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1\,\mathrm{E}\,\Sigma\delta_1$, ecc. desunti da queste eguaglianze, e ricordando le relazioni (8), ne ricaveremo

$$(42) \qquad \begin{aligned} -\,\vartheta_{(m-1)} &= \vartheta_{(m)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\eta_1\,,\\ -\,\vartheta_{(m-2)} &= \vartheta_{(m-1)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_1 + \vartheta_{(m)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\zeta_2\,,\\ -\,\vartheta_{(m-3)} &= \vartheta_{(m-2)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\delta_1 + \vartheta_{(m-1)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\delta_2 + \vartheta_{(m)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\delta_3\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -\,\vartheta_{(1)} &= \vartheta_{(2)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\beta_1 + \vartheta_{(3)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\beta_2 + \cdots\cdots + \vartheta_{(m)}\,\mathrm{E}\,\Sigma\beta_{m-1}\,, \end{aligned}$$

vale a dire (8)

$$(43) \qquad -\vartheta_{(m-1)} = \vartheta_{(m)}\, \mathrm{E}\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\,,$$

$$-\vartheta_{(m-2)} = \vartheta_{(m-1)}\, \mathrm{E}\frac{\delta_2}{\delta_1} + \vartheta_{(m)}\, \mathrm{E}\frac{\delta_1}{\delta_1}\,,$$

$$-\vartheta_{(m-3)} = \vartheta_{(m-2)}\, \mathrm{E}\frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1} + \vartheta_{(m-1)}\, \mathrm{E}\frac{\Upsilon_3}{\Upsilon_1} + \vartheta_{(m)}\, \mathrm{E}\frac{\Upsilon_4}{\Upsilon_1}\,,$$

. . . .

$$-\vartheta_{(1)} = \vartheta_{(2)}\, \mathrm{E}\frac{y_2}{y_1} + \vartheta_{(3)}\, \mathrm{E}\frac{y_3}{y_1} + \cdots\cdots + \vartheta_{(m)}\, \mathrm{E}\frac{y_m}{y_1}\,.$$

Alla stessa guisa, ponendo $m = n - 1$, avremo

$$(44) \qquad -\sigma_{(n-2)} = \sigma_{(n-1)}\, \mathrm{E}\frac{\pi_2}{\pi_1}\,,$$

$$-\sigma_{(n-3)} = \sigma_{(n-2)}\, \mathrm{E}\frac{\xi_2}{\xi_1} + \sigma_{(n-1)}\, \mathrm{E}\frac{\xi_3}{\xi_1}\,,$$

. . . .

$$-\sigma_1 = \sigma_{(2)}\, \mathrm{E}\frac{y_2}{y_1} + \sigma_{(3)}\, \mathrm{E}\frac{y_3}{y_1} + \cdots\cdots + \sigma_{(n-1)}\, \mathrm{E}\frac{y_{n-1}}{y_1}\,,$$

e queste relazioni avranno pur luogo, se a $\sigma_{(n-1)}$, $\sigma_{(n-2)}$, $\cdots$ $\sigma_{(1)}$ sostituiamo i rispettivi valori $\sigma_{1,(n-1)}$, $\sigma_{1,(n-2)}$, $\cdots\cdots$ $\sigma_{1,(1)}$ che assumono nell'ipotesi di $X = 0$.

Così pure per $m = n$ troviamo

$$(45) \qquad -\tau_{(n-1)} = \tau_{(n)}\, \mathrm{E}\frac{\rho_2}{\rho_1}\,,$$

$$-\tau_{(n-2)} = \tau_{(n-1)}\, \mathrm{E}\frac{\pi_2}{\pi_1} + \tau_{(n)}\, \mathrm{E}\frac{\pi_3}{\pi_1}\,,$$

. . . .

$$-\tau_{(1)} = \tau_{(2)}\, \mathrm{E}\frac{y_2}{y_1} + \tau_{(3)}\, \mathrm{E}\frac{y_3}{y_1} + \cdots\cdots + \tau_{(n)}\, \mathrm{E}\frac{y_n}{y_1}\,.$$

Le relazioni (44), (45) rendono più facile l'applicazione delle formule (26), (33) allo sviluppo dell'integrale completo dell'equazione (1) in ambedue i casi in cui si conoscono n, od $n-1$ valori elementari di y. Ci resta ad esporre il modo di esprimere le funzioni sottoposte a' segni d'integrazione nelle formule (26) (33) per mezzo di funzioni determinanti od alternate de' valori y_1, y_2, ecc., e delle loro variate.

Capo IV.

Nuova forma dell' integrale completo d'una equazione lineare a differenze finite espresso in funzione de' valori elementari soddisfacenti all' equazione medesima col secondo membro ridotto a zero.

Mediante le relazioni (5), e quelle che similmente hanno luogo per ciascuna delle equazioni (7), si potrebbe determinare, oltre di $\frac{A_n}{A_0}$ (16), anco $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \cdots \frac{A_{n-1}}{A_0}$ in funzione di y_1, β_1, $\cdots \sigma_1$ (9), e quindi di y_1, y_2, $\cdots\cdots y_n$. Ma se si voglia simultaneamente ottenere le espressioni di tutti que' coefficienti, si potrà ricavarle dalle n eguaglianze

$$
(46) \qquad \begin{aligned}
&\mathrm{E}^n y_1 + \frac{A_1}{A_0}\mathrm{E}^{n-1} y_1 + \frac{A_2}{A_0}\mathrm{E}^{n-2} y_1 + \cdots\cdots + \frac{A_n}{A_0} y_1 = 0\,, \\
&\mathrm{E}^n y_2 + \frac{A_1}{A_0}\mathrm{E}^{n-1} y_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{A_n}{A_0} y_2 = 0\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\mathrm{E}^n y_n + \frac{A_1}{A_0}\mathrm{E}^{n-1} y_n + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{A_n}{A_0} y_n = 0\,,
\end{aligned}
$$

che provengono dalla (2) colla sostituzione degli n valori elementari in luogo di y. Ora, com' è ben noto, la frazione esprimente una qualunque $\frac{A_m}{A_0}$ delle

quantità richieste presa negativamente ha per denominatoré la funzione alternata o determinante, che rappresenteremo con

$$\Sigma \left\{ \pm E^{n-1} y_n \cdot E^{n-2} y_{n-1} \cdots E y_2 \cdot y_1 \right\},$$

i cui termini si svolgono l'uno dall'altro, e dal primo termine $E^{n-1} y_n \cdot E^{n-2} y_{n-1} \cdots E y_2 \cdot y_1$, col distribuire in tutti i modi possibili le quantità $y_1, y_2, \cdots y_n$ sotto gli indici fissi $n-1, n-2, \cdots 1, 0$ delle variate, oppure coll'applicare ne' varj modi possibili quest'indici delle variate al di sopra de' valori elementari disposti nell'ordine retrogrado degl'indici $n, n-1, n-2, \cdots 2, 1$, avvertendo di mutar il segno, ogni qualvolta da un dato termine si passa ad un altro mediante un numero dispari di permutazioni. Il numeratore di detta frazione si deduce poi dal denominatore mutandovi in ogni termine l'indice della variata $(n-m)^{esima}$ nell'indice n.

Denotando rispettivamente con $\omega^{\overline{n-1,0}}$, $\omega_{\overline{n,1}}$ i risultati eguali de'due modi di alternazione testè accennati, abbiamo pertanto

$$(47) \qquad \omega^{\overline{n-1,0}} = \omega_{\overline{n,1}} = \Sigma \left\{ \pm E^{n-1} y_n \cdot E^{n-2} y_{n-1} \cdots E y_2 \cdot y_1 \right\}.$$

Ove poi si tratti d'indicare il risultato della sostituzione d'un indice r all'indice m d'una variata, ovvero dell'indice r ad un indice inferiore m, adopreremo le rispettive notazioni

$$\omega^{\overline{n-1,0}}_{m)r} \qquad \omega^{m)r}_{\overline{n,1}}.$$

Abbiamo dunque

$$(48) \qquad -\frac{A_m}{A_0} = \frac{\omega^{n-m)n}_{\overline{n,1}}}{\omega_{\overline{n,1}}},$$

e per l'anzidetta legge di composizione delle funzioni determinanti troviamo

$$(49)$$

$$\omega^{\overline{n-1,0}} = E^{n-1} y_n \cdot \omega^{\overline{n-2,0}} - E^{n-1} y_{n-1} \cdot \omega^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n} - E^{n-1} y_{n-2}\, \omega^{\overline{n-2,0}}_{n-2)n} - \ldots - E^{n-1} y_1 \cdot \omega^{\overline{n-2,0}}_{1)n}.$$

Pongasi nella (48) $m = n$, e si avrà

$$(50) \qquad -\frac{A_n}{A_0} = \frac{\omega^{0)\,n}_{\overline{n,1}}}{\omega_{\overline{n,1}}}\,.$$

Ora per le stabilite notazioni avendosi

$$\omega^{0)\,n}_{\overline{n,1}} = \Sigma \left\{ \pm E^{n-1}y_n \cdot E^{n-2}y_{n-1} \cdots E\,y_2 \cdot E^n y_1 \right\},$$

e dal termine $E^{n-1}y_n \cdot E^{n-2}y_{n-1} \cdots E\,y_2 \cdot E^n y_1$ deducendosi $E^n y_n \cdot E^{n-1}y_{n-1} \cdots$ $\cdots E^2 y_2 \cdot E\,y_1$, mediante un numero $n-1$ di permutazioni, cioè coll'alternare n con $n-1$, poi $n-1$ con $n-2$ ecc., ed infine 2 con 1, ne viene di conseguenza

$$\omega^{0)\,n}_{\overline{n,1}} = (-1)^{n-1}\, \Sigma \left\{ \pm E^n y_n \cdot E^{n-1} y_{n-1} \cdots E^2 y_2 \cdot E\,y_1 \right\} = (-1)^{n-1}\, E\,\omega_{\overline{n,1}}\,,$$

e quindi (47) (50)

$$(51) \qquad (-1)^n \frac{A_n}{A_0} = \frac{E\,\omega^{\overline{n-1,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}} = e^{\Delta \log.\, \omega^{\overline{n-1,0}}}\,.$$

Osserveremo ancora, che per la legge con cui si forma la funzione determinante (49), se si muta dovunque un indice, che supporremo essere l'indice superiore $n-1$, in un altro qualunque di quelli che si trovano nel medesimo rango, si ha un risultato evidentemente nullo, cosicchè si avrebbe

$$E^p y_n \cdot \omega^{\overline{n-2,0}} - E^p y_{n-1} \cdot \omega^{\overline{n-2,0}}_{n-1)\,n} - E^p y_{n-2} \cdot \omega^{\overline{n-2,0}}_{n-2)\,n} - \cdots\cdots - E^p y_1 \cdot \omega^{\overline{n-2,0}}_{1)\,n}$$

per ogni valore $n-2$, $n-3$, $\cdots$ 2, 1, 0 di p diverso da $n-1$. Quindi prendendo la variata $(q)^{esima}$ di questa equazione identica, e ponendo $p = n-q-1$ sarà facile rinvenire, mercè la nota espressione d'ogni variata per le differenze finite,

$$(52)$$

$$E^{n-1}y_n \cdot \Delta\, \omega^{\overline{n-2,0}} - E^{n-1}y_{n-1} \cdot \Delta\, \omega^{\overline{n-2,0}}_{n-1)\,n} - \cdots - E^{n-1}y_1 \cdot \Delta^q\, \omega^{\overline{n-2,0}}_{1)\,n} = (-1)^q\, \omega^{\overline{n-1,0}}$$

pe' valori $1, 2, 3, \cdots n-1$ di q. Ponendo invece $p = n-r-q$ si avrebbe

$$E^{n-r} y_n \cdot \Delta^q \overline{\omega^{n-2,0}} - E^{n-r} y_{n-1} \cdot \Delta^q \overline{\omega^{n-2,0}_{n-1)n}} - \cdots - E^{n-r} y_1 \cdot \Delta^q \overline{\omega^{n-2,0}_{1)n}} = 0 .$$

pe' valori $2, 3, \cdots n$ di r, e per ciascun valore $0, 1, 2, \cdots n-r$ di q.

Il confronto delle due formule (16) (50) ci addita che il rapporto

$$\frac{E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2} (y_1 \beta_1) \cdot E^{n-3} (y_1 \beta_1 \gamma_1) \cdots E (y_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1 \beta_1 \cdots \sigma_1}{\overline{\omega^{n-1,0}}}$$

deve equivalere ad un numero determinato. Per conseguire il valore di questo numero supponiamo in particolare

$$y_1 = a_1^{\Sigma 1}, \quad y_2 = a_2^{\Sigma 1}, \cdots y_n = a_n^{\Sigma 1}$$

e poichè l'una e l'altra delle predette funzioni, il cui rapporto è un numero costante, trovasi allora espressa da

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\Sigma 1} , \tag{53}$$

si verrà a conchiudere che il valore di quel rapporto è l'unità, e quindi a stabilire

$$\overline{\omega^{n-1,0}} = E^{n-1} y_1 \cdot E^{n-2}(y_1 \beta_1) \cdot E^{n-3}(y_1 \beta_1 \gamma_1) \cdots E (y_1 \cdots \rho_1) \cdot y_1 \beta_1 \cdots \sigma_1 . \tag{54}$$

Oltre di avere il valore di $\frac{A_1}{A_0}$ dalla formula (48), si può ricavarlo sotto altro aspetto col mezzo delle due prime equazioni (5), da cui si deduce per cadauna delle equazioni (4) (7)

$$\frac{A_1}{A_0} = \left\{ \frac{B_1}{B_0} - 1 \right\} \frac{E^n y_1}{E^{n-1} y_1}, \quad \frac{B_1}{B_0} = \left\{ \frac{C_1}{C_0} - 1 \right\} \frac{E^{n-1} \beta_1}{E^{n-2} \beta_1}, \quad \cdots \frac{R_1}{R_0} = \left\{ \frac{S_1}{S_0} - 1 \right\} \frac{E^2 \rho_1}{E \rho_1},$$

e quindi si ottiene, a cagione (7) di $\frac{S_1}{S_0} = -\frac{E \sigma_1}{\sigma_1}$,

(55)

$$-\frac{A_1}{A_0}=e^{\Delta\log E^{n-1}y_1}+e^{\Delta\log(E^{n-1}y_1\cdot E^{n-2}\beta_1)}+\cdots+e^{\Delta\log(E^{n-1}y_1\cdot E^{n-2}\beta_1\cdots E\rho_1\cdot\sigma_1)}.$$

Infine se surroghiamo all' ultima equazione del sistema (46) la proposta equazione (1) divisa per A_0, converrà cambiare rispettivamente nella (51) y_n, Ey_n, $\cdots E^n y_n$ in y, Ey, $\cdots E^{n-1}y$, $E^n y-\frac{X}{A_0}$, e si avrà quindi

$$(-1)^n\frac{A_n}{A_0}=\frac{E\,\overline{\omega^{n-1,0}_{n)0}}-\frac{X}{A_0}E\,\overline{\omega^{n-2,0}}}{\overline{\omega^{n-1,0}_{n)0}}},$$

ossia l'equazione lineare di 1.° ordine

$$E\,\overline{\omega^{n-1,0}_{n)0}}-(-1)^n\frac{A_n}{A_0}\overline{\omega^{n-1,0}_{n)0}}=\frac{X}{A_0}E\,\overline{\omega^{n-2,0}},$$

dalla cui integrazione si deduce, come è noto,

$$\overline{\omega^{n-1,0}_{n)0}}=e^{\Sigma\log\frac{(-1)^nA_n}{A_0}}\Sigma\left\{e^{-\Sigma\log\frac{(-1)^nA_n}{A_0}}\frac{X\,E\,\overline{\omega^{n-2,0}}}{(-1)^nA_n}\right\}.$$

E siccome dall'eguaglianza (51), oppure dalle (35) (54) risulta

$$K\,e^{\Sigma\log\frac{(-1)^nA_n}{A_0}}=\overline{\omega^{n-1,0}},\tag{56}$$

raccogliamo quindi (49) l'equazione lineare dell' ordine $n-1$ rispetto ad y

(57)

$$E^{n-1}y-\frac{\omega\frac{n-2)\,n-1}{n-1,1}}{\omega\frac{}{n-1,1}}E^{n-2}y-\cdots-\frac{\omega\frac{0)\,n-1}{n-1,1}}{\omega\frac{}{n-1,1}}y=\frac{\overline{\omega^{n-1,0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}}\Sigma\frac{X}{A_0}E\frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{\overline{\omega^{n-1,0}}},$$

che sarebbe un integrale primo della data equazione (1). I valori elementari di y soddisfacenti a questa equazione (57) nell'ipotesi del 2.° membro nullo sono evidentemente $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$, poichè la funzione $\omega_{n)0}^{\overline{n-1,0}}$ si annulla se alla cifra y in ogni suo termine viene applicato uno degli indici 1, 2, 3, $\cdots n-1$, come è evidente pel modo della sua formazione.

Alla stessa guisa con cui si ottenne l'integrale 1.° (57) della proposta equazione (1), ossia (48) dell'equazione

$$E^n y - \frac{\omega_{\overline{n,1}}^{n-1)n}}{\omega_{\overline{n,1}}} E^{n-1} y - \cdots\cdots - \frac{\omega_{\overline{n,1}}^{0)n}}{\omega_{\overline{n,1}}} y = \frac{X}{A_0},$$

si avrà per integrale 1.° della (57), ossia per integrale 2.° della data equazione (1)

$$E^{n-2} y - \frac{\omega_{\overline{n-2,1}}^{n-3)n-2}}{\omega_{\overline{n-2,1}}} E^{n-3} y - \cdots - \frac{\omega_{\overline{n-2,1}}^{0)n-2}}{\omega_{\overline{n-2,1}}} y = \frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-3,0}}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{n-1,0}} E \omega^{\overline{n-3,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}} E \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X}{A_0} E \frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}.$$

Similmente si avrebbe per integrale $(n-m+1)^{esimo}$

$$E^{m-1} y - \frac{\omega_{\overline{m-1,1}}^{m-2)m-1}}{\omega_{\overline{m-1,1}}} E^{m-2} y - \cdots - \frac{\omega_{\overline{m-1,1}}^{0)m-1}}{\omega_{\overline{m-1,1}}} y = \frac{\omega^{\overline{m-1,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{m,0}} E \omega^{\overline{m-2,0}}}{\omega^{\overline{m-1,0}} E \omega^{\overline{m-1,0}}} \Sigma \cdots \Sigma \frac{X}{A_0} E \frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}} \tag{58}$$

e posto $m=2$, si ottiene

$$E y - \frac{\omega_{\overline{1,1}}^{0)1}}{\omega_{\overline{1,1}}} y = \frac{\omega^{\overline{1,0}}}{\omega^{\overline{0,0}}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{2,0}} E \omega^{\overline{0,0}}}{\omega^{\overline{1,0}} E \omega^{\overline{1,0}}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{3,0}} E \omega^{\overline{1,0}}}{\omega^{\overline{2,0}} E \omega^{\overline{2,0}}} \Sigma \cdots \Sigma \frac{\omega^{\overline{n-1,0}} E \omega^{\overline{n-3,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}} E \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X}{A_0} E \frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}.$$

Quindi a cagione (50) (15) di $\omega_{\overline{1,1}}^{0)1} = E\omega_{\overline{1,1}} = E\omega^{\overline{0,0}}$ ricaviamo, dividendo per $\omega_{\overline{1,1}}^{0)1}$, ed integrando

$$y = \omega^{\overline{0,0}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{1,0}}}{\omega^{\overline{0,0}} E \omega^{\overline{0,0}}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{2,0}} E \omega^{\overline{0,0}}}{\omega^{\overline{1,0}} E \omega^{\overline{1,0}}} \Sigma \frac{\omega^{\overline{3,0}} E \omega^{\overline{1,0}}}{\omega^{\overline{2,0}} E \omega^{\overline{2,0}}} \Sigma \cdots \Sigma \frac{\omega^{\overline{n-1,0}} E \omega^{\overline{n-3,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}} E \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X}{A_0} E \frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}. \tag{59}$$

Nel caso in cui i coefficienti A_0, A_1, ecc. della proposta equazione (1) sieno quantità costanti, se denotiamo con $a_1, a_2, \cdots a_n$ le radici dell'equazione algebrica di grado n, che ha i medesimi coefficienti della proposta, si deduce dalla (59), a cagione di

$$(-1)^n A_n = A_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n ,$$

la formula

$$y = a_1^{\Sigma 1} \Sigma \left\{\frac{a_2}{a_1}\right\}^{\Sigma 1} \Sigma \left\{\frac{a_3}{a_2}\right\}^{\Sigma 1} \cdot \Sigma \cdots\cdots \Sigma \left\{\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}^{\Sigma 1} \Sigma \frac{X a_n^{-\Sigma 1}}{(-1)^n A_2}$$

esprimente l'integrale completo di detta equazione.

Capo V.

Evoluzione in integrali semplici dell'integrale completo dell'equazione (1) *espresso per funzioni determinanti de' valori elementari.*

La formula (59) si può ricavare dalla (10), mediante l'identità (54). Abbiamo infatti

$$(60) \quad \begin{aligned} \frac{\overline{\omega^{n-1,0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} &= \mathrm{E}^{n-1} y_1 \cdot \mathrm{E}^{n-2} \beta_1 \cdot \mathrm{E}^{n-3} \gamma_1 \cdots \mathrm{E}\, \rho_1 \cdot \sigma_1 , \\ \frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{\overline{\omega^{n-3,0}}} &= \mathrm{E}^{n-2} y_1 \cdot \mathrm{E}^{n-3} \beta_1 \cdots \mathrm{E}\, \pi_1 \cdot \rho_1 , \\ &\cdots\cdots \\ \frac{\overline{\omega^{2,0}}}{\overline{\omega^{1,0}}} &= \mathrm{E}^2 y_1 \cdot \mathrm{E}\, \beta_1 \cdot \gamma_1 , \\ \frac{\overline{\omega^{1,0}}}{\overline{\omega^{0,0}}} &= \mathrm{E}\, y_1 \cdot \beta_1 . \end{aligned}$$

Quindi otteniamo, a cagione di $\overline{\omega^{0,0}} = y_1$

$$(61)\qquad \sigma_1 = \frac{\omega^{\overline{n-1,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}}}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-3,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}}}\,,\qquad \rho_1 = \frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-3,0}}}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-4,0}}}{\omega^{\overline{n-3,0}}}\,,\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\gamma_1 = \frac{\omega^{\overline{2,0}}}{\omega^{\overline{1,0}}}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{0,0}}}{\omega^{\overline{1,0}}}\,,\qquad \beta_1 = \frac{\omega^{\overline{1,0}}}{\omega^{\overline{0,0}}\,\mathrm{E}\,\omega^{\overline{0,0}}}\,;$$

ed in fine (12)

$$(62)\qquad \tau = \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}\,,$$

cosicchè, sostituiti questi valori (61) (62) nella (10), troviamo appunto la formula (59).

Essendo η_1 la $(m)^{esima}$ delle quantità successive y_1, β_1, γ_1, ecc., abbiamo (61)

$$\eta_1 = \frac{\omega^{\overline{m-1,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{m-3,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}}\,,$$

e dal paragone delle corrispondenti eguaglianze (29), (58), postovi $y = y_m$, si raccoglie

$$\frac{\psi_{p,m}}{\psi_{m-1,m}} = -\frac{\omega^{p)\,m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\omega_{\overline{m-1,1}}}\,,\qquad \frac{\eta_1}{\psi_{\overline{m-1,m}}} = \frac{\omega^{\overline{m-1,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}}\,,$$

$$\vartheta = \frac{\omega^{\overline{m,0}}}{\omega^{\overline{m-1,0}}}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{m-2,0}}}{\omega^{\overline{m-1,0}}}\,\Sigma\,\frac{\omega^{\overline{m-1,0}}\,\mathrm{E}\,\omega^{\overline{m-3,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}\,\mathrm{E}\,\omega^{\overline{m-2,0}}}\,\Sigma\cdots\Sigma\,\frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}\,.$$

Conseguentemente si trova

$$\psi_{m-1,m} = \mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{m-3,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}}\,,$$

e in generale per $p < m-1$

$$(63)\qquad \psi_{p,m} = -\frac{\omega^{p)\,m-1}_{\overline{m-1,1}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{m-3,0}}}{\omega^{\overline{m-2,0}}}\,.$$

Onde svolgere in integrali semplici l'integrale completo (59) per mezzo di funzioni determinanti ne' due casi in cui si conoscono n, od $n-1$ valori elementari di y, basta introdurre nelle rispettive formule (26) (33) le convenienti espressioni di $\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \cdots \tau_{(n)}$, e di $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \cdots \sigma_{(n-1)}$ che siamo per indicare.

Nel primo caso abbiamo dalla (62) il valore di τ ossia di $\tau_{(n)}$; e poichè per desumere $\tau_{(n-r)}$ da τ_n, è sufficiente permutare y_{n-r} con y_n nella serie dei valori elementari $y_1, y_2, \cdots y_n$, ossia cangiare l'indice inferiore $n-r$ in n nella funzione $\omega^{\overline{n-2,0}}$, ed alternare fra loro gl' indici stessi nella funzione $\omega^{\overline{n-1,0}}$, che allora cangia di segno, otterremo evidentemente dalla (62)

$$(64)\qquad \tau_{(n)} = \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}, \qquad -\tau_{(n-1)} = \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n}}{\omega^{\overline{n-1,0}}}, \quad \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad -\tau_{(1)} = \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}_{1)n}}{\omega^{\overline{n-1,0}}},$$

oppure a cagione della (56),

$$(65)$$

$$\tau_{(n)} = \frac{X}{(-1)^n A_n K}\, e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}\, \mathrm{E}\,\omega^{\overline{n-2,0}}, \qquad -\tau_{(n-1)} = \frac{X}{(-1)^n A_n K}\, e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}\, \mathrm{E}\,\omega^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad -\tau_{(1)} = \frac{X}{(-1)^n A_n K}\, e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}\, \mathrm{E}\,\omega^{\overline{n-2,0}}_{1)n},$$

essendo K in questo caso una costante determinata dalla equazione (56) per qualsivoglia valore particolare di x.

Conseguentemente otterremo (64) dalla formula (26)

$$(66)\qquad y = y_n \Sigma \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}}{\omega^{\overline{n-1,0}}} - y_{n-1} \Sigma \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}_{n-1)n}}{\omega^{\overline{n-1,0}}} - \cdots\cdots - y_1 \Sigma \frac{X}{A_0}\,\mathrm{E}\,\frac{\omega^{\overline{n-2,0}}_{1)n}}{\omega^{\overline{n-1,0}}},$$

e poichè denotando col segno $D_{E^p y}$ la derivata parziale d'una funzione rapporto ad $E^p y$ abbiamo evidentemente (49)

$$(67) \qquad \overline{\omega^{n-2,\,0}} = D_{E^{n-1} y_n} \overline{\omega^{n-1,\,0}}, \qquad \overline{\omega^{n-2,\,0}_{n-r)\,n}} = - D_{E^{n-1} y_{n-r}} \overline{\omega^{n-1,\,0}},$$

potremo dare alla (66) l'aspetto seguente senza però arrecarvi alcun nuovo compendio di calcolo

$$(68) \qquad y = y_n \Sigma \frac{X}{A_0} E\, D_{E^{n-1} y_n} \log \overline{\omega^{n-1,0}} + y_{n-1} \Sigma \frac{X}{A_0} E\, D_{E^{n-1} y_{n-1}} \log \overline{\omega^{n-1,0}} + \text{ecc.}$$

Avremo inoltre

$$(69)$$

$$y = \frac{1}{K} \left\{ y_n \Sigma \frac{X}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} E \overline{\omega^{n-2,0}} - y_{n-1} \Sigma \frac{X}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} E \overline{\omega^{n-2,0}_{n-1)n}} - \text{ec.} \right\},$$

oppure (67)

$$(70)$$

$$K y = y_n \Sigma \frac{X}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} E\, D_{E^{n-1} y_n} \overline{\omega^{n-1,0}} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + y_1 \frac{X}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} E\, D_{E^{n-1} y_1} \overline{\omega^{n-1,0}},$$

avvertendo di nuovo, che K è una costante eguale (56) al valore di

$$\overline{\omega^{n-1,\,0}}\, e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}$$

corrispondente ad $x = 0$, o ad altro qualunque valore di x.

Nell'altro caso in cui si richiede lo sviluppo dell'integrale completo (59) in integrali semplici, mercè funzioni determinanti, allorchè si conoscono $n-1$ valori elementari di y, otterremo (14) (60) (61)

$$(71)\qquad \sigma_{(n-1)} = \sigma = \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-3,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}}\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}},$$

$$-\sigma_{(n-2)} = \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-3,0}}_{n-2)\, n-1}}{\omega^{\overline{n-2,0}}\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}},$$

. . . .

$$-\sigma_{(1)} = \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-3,0}}_{1)\, n-1}}{\omega^{\overline{n-2,0}}\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}},$$

cosicchè dalla formula (33) si verrà a dedurre

$$(72)\qquad y = y_{n-1} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-3,0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}}\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}$$

$$- y_{n-2} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-3,0}}_{n-2)n-1}}{\omega^{\overline{n-2,0}}\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} - \text{ecc.}$$

oppure (67)

(73)

$$y = y_{n-1} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}}} \mathrm{E} \left\{ \mathrm{D}_{\mathrm{E}^{n-2}\, y_{n-1}} \log \omega^{\overline{n-2,0}} \right\} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}$$

$$+ y_{n-2} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\omega^{\overline{n-2,0}}} \mathrm{E} \left\{ \mathrm{D}_{\mathrm{E}^{n-2}\, y_{n-2}} \log \omega^{\overline{n-2,0}} \right\} \Sigma \frac{X\, \mathrm{E}\, \omega^{\overline{n-2,0}}}{(-1)^n A_n} e^{-\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}} + \text{ecc.}$$

In conseguenza nel caso di $X = 0$ troviamo (72)

(74)

$$y = y_{n-1} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} \mathrm{E} \frac{\overline{\omega^{n-3,0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} - y_{n-2} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} \mathrm{E} \frac{\overline{\omega^{n-3,0}}^{\,n-2)\,n-1}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} - \text{ecc.}\,;$$

ovvero (73)

(75)

$$y = y_{n-1} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} \mathrm{E\,D}_{\mathrm{E}}{}^{n-2}{}_{y_{n-1}} \log \overline{\omega^{n-2,0}} + y_{n-2} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} \mathrm{E\,D}_{\mathrm{E}}{}^{n-2}{}_{y_{n-2}} \log \overline{\omega^{n-2,0}}$$

$$+ y_{n-3} \Sigma \frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}} \mathrm{E\,D}_{\mathrm{E}}{}^{n-2}{}_{y_{n-3}} \log \overline{\omega^{n-2,0}} + \text{ecc.}$$

Questa formula può riguardarsi come l'analoga di quella esibita dal Prof. Malmsteen per le equazioni differenziali lineari ((75) Parte I). L'intervento delle derivate sì nella formula presente che nelle (68) (70) (73) non arreca veruna abbreviazione di calcolo, come si è già notato nell'esporre la formula (68), ma serve unicamente a fissare l'analogia fra queste formule e le corrispondenti della Parte I. Del resto neppur nelle formule corrispondenti (68) (70) (73) (75) della Parte I l'uso delle derivate giova a renderne più facile l'applicazione, ma solo esibisce una più semplice ed uniforme rappresentazione di dette formule.

Conviene inoltre avvertire, che nelle (68) (70) in luogo di

$$\mathrm{E\,D}_{\mathrm{E}}{}^{n-1}{}_{y_m} \overline{\omega^{n-1,0}}$$

si avrebbe potuto scrivere

$$\mathrm{D}_{\mathrm{E}}{}^{n}{}_{y_m} \mathrm{E}\, \overline{\omega^{n-2,0}}\,,$$

come si può riconoscere con lieve attenzione. Così pure potrebbesi sostituire

$$D_{E^{n-1} y_m} \log E\, \overline{\omega^{n-2,0}}$$

invece di

$$E\, D_{E^{n-2} y_m} \log \overline{\omega^{n-2,0}}$$

nelle (73) (74). Osserveremo ancora riguardo alla formula (75), che la quantità

$$\frac{e^{\Sigma \log \frac{(-1)^n A_n}{A_0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}}$$

equivale manifestamente ad

$$e^{\Sigma \log \left\{ \frac{(-1)^n A_n}{A_0} \cdot \frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{E\, \overline{\omega^{n-2,0}}} \right\}},$$

e quindi sarà facile riconoscere l'accordo della formula (75) con quella che venne proposta allo stesso scopo dal Prof. Tardy (*Tortolini — Annali di Matematiche* — Agosto 1850). Imperocchè prendendo la differenza finita dell'equazione (57) moltiplicata per $\frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{\overline{\omega^{n-1,0}}}$, e paragonandone il risultato coll'equazione (1) troviamo

$$-\frac{A_1}{A_0} = E\, \frac{\omega^{\overline{n-2)\,n-1}}_{\overline{n-1,1}}}{\omega_{\overline{n-1,1}}} + \frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{\overline{\omega^{n-1,0}}}\, E\, \frac{\overline{\omega^{n-1,0}}}{\overline{\omega^{n-2,0}}};$$

ossia a cagione dell'eguaglianza (51)

$$-\frac{A_1}{A_0} - E\, \frac{\omega^{\overline{n-2)\,n-1}}_{\overline{n-1,1}}}{\omega_{\overline{n-1,1}}} = \frac{(-1)^n A_n}{A_0} \cdot \frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{E\, \overline{\omega^{n-2,0}}}.$$

Si avrebbe poi in generale

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(-1)^n A_n}{A_0} \frac{\omega \frac{n-m)\, n-1}{n-1\,,\,1}}{E\,\omega \frac{}{n-1\,,\,1}} - E \frac{\omega \frac{n-m-1)\, n-1}{n-1\,,\,1}}{E\,\omega \frac{}{n-1\,,\,1}}$$

pegli altri valori $2, 3, \cdots n-1$ dell'indice m.

Capo VI.

Espressioni d'ogni variata, e d'ogni differenza finita, della variabile dipendente.

Per le eguaglianze (61) (63) avendosi

$$(76) \qquad \frac{\psi_{p\,,\,m}}{\eta_1} = - \frac{\omega \frac{p)\, m-1}{m-1\,,\,1}}{\overline{\omega^{m-1\,,\,0}}}\,,$$

si ravvisa che questa funzione è simmetrica rapporto ad $y_1, y_2, \cdots y_{m-1}$, come si è già provato nel Cap. II, poichè ambedue le funzioni alternate, il cui rapporto equivale alla funzione (76), mutano di segno senza mutar di valore per qualsivoglia alternazione di due degli indici inferiori $m-1, m-2 \cdots 2, 1$.

Verremo ora a dimostrare una proposizione più generale di quella che concerne le formule (25) (31). Infatti denotando con $\left\{ \omega \frac{p)\, m-1}{m-1\,,\,1} \right\}_{r)\, m}$ il risultato del cangiamento nella funzione $\omega \frac{p)\, m-1}{m-1\,,\,1}$ d'un indice inferiore r nell'indice m, e ricordando di aver designato (Cap. II) con $\psi_{p\,,\,(q)}, \eta_{1\,,\,(q)}$ le quantità corrispondenti a $\psi_{p\,,\,m}, \eta_1$ allorchè nella serie dei valori elementari $y_1, y_2, \cdots y_m$ si colloca nell'ultimo posto y_q, abbiamo dalla (76), per la proprietà essenziale della determinante $\overline{\omega^{m-1\,,\,0}}$ di mutar segno mercè l'alternazione di due indici inferiori m, r,

$$\frac{\psi_{p\,,\,(m)}}{\eta_{1\,,\,(m)}} E^q y_m + \frac{\psi_{p\,,(m-1)}}{\eta_{1\,,(m-1)}} E^q y_{m-1} + \cdots\cdots + \frac{\psi_{p\,,(1)}}{\eta_{1\,,(1)}} E^q y_1 =$$

$$- \frac{E^q y_m \times \omega \frac{p)\, m-1}{m-1\,,\,1} - E^q y_{m-1} \times \left\{ \omega \frac{p)\, m-1}{m-1\,,\,1} \right\}_{m-1)\, m} - \cdots\cdots\cdots - E^q y_1 \times \left\{ \omega \frac{p)\, m-1}{m-1\,,\,1} \right\}_{1)\, m}}{\overline{\omega^{m-1\,,\,0}}}\,,$$

e nel caso di $p = m - 1$ troviamo

$$\frac{\psi_{m-1,(m)}}{\eta_{1,(m)}} E^q y_m \cdots + \frac{\psi_{m-1,(1)}}{\eta_{1,(1)}} E^q y_1 = \frac{E^q y_m \times \overline{\omega^{m-2,0}} - E^q y_{m-1} \times \overline{\omega^{m-2,}_{m-1)m}} - \cdots - E^q y_1 \times \overline{\omega^{m-2,0}_{1)m}}}{\overline{\omega^{m-1,0}}} .$$

Ora è chiaro pel modo con cui si formano le funzioni alternate, che il numeratore della 1.ª di queste due formule si riduce a $-\overline{\omega^{m-1,0}}$ per $q = p$, e si annulla per ogni altro valore di q inferiore ad m; è poi evidente (49) che il numeratore dell'altra formula diviene $\overline{\omega^{m-1,0}}$ per $q = p = m - 1$, e svanisce per ogni altro valore $0, 1, 2, \cdots m-2$ di q. Pertanto la funzione

$$(77) \qquad \frac{\psi_{p,(m)}}{\eta_{1,(m)}} E^q y_m + \frac{\psi_{p,(m-1)}}{\eta_{1,(m-1)}} E^q y_{m-1} + \cdots\cdots + \frac{\psi_{p,(1)}}{\eta_{1,(1)}} E^q y_1$$

equivale all'unità per $q = p$, e va a zero per ogni altro valore di q inferiore ad m; e conseguentemente moltiplicando rispettivamente per $E^p y_m$, $E^p y_{m-1}, \cdots E^p y_1$, e sommando insieme le equazioni che risultano dalla (29) divisa per η_1, allorchè vi si scriva $\psi_{p,(q)}$, $\eta_{1,q}$ invece di $\psi_{p,m}$, η_1, e si attribuisca a q ognuno de' valori m, $m-1$, $\cdots 2, 1$, otteniamo

$$(78) \qquad E^p y = E^p y_m \cdot \Sigma \vartheta_{(m)} + E^p y_{m-1} \cdot \Sigma \vartheta_{(m-1)} + \cdots + E^p y_1 \cdot \Sigma \vartheta_{(1)} ,$$

similmente per $m = n - 1$

$$(79) \qquad E^p y = E^p y_{n-1} \cdot \Sigma \sigma_{(n-1)} + \cdots\cdots + E^p y_1 \cdot \Sigma \sigma_{(1)} ,$$

e per $m = n$

$$(80) \qquad E^p y = E^p y_n \cdot \Sigma \tau_{(n)} + \cdots\cdots + E^p y_1 \cdot \Sigma \tau_{(1)} ;$$

di modo che le formule (26) (32) (33), e quindi altresì le (66) (69) (72) (74) hanno luogo se alle quantità primitive $y, y_1, y_2 \cdots$ vi si sostituiscono le rispettive variate d'un ordine p, purchè questo non superi $m-1$ nella (78), $n-2$ nelle (72) (74) (79), ed $n-1$ nelle (66) (69) (80).

Attesa la forma lineare della nota espressione

$$\Delta^p y = E^p y - p E^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{2} E^{p-2} y - \cdots + (-1)^p y ,$$

è manifesto, che le formule testè indicate sussistono se alle variate di y, y_1, y_2 ecc. sottentrano le rispettive differenze finite d' uno stesso ordine p non superiore a' numeri dianzi accennati. Così si avrebbe finchè p rimane inferiore ad n.

$$(80, A) \qquad \Delta^p y = \Delta^p y_n \cdot \Sigma\tau_{(n)} + \Delta^p y_{n-1} \cdot \Sigma\tau_{(n-1)} + \cdots + \Delta^p y_1 \cdot \Sigma\tau_{(1)} .$$

Per conseguire le espressioni d'ogni variata e d'ogni differenza finita di y in funzione degli n, o di $n-1$ valori elementari, allorchè l'ordine relativo ecceda nel 1.° caso $n-1$, e nell' altro caso superi $n-2$, si assuma primieramente

$$(81) \qquad E^{n+r}y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \left\{ E^{n+r}y \cdot \Sigma\tau_{(q)} \right\} + Q_r^{(0)}\, E^r X + Q_r^{(1)}\, E^{r-1} X + \cdots + Q_r^{(r)}\, X ,$$

e siccome la variata r^{esima} dell' equazione (1)

$$E^r A_0 \cdot E^{n+r} y + E^r A_1 \cdot E^{n+r-1} y + \cdots + E^r A_n \cdot E^r y = E^r X$$

è sempre soddisfatta, nell' ipotesi di $X=0$, da' valori y_1, y_2, $\cdots$ y_n di y; sarà facile rilevare sommando insieme l' equazione (81), e le n equazioni che ne risultano colla sostituzione de' numeri $r-1$, $r-2$, $\cdots\cdot$ $r-n$ in luogo di r, dopo di averle rispettivamente moltiplicate per $E^r A_0$, $E^r A_1$, $\cdots$ $E^r A_n$, che le quantità $Q_r^{(0)}$, $Q_r^{(1)}$ ecc. debbono soddisfare alle equazioni seguenti

$$Q_r^{(0)} E^r A_0 = 1 , \quad Q_r^{(1)} E^r A_0 + Q_{r-1}^{(0)} E^r A_1 = 0 , \quad Q_r^{(2)} E^r A_0 + Q_{r-1}^{(1)} E^r A_1 + Q_{r-2}^{(0)} E^r A_2 = 0 , \quad \text{ecc.}$$

In conseguenza determinando $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, ecc. mercè le eguaglianze

$$(82)$$

$$A_0 M^{(0)} = 1 , \quad M^{(1)} E A_0 + M^{(0)} E A_1 = 0 , \quad M^{(2)} E^2 A_0 + M^{(1)} E^2 A_1 + M^{(0)} E^2 A_2 = 0 , \quad \text{ecc.}$$

troveremo

$$(83) \qquad Q_r^{(0)} = E^r M^{(0)} , \quad Q_r^{(1)} = E^{r-1} M^{(1)} , \quad Q_r^{(2)} = E^{r-2} M^{(2)} , \quad \text{ecc.}$$

come si rende evidente col sostituire questi valori (83) nelle equazioni anteriori determinanti $Q_r^{(0)}$, $Q_r^{(1)}$ ecc., ed osservare che esse coincidono colle rispettive variate d' ordine r, $r-1$, $r-2$, ecc. delle equazioni (82). Giova poi avvertire che alle equazioni (82) si può surrogare il sistema di queste eguaglianze

(82, A)

$$A_0 M^{(0)} = 1\,, \quad A_0 M^{(1)} + \mathrm{E}\left\{A_1 M^{(0)}\right\} = 0\,, \quad A_0 M^{(2)} + \mathrm{E}\left\{A_1 M^{(1)}\right\} + \mathrm{E}^2\left\{A_2 M^{(0)}\right\} = 0\,, \quad \text{ecc.}$$

attesochè la somma di $r+1$ equazioni successive del nuovo sistema, rispettivamente moltiplicate per $\mathrm{E}^r A_r$, $\mathrm{E}^r A_{r-1}$, $\cdots$ $\mathrm{E}^r A_1$, $\mathrm{E}^r A_0$, coincide colla $(r+1)^{esima}$ delle equazioni (82) moltiplicata per A_0, e sommata colle r equazioni che la precedono rispettivamente moltiplicate per A_1, A_2, $\cdots\cdot$ A_r, e variate 1, 2, 3, $\cdots$ r volte.

Possiamo dunque (83) esporre le formula (81) sotto l' aspetto

(81, A)

$$\mathrm{E}^{n+r} y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \left\{\mathrm{E}^{n+r} y_q \cdot \Sigma \tau_{(q)}\right\} + \mathrm{E}^r \left\{M^{(0)} X\right\} + \mathrm{E}^{r-1} \left\{M^{(1)} X\right\} + \cdots\cdots + M^{(r)} X\,,$$

e quindi dedurne

(81, B)

$$\Delta^{n+r} y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \left\{\Delta^{n+r} y_q \cdot \Sigma \tau_{(q)}\right\} + \mathrm{E}^r \left\{M^{(0)} X\right\} + \mathrm{E}^{r-1} \left\{\left(M^{(1)} - (n+r)\, M^{(0)}\right) X\right\}$$

$$+ \cdots\cdots + \left\{M^{(r)} - (n+r)\, M^{(r-1)} + \cdots + (-1)^r \frac{(n+r)\cdots\cdots(n+1)}{2\,.\,3\ldots r} M^{(0)}\right\} X\,,$$

oppure, esprimendo le variate $E^r(M^{(0)}X)$ ecc. per le differenze finite, ottenere

$$\Delta^{n+r} y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \left\{\Delta^{n+r} y_q \cdot \Sigma \tau_{(q)}\right\} + \Delta^r \left\{M^{(0)} X\right\} + \Delta^{r-1} \left\{\left(M^{(1)} - n\, M^{(0)}\right) X\right\}$$

$$+ \Delta^{r-2} \left\{\left(M^{(2)} - (n+1)\, M^{(1)} + \frac{(n+1)\, n}{2} M^{(0)}\right) X\right\} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{M^{(r)} - (n+r-1)\, M^{(r-1)} + \cdots + (-1)^r \frac{(n+r-1)\cdots n}{2\,.\,3\,\ldots\, r} M^{(0)}\right\} X\,.$$

Un metodo analogo a quello, con cui si è poc' anzi dedotta l' espressione di $\mathrm{E}^{n+r} y$, ci darebbe la seguente formula onde esprimere la retrovariata $(r)^{esima}$ di y

(81, *C*)

$$\mathrm{E}^{-r}y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \left\{ \mathrm{E}^{-r}y_q \cdot \Sigma\, \tau_{(q)} \right\} + \mathrm{E}^{-r} \left\{ P_0 X \right\} + \mathrm{E}^{-r+1} \left\{ P_1 X \right\} + \cdots + \mathrm{E}^{-1} \left\{ P_{r-1} X \right\},$$

in cui P_0, P_1, $\cdots$ P_{r-1} vengono determinate dalle equazioni

(81, *D*)

$$A_n P_0 = 1\,, \quad P_1 \mathrm{E}^{-1} A_n + P_0 \mathrm{E}^{-1} A_{n-1} = 0\,, \quad P_2 \mathrm{E}^{-2} A_n + P_1 \mathrm{E}^{-2} A_{n-1} + P_0 \mathrm{E}^{-2} A_{n-2} = 0\,,$$

ecc.

riducibili nella stessa guisa delle (82) alla forma seguente

$$A_n P_0 = 1\,, \quad A_n P_1 + \mathrm{E}^{-1} \left\{ A_{n-1} P_0 \right\} = 0\,, \quad A_n P_2 + \mathrm{E}^{-1} \left\{ A_{n-1} P_1 \right\} + \mathrm{E}^{-2} \left\{ A_{n-2} P_0 \right\} = 0\,, \ \text{ecc.}$$

Non tralascieremo di notare che dal paragone del valore variato dell'espressione (80) di $\mathrm{E}^p y$ colla espressione di $\mathrm{E}^{p+1} y$ esibita dalla stessa formula (80) risulta

$$\tau_{(n)}\, \mathrm{E}^p y_n + \tau_{(n-1)}\, \mathrm{E}^p y_{n-1} + \cdots\cdots + \tau_{(1)}\, \mathrm{E}^p y_1 = 0$$

pe' valori 1, 2, 3, $\cdots$ $n-1$ di p, e che dal confronto della variata di $\mathrm{E}^{n-1} y$ (80) colla espressione (81) di $\mathrm{E}^n y$ si avrebbe

$$\tau_{(n)}\, \mathrm{E}^n y_n + \tau_{(n-1)}\, \mathrm{E}^n y_{n-1} + \cdots\cdots + \tau_{(1)}\, \mathrm{E}^n y_1 = \frac{X}{A_0}\,.$$

Si riconosce agevolmente che i valori di $\tau_{(n)}$, $\tau_{(n-1)}$, $\cdots$ $\tau_{(1)}$ dedotti da queste n eguaglianze s'accordano colle formule (64).

Similmente si avrebbe dalla (79) l'identità

$$(84) \qquad \sigma_{n-1}\, \mathrm{E}\, y_{n-1} + \sigma_{(n-2)}\, \mathrm{E}^p y_{n-2} + \cdots\cdot + \sigma_{(1)}\, \mathrm{E}^p y_1 = 0$$

pe' valori 1, 2, 3, $\cdots$ $n-2$ di p; e poichè la variata di $\mathrm{E}^{n-2} y$ (79) ci offre

$$\mathrm{E}^{n-1} y = \sum_{q=1}^{q=n} \left\{ \mathrm{E}^{n-1} y_q \cdot \Sigma\, \sigma_{(q)} \right\} + \sum_{q=1}^{q=n} \left\{ \mathrm{E}^{n-1} y_q \cdot \sigma_{(q)} \right\},$$

assumendo

$$(85)\qquad E^{n+r}y=\sum_{q=1}^{q=n}\left\{E^{n+r}y_q\cdot\Sigma\sigma_{(q)}\right\}+E^{-1}\left\{A_0 M^{(r+1)}\right\}\cdot\sum_{q=1}^{q=n}\left\{E^{n-1}y_q\cdot\sigma_{(q)}\right\}$$

$$+M^{(r)}X+E\left\{M^{(r-1)}X\right\}+E^2\left\{M^{(r-2)}X\right\}+\cdots+E^r\left\{M^{(0)}X\right\},$$

e sommando insieme questa equazione e le n eguaglianze che ne risultano col porvi in luogo di r i numeri $r-1$, $r-2$, $\cdots r-n$, dopo di averle moltiplicate rispettivamente per E^rA_0, E^rA_1, $\cdots E^rA_n$, si troverà verificata l'equazione (85), purchè $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, ecc., sieno determinate dalle equazioni (82). Quindi potrà dedursi l'espressione di $\Delta^{n+r}y$, come la (81, B) dalla formula (81, A), cioè mutando nella (85) $M^{(1)}$ in $M^{(1)}-(n+r)M^{(0)}$, $M^{(2)}$ in $M^{(2)}-(n+r)M^{(1)}+\frac{(n+r)(n+r-1)}{2}M^{(0)}$, ecc. ed inoltre $E^{n+r}y_q$ in $\Delta^{n+r}y_q$.

Volendosi l'espressione della retrovariata r^{esima} di y in funzione di $n-1$ valori elementari, si proverà collo stesso metodo che ha luogo la formula

$$(85, A)\qquad E^{-r}y=\sum_{q=1}^{q=n}\left\{E^{-r}y_q\cdot\Sigma\sigma_{(q)}\right\}-E^{-1}\left\{A_0P_{r-1}\right\}\cdot\sum_{q=1}^{q=n}\left\{E^{n-1}y_q\cdot\sigma_{(q)}\right\}$$

$$+E^{-1}\left\{P_{r-1}X\right\}+E^{-2}\left\{P_{r-2}X\right\}+\cdots+E^{-r}\left\{P_0X\right\},$$

purchè le quantità P_0, P_1, $\cdots P_{r-1}$ vengano determinate dalle equazioni (81, D). Infatti siccome la retrovariata r^{esima} dell'equazione (1), cioè

$$E^{-r}A_0\cdot E^{n-r}y+E^{-r}A_1\cdot E^{n-r-1}y+\cdots+E^{-r}A_n\cdot E^{-r}y=E^{-r}A,$$

è soddisfatta nell'ipotesi di $X=0$ da' valori elementari y_1, $y_2\cdots\cdots y_{n-1}$, si ravvisa che moltiplicando le espressioni di $E^{-r}y$, $E^{-r+1}y$, $\cdots E^{-r+n}y$ che risultano dalla (85, A), e nel caso di r non superiore ad n dalla (85), per le quantità rispettive $E^{-r}A_n$, $E^{-r}A_{n-1}$, $\cdots E^{-r}A_0$, e prendendone poscia la somma si perviene ad una equazione identica.

Potrebbesi ancora esprimere la variata $(n+r)^{esima}$ di y nel modo seguente

$$(85, B)\qquad E^{n+r}y=\sum_{q=1}^{q=n}\left\{E^{n+r}y_q\left(\Sigma\sigma_{(q)}+\sigma_{(q)}\right)\right\}+A_nM^{(r)}\sum_{q=1}^{q=n}y_q\,\sigma_{(q)}$$

$$+M^{(r)}X+E\left\{M^{(r-1)}X\right\}+\cdots+E^r\left\{M^{(0)}X\right\},$$

e parimenti esporre la retrovariata r^{esima} di y sotto la forma

$$(85, C) \quad E^{-r} y = \sum_{q=1}^{q=n} \left\{ E^{-r} y_q \cdot \left(\Sigma \sigma_{(q)} + \sigma_{(q)} \right) \right\} - A_n P_r \sum_{q=1}^{q=n} y_q \sigma_{(q)}$$

$$+ E^{-1} \left\{ P_{r-1} X \right\} + E^{-2} \left\{ P_{r-2} X \right\} + \cdots + E^{-r} \left\{ P_0 X \right\}.$$

Il paragone di queste due formule colle (85) (85, A) conduce alle identità

$$(85, D) \quad E^{-1} \left\{ A_0 M^{(r+1)} \right\} \cdot \sum_{q=1}^{q=n} \left\{ E^{n-1} y_q \cdot \sigma_{(q)} \right\} = \sum_{q=1}^{q=n} \left\{ E^{n+r} y_q \cdot \sigma_{(q)} \right\} + A_n M^{(r)} \sum_{q=1}^{q=n} y_q \sigma_{(q)}$$

$$E^{-1} \left\{ A_0 P_{r-1} \right\} \cdot \sum_{q=1}^{q=n} E^{n-1} y_q \cdot \sigma_{(q)} = - \sum_{q=1}^{q=n} E^{-r} y_q \cdot \sigma_{(q)} + A_n P_r \sum_{q=1}^{q=n} y_q \sigma_{(q)},$$

e la dimostrazione di ciascuna di dette formule (85, B) (85, C) si ottiene col trovare verificata l'equazione risultante dalla somma delle n equazioni analoghe che corrispondono agl' indici r, $r-1$, $\cdots r-n$, moltiplicate rispettivamente le (85, B) per le variate r^{esime} di A_0, A_1, $\cdots A_n$, e le (85, C) per le retrovariate d'ordine r di A_n, A_{n-1}, $\cdots A_0$.

Capo VII.

Applicazione di alcune delle formule precedenti alle equazioni lineari a differenze finite co' coefficienti costanti.

Sieno nella data equazione (1) A_1, A_2, $\cdots\cdot$ A_n quantità costanti, ed $A_0 = 1$. Si suppongano primieramente fra loro diseguali le radici a_1, a_2, $\cdots a_n$ dell'equazione algebrica

$$(86) \qquad F(a) = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \cdots + A_{n-1} a + A_n = 0,$$

che ha per coefficienti quelli della proposta (1). Avremo allora, come è ben noto,

$$y_1 = a_1^{\Sigma 1}, \qquad y_2 = a_2^{\Sigma 1}, \qquad \cdots\cdots y_n = a_n^{\Sigma 1};$$

e poichè risulta (53)

$$\frac{\overline{\omega^{n-2,0}}}{\overline{\omega^{n-1,0}}} = \frac{a_n^{-\Sigma 1}}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})} = \frac{a_n^{-\Sigma 1}}{F'(a_n)} ,$$

otterremo (66) la nota espressione dell' integrale completo

$$(87) \qquad y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{\Sigma 1} \Sigma a_q^{-\Sigma 1} X}{a_q F'(a_q)} .$$

Il valore variato di y d' un ordine p inferiore ad n (80) avrà per espressione

$$(88) \qquad E^p y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{p-1} a_q^{\Sigma 1} \Sigma a_q^{\Sigma 1} X}{F'(a_q)} ,$$

ed ogni altra variata di y verrà espressa (81) dalla formula

$$(89) \qquad E^{n+r} y = \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{n+r-1} a_q^{\Sigma 1} \Sigma a_q^{-\Sigma 1} X}{F'(a_q)} + \sum_{p=0}^{p=r+1} Q^{(p)} E^{r-p} X ,$$

essendo i valori di $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, $\cdots$ $Q^{(r)}$ determinati (82) (83) dalle equazioni

$$(90) \qquad Q^{(0)} = 1 , \quad Q^{(1)} + A_1 = 0 , \quad Q^{(2)} + A_1 Q^{(1)} + A_2 = 0 , \quad \text{ecc.}$$

Si può scorgere agevolmente che la variata della formula (87) coincide colla prima formula del sistema (88), e così pure che la variata d' una qualunque delle formule (88) (89) ricade nella formula susseguente della medesima serie, avendo già dimostrato nella Parte I che si avverano le identità

$$(91) \qquad \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^m}{F'(a_q)} = 0 , \qquad \sum_{q=1}^{q=n+1} \frac{a_q^{n+r-1}}{F'(a_q)} = Q^{(r)} ,$$

pe' valori $0, 1, 2, \cdots n-2$ di m, e per qualsivoglia valore $0, 1, 2, 3$ ecc. di r. Le equazioni del primo di questi due sistemi si trovano esposte nelle Istituzioni di Calcolo integrale dell' Eulero (Vol. II. Sez. II Cap. III.)

Scrivendo le formule (87) (88) (89) nel modo seguente

$$(92)\qquad y = \frac{a_n^{\Sigma 1}\,\Sigma a_n^{-\Sigma 1} X}{a_n F'(a_n)} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q^{\Sigma 1}\,\Sigma a_q^{-\Sigma 1} X}{a_q F'(a_q)}\;.$$

$$\mathrm{E}^p y = \frac{a_n^{p-1}\, a_n^{\Sigma 1}\,\Sigma a_n^{-\Sigma 1} X}{F'(a_n)} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q^{p-1}\, a_q^{\Sigma 1}\,\Sigma a_q^{-\Sigma 1} X}{F'(a_q)}\;,$$

$$\mathrm{E}^{n+r} y = \frac{a_n^{n+r-1}\, a_n^{\Sigma 1}\,\Sigma a_n^{-\Sigma 1} X}{F'(a_n)} + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{a_q^{n+r-1}\, a_q^{\Sigma 1}\,\Sigma a_q^{-\Sigma 1} X}{F'(a_q)} + \sum_{p=0}^{p=r+1} Q^{(p)}\mathrm{E}^{r-p} X\;,$$

si ravvisa la rispettiva loro coincidenza con quelle che si deducono, mercè le (71), dalle espressioni (72) (79) (85), poichè a cagione (53) di

$$\frac{\overline{\omega^{n-3\,,\,0}}}{\overline{\omega^{n-2\,,\,0}}} = \frac{(a_{n-1} - a_n)\, a_{n-1}^{-\Sigma 1}}{F'(a_{n-1})}\;,$$

e di

$$(-1)^n A_n = a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n\;,$$

ne ricaviamo le formule seguenti nella seconda delle quali p non supera $n-2$, sussistendo la terza formula anco per $r = -1$,

$$y = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(a_q - a_n)\, a_q^{\Sigma 1}}{a_q F'(a_q)}\, \Sigma \left(\frac{a_n}{a_q}\right)^{\Sigma 1} \Sigma X a_n^{-\mathrm{E}\Sigma 1}\;,$$

$$\mathrm{E}^p y = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(a_q - a_n)\, a_q^{p-2}\, a_q^{\Sigma 1}}{F'(a_q)}\, \Sigma \left(\frac{a_n}{a_q}\right)^{\Sigma 1} \Sigma X a_n^{-\mathrm{E}\Sigma 1}\;,$$

$$\mathrm{E}^{n+r} y = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{(a_q - a_n)\, a_q^{n-2}}{F'(a_q)} \left\{ a_q^{r+1} a_q^{\Sigma 1}\, \Sigma \left(\frac{a_n}{a_q}\right)^{\Sigma 1} \Sigma X a_n^{-\mathrm{E}\Sigma 1} + Q^{(r+1)} a_n^{\Sigma 1}\, \Sigma X a_n^{-\mathrm{E}\Sigma 1} \right\}$$

$$+ \sum_{p=0}^{p=r+1} Q^{(p)}\mathrm{E}^{r-p} X\,.$$

Ma dalla formula dell' integrazione per parti delle differenze finite (37) si ricava

$$a_q^{\Sigma 1}\,\Sigma\left(\frac{a_n}{a_q}\right)^{\Sigma 1}\Sigma X \mathrm{E}\, a_n^{-\mathrm{E}\Sigma 1}=\frac{a_q}{a_n-a_q}\left\{a_n^{\Sigma 1}\Sigma X a_n^{-\mathrm{E}\Sigma 1}-a_q^{\Sigma 1}\Sigma X a_q^{-\mathrm{E}\Sigma 1}\right\},$$

ed altronde dalle equazioni identiche (91) abbiamo

$$\sum_{q=1}^{q=n}\frac{a_q^p}{F'(a_q)}=-\frac{a_n^p}{F'(a_n)}$$

pe' valori $0\,,\,1\,,\,2\,,\cdots n-2$ di p, ed inoltre

$$\sum_{q=1}^{q=n}\frac{a_q^{n+r}}{F'(a_q)}=Q^{(r+1)}-\frac{a_n^{n+r}}{F'(a_n)}$$

pe' valori $-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\,,\cdots$ di r. Si può quindi agevolmente riconoscere l'identità de' rispettivi risultati delle formule (72) (79) (85) colle (87) (88) (89).

Allorchè l'equazione algebrica (86) è dotata di m radici eguali ad a_1, si ha pel Teorema di Hudde

$$F(a_1)=0\,,\qquad F'(a_1)=0\,,\qquad F''(a_1)=0\,,\;\cdots\cdots\; F^{(m-1)}(a_1)=0\,,$$

ed è manifesto che l'equazione (2) è soddisfatta da' seguenti valori elementari di y

$$y_1=a_1^{\Sigma 1}\,,\qquad y_2=a_1^{\Sigma 1}\Sigma 1\,,\qquad y_3=a_1^{\Sigma 1}\Sigma^2 1\,,\;\cdots\cdots\; y_m=a_1^{\Sigma 1}\Sigma^{m-1}1\,.$$

Siccome poi (40, C) $\Sigma^r 1$ equivale ad una funzione intera di $\Sigma 1$ del grado r, si potrebbe assumere per valori elementari di y corrispondenti alle m radici eguali ad a_1 i prodotti di $a_1^{\Sigma 1}$ per le rispettive potenze $0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\cdots m-1$ di $\Sigma 1$. Abbiamo adottato il sistema de' valori espressi da' prodotti di $a_1^{\Sigma 1}$ pe' rispettivi integrali replicati dell' unità, onde si mantenga evidente l'analogia delle formule ulteriori colle formule analoghe della Parte I. riguardanti le equazioni lineari differenziali.

Immaginando disposti i valori elementari di y (9) in guisa che si succedano nell' ordine ascendente degl' integrali dell' unità tutti quelli che corrispondono ad uno stesso gruppo di radici eguali, e denotando rispettivamente con $n_1\,,\,n_2\,,\cdots n_r$ il numero delle radici eguali ad $a_1\,,\,a_2\,,\cdots a_r$, cosicchè avrebbe-

si $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, rappresentiamo con $\tau_{(n_q),q}$ il valore (12) di τ ossia di $\tau_{(n)}$, allorchè nella serie de' valori elementari di y, ordinati nel modo testè accennato, l'ultimo posto è occupato da $a_q^{\Sigma 1}\Sigma^{n_q-1}1$. Stabiliamo inoltre di denotare con $\tau_{(n_q-1),q}$, $\tau_{(n_q-2),q}$, $\cdots\cdots$ $\tau_{(1),q}$ le quantità corrispondenti a τ, allorchè si ritenga nell'ultimo posto il relativo valore elementare $a_q^{\Sigma 1}\Sigma^{n_q-2}1$, $a_q^{\Sigma 1}\Sigma^{n_q-3}1$, $\cdots\cdots\cdots\cdots$ $a_q^{\Sigma 1}$. Simili quantità si otterranno per mezzo di $\tau_{(n_q),q}$ adoperando un numero $n_q - 1$ delle successive equazioni (45), ed eseguita l'analoga ricerca per cadauno de' valori $1, 2, \cdots r$ dell'indice q, si dedurrà dalla (26)

$$y = \sum_{p=1}^{p=n_1+1} a_1^{\Sigma 1}\Sigma^{n_1-p}1 \cdot \Sigma\tau_{(n_1-p+1),1} + \sum_{p=1}^{p=n_2+1} a_2^{\Sigma 1}\Sigma^{n_2-p}1 \cdot \Sigma\tau_{(n_2-p+1),2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \sum_{p=1}^{p=n_r+1} a_r^{\Sigma 1}\Sigma^{n_r-p}1 \cdot \Sigma\tau_{(n_r-p+1),r},$$

ovvero per brevità di rappresentazione

$$(93) \qquad y = \sum_{q=1}^{q=r+1}\ \sum_{p=1}^{p=n_r+1} a_q^{\Sigma 1}\Sigma^{n_q-p}1 \cdot \Sigma\tau_{(n_q-p+1),q}.$$

Sia data per esempio l'equazione del 5.° ordine a coefficienti costanti

$$E^5 y + A_1 E^4 y + A_2 E^3 y + A_3 E^2 y + A_4 Ey + A_5 = X,$$

e si supponga che la rispettiva equazione algebrica (86) abbia tre radici eguali ad a_1, e le due altre eguali ad a_2. Colla prima disposizione de' valori elementari di y avremo (9)

$$y_1 = a_1^{\Sigma 1}, \quad y_2 = a_1^{\Sigma 1}\Sigma 1, \quad y_3 = a_1^{\Sigma 1}\Sigma^2 1, \quad y_4 = a_2^{\Sigma 1}, \quad y_5 = a_2^{\Sigma 1}\Sigma 1,$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \Sigma 1, \quad \beta_3 = \left\{\frac{a_2}{a_1} - 1\right\}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \quad \beta_4 = \left\{\left(\frac{a_2}{a_1} - 1\right)\Sigma 1 + \frac{a_2}{a_1}\right\}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1};$$

$$\gamma_1 = 1 , \quad \gamma_2 = \left\{ \frac{a_2}{a_1} - 1 \right\}^2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\Sigma 1} , \quad \gamma_3 = \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right) \left\{ \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right) \Sigma 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} \right\} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\Sigma 1} ,$$

$$\delta_1 = \left\{ \frac{a_2}{a_1} - 1 \right\}^3 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\Sigma 1} , \quad \delta_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right)^2 \left\{ \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right) \Sigma 1 + 3 \frac{a_2}{a_1} \right\} \left(\frac{a_2}{a} \right)^{\Sigma 1} ,$$

$$\sigma_1 = 1 ;$$

e conseguentemente (12) (45)

$$\tau_{(2),2} = \frac{X a_2^{-\Sigma 1}}{(a_2 - a_1)^3 a_2^2} , \quad \tau_{(1),2} = - \tau_{(2),2} \,\mathrm{E} \frac{\delta_2}{\delta_1} = - \frac{\left\{ (a_2 - a_1) \Sigma 1 + 4 a_2 - a_1 \right\} X a_2^{-\Sigma 1}}{(a_2 - a_1)^4 a_2^2} .$$

Disponendo poscia nell' altra guisa i valori di y, cioè assumendo

$$y_1 = a_2^{\Sigma 1} , \quad y_2 = a_2^{\Sigma 1} \Sigma 1 , \quad y_3 = a_1^{\Sigma 1} , \quad y_4 = a_1^{\Sigma 1} \Sigma 1 , \quad y_5 = a_1^{\Sigma 1} \Sigma^2 1 ,$$

otterremo (9)

$$\beta_1 = 1 , \quad \beta_2 = \left\{ \frac{a_1}{a_2} - 1 \right\} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\Sigma 1} , \quad \beta_3 = \left\{ \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) \Sigma 1 + \frac{a_1}{a_2} \right\} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\Sigma 1} ,$$

$$\beta_4 = \left\{ \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) \Sigma^2 1 + \frac{a_1}{a_2} \Sigma 1 \right\} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\Sigma 1} ,$$

$$\gamma_1 = \left\{ \frac{a_1}{a_2} - 1 \right\}^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\Sigma 1} , \quad \gamma_2 = \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) \left\{ \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) \Sigma 1 + 2 \frac{a_1}{a_2} \right\} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\Sigma 1} ,$$

$$\gamma_3 = \left\{ \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right)^2 \Sigma^2 1 + 2 \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{a_1}{a_2} - 1 \right) \Sigma 1 + \frac{a_1^2}{a_2^2} \right\} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\Sigma 1} ,$$

$$\delta_1 = 1 , \quad \delta_2 = \Sigma 1 + \frac{2 a_1}{a_1 - a_2} ,$$

$$\sigma_1 = 1 ;$$

e quindi (12) (45)

$$\tau_{(3),1} = \frac{X a_1^{-\Sigma 1}}{(a_1 - a_2)^2 a_1^3}, \qquad \tau_{(2),1} = -\tau_{(3),1} \mathrm{E} \frac{\delta_2}{\delta_1} = -\frac{\left\{ (a_1 - a_2)\, \Sigma 1 + 3a_1 - a_2 \right\} X a_1^{-\Sigma 1}}{(a_1 - a_2)^3 a_1^3},$$

$$\tau_{(1),1} = -\tau_{(2),1} \mathrm{E} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \tau_{(3),1} \mathrm{E} \frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \left\{ \overline{\Sigma 1}^2 - \Sigma^2 1 + \left(\frac{3a_1 - a_2}{a_1 - a_2} \right) \Sigma 1 + \frac{6a_1^2 - 4a_1 a_2 + a_2^2}{(a_1 - a_2)^2} \right\} \frac{X a_1^{-\Sigma 1}}{(a_1 - a_1)^2 a_1^3}.$$

Infine la formula (93) ci offrirà per espressione dell'integrale completo richiesto

$$y = a_1^{\Sigma 1} \Sigma^2 1 \cdot \Sigma \tau_{(3),1} + a_1^{\Sigma 1} \Sigma 1 \cdot \Sigma \tau_{(2),1} + a_1^{\Sigma 1} \Sigma \tau_{(1),1} + a_2^{\Sigma 1} \Sigma 1 \cdot \Sigma \tau_{(2),2} + a_2^{\Sigma 1} \Sigma \tau_{(1),2},$$

e non resterà che porvi in luogo di $\Sigma^2 1$ la quantità equivalente $\frac{1}{2}(\Sigma 1 - 1)\Sigma 1$ (40, C).

Adoperando l'intero sistema delle eguaglianze (45) si avrebbe potuto calcolare, mercè una sola disposizione de' valori elementari di y, tutte le funzioni $\tau_{(5)}$, $\tau_{(4)}$, $\tau_{(3)}$, $\tau_{(2)}$, $\tau_{(1)}$, che intervengono nell'espressione (26) dell'integrale completo di cui si tratta. Ritenuta la prima delle due disposizioni precedenti le predette funzioni si troveranno equivalere a $\tau_{(2),2}$, $\tau_{(1),2}$, $\tau_{(3),1}$, $\tau_{(2),1}$, $\tau_{(1),1}$.

Dallo sviluppo finale dell'espressione di y si passerà, come venne già dimostrato (Cap. VI), all'espressione di ogni variata di y, sostituendo (80) a' valori elementari di y, che moltiplicano gli integrali, le rispettive loro variate dello stesso ordine, e se questo sia maggiore di $n - 1$, aggiungendo inoltre al risultato di simile sostituzione (81) il gruppo rappresentabile colla notazione

$$\sum_{p=0}^{p=r+1} Q^{(p)} \mathrm{E}^{r-p} X,$$

in cui $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, ecc. hanno i valori determinati dalle equazioni (90).

Capo VIII.

Appendice sul modo di sviluppare l' integrale completo d' una equazione lineare a differenze finite co' coefficienti costanti, allorchè l'equazione algebrica, che ha gli stessi coefficienti, abbia qualche gruppo di radici fra loro eguali. Nuova maniera di sviluppare l' espressione di qualsivoglia variata, e d' ogni differenza finita della variabile dipendente, allorchè i coefficienti della data equazione sono costanti.

Dall' applicazione delle relazioni (9) (45) all' esempio dianzi trattato si comprende, che $\tau_{(n_q-p+1),q}$ nella formula (93) equivale al prodotto di $Xa_q^{-\Sigma 1}$ per una funzione intera di $\Sigma 1$ del grado $p-1$ (40, C). Questa osservazione è comprovata dal seguente metodo di sviluppare l' integrale completo d' ogni equazione lineare a differenze finite co' coefficienti costanti nel caso di alcune radici eguali, per cui verrà maggiormente agevolata l' applicazione delle relazioni (45) all' evoluzione dell' integrale suddetto.

Se supponiamo in generale che l' equazione algebrica (86) abbia n_1 radici eguali ad a_1, n_2 radici eguali ad a_2, ecc. ed infine n_r radici eguali ad a_r, la formula addotta alla fine del Cap. IV, che rappresenta l' integrale completo d' una equazione lineare alle differenze co' coefficienti costanti, diviene

$$(94)\qquad y = a_1^{\Sigma 1}\Sigma^{n_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}\Sigma^{n_2}\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^{\Sigma 1}\Sigma^{n_3}\cdots\Sigma^{n_{r-1}}\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}\Sigma^{n_r}\frac{Xa_r^{-\Sigma 1}}{(-1)^n A_n},$$

denotandosi con Σ^m un integrale finito moltiplice dell' ordine m.

Ora siccome $(-1)^n A_n$ equivale al prodotto delle radici dell' equazione algebrica (86) ossia ad $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_r^{n_r}$, ponendo nella formula (94)

$$a_r^{\Sigma 1}\Sigma^{n_r}\frac{Xa_r^{-\Sigma 1}}{a_r^{n_r}} = Z,$$

si troverà che

$$y = a_1^{\Sigma 1} \Sigma^{n_1} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1} \Sigma^{n_2} \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^{\Sigma 1} \Sigma^{n_3} \cdots \Sigma^{n_{r-2}} \left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\right)^{\Sigma 1} \Sigma^{n_{r-1}} \frac{Z a_{r-1}^{-\Sigma 1}}{a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_{r-1}^{n_{r-1}}}$$

rappresenta del pari l'integrale completo dell'equazione a coefficienti costanti

$$\mathrm{E}^{n-n_r} y + K_{1,r} \mathrm{E}^{n-n_r-1} y + K_{2,r} \mathrm{E}^{n-n_r-2} y + \cdots + K_{n-n_r,r} y = Z ,$$

a cui corrisponde l'equazione algebrica

$$a^{n-n_r} + K_{1,r} a^{n-n_r-1} + K_{2,r} a^{n-n_r-2} + \cdots + K_{n-n_r,r} = 0$$

dotata delle stesse radici dell'equazione (86), ad eccezione delle n_r radici eguali ad a_r. In conseguenza avremo identicamente

$$a^{n-n_r} + K_{1,r} a^{n-n_r-1} + K_{2,r} a^{n-n_r-2} + \cdots + K_{n-n_r,r} = \frac{F(a)}{(a-a_r)^{n_r}}$$

$$= \left\{ a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \cdots + A_n \right\} \cdot \left\{ a^{-n_r} + n_r a_r a^{-n_r-1} + \frac{n_r(n_r+1)}{2} a_r^2 a^{-n_r-2} + \text{ecc.} \right\} ,$$

e quindi otterremo

$$(95) \qquad K_{1,r} = A_1 + n_r a_r , \qquad K_{2,r} = A_2 + n_r A_1 a_r + \frac{n_r(n_r+1)}{2} a_r^2 ,$$

. . . .

$$K_{n-n_r,r} = A_{n-n_r} + n_r A_{n-n_r-1} a_r + \frac{n_r(n_r+1)}{2} A_{n-n_r-2} a_r^2 + \cdots + \frac{n_r(n_r+1)\cdots(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-n_r)} a_r^{n-n_r} .$$

Pertanto l'equazione

$$(96) \qquad \mathrm{E}^{n-n_r} y + K_{1,r} \mathrm{E}^{n-n_r-1} y + \cdots\cdots + K_{n-n_r,r} y = a_r^{\Sigma 1} \Sigma^{n_r} \frac{X a_r^{-\Sigma 1}}{a_r^{n_r}}$$

sarà un integrale $(n_r)^{esimo}$ della data equazione (1) a coefficienti costanti, e coinciderà colle (29) (58) ove si ponga $m = n - n_r + 1$.

Prendendo le variate 1^a, $2^a \cdots (n_r - 1)^{esima}$ di questa equazione (96) avremo con essa un numero n_r di equazioni lineari contenenti le successive variate di y fino inclusivamente alla $(n-1)^{esima}$, e se immaginiamo di aver similmente assunto e fatto variare le equazioni analoghe alla (96), che risultano dal considerare in luogo di r gli indici $r-1$, $r-2$, $\cdots$ 3, 2, 1, si

avrà complessivamente un numero $n_r + n_{r-1} + \cdots n_2 + n_1 = n$ di equazioni di primo grado non solo rispetto ad y, $\mathrm{E}y$, $\mathrm{E}^2 y$, $\cdots \mathrm{E}^{n-1} y$, ma altresì riguardo agli integrali finiti de' varii ordini, che si trovano ne' secondi membri di dette equazioni, e costituiscono altrettanti termini della forma

$$H a_q^{\Sigma 1} \Sigma^p X a_q^{-\Sigma 1}$$

in cui H è un coefficiente costante, e p assume i valori $1, 2, 3 \cdots\cdots n_q$, mentre q è suscettibile de' valori $1, 2, 3 \cdots\cdots r$. Pertanto ricavando da queste n eguaglianze le espressioni di y, $\mathrm{E}y$, $\mathrm{E}^2 y$, $\cdots \mathrm{E}^{n-1} y$ e designando con $\overline{L}^{m}_{p,q}$ una determinata costante avremo, in generale per $m < n$

$$(97) \qquad \mathrm{E}^m y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{\overline{L}^{m}_{p,q}}{a_q^p} a_q^{\Sigma 1} \Sigma^p X a_q^{-\Sigma 1},$$

e in particolare per $m = 0$

$$(98) \qquad y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{L_{p,q}}{a_q^p} a_q^{\Sigma 1} \Sigma^p X a_q^{-\Sigma 1}.$$

Il significato della notazione rappresentante la doppia somma nelle formule (97) (98) come pure nelle formule corrispondenti della Parte I è conforme a quello che si desume dal Calcolo delle differenze finite.

Per determinare nella formula (98) i valori delle costanti rappresentate da $L_{p,q}$, i quali non possono dipendere dalla forma della funzione X, pongasi $X = a^{\Sigma 1}$, ed eseguendo le integrazioni indicate nelle due formule (94) (98), senza mai aggiungere costante arbitraria, attesochè nel confronto di quelle due formule i relativi gruppi contenenti le n costanti arbitrarie, che completano gli integrali, debbono separatamente eguagliarsi, otterremo quindi dal paragone delle espressioni (94) (98), prescindendo dalle costanti arbitrarie,

$$\frac{a^{\Sigma 1}}{(a-a_1)^{n_1}(a-a_2)^{n_2}\cdots(a-a_r)^{n_r}} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} L_{p,q} \frac{a^{\Sigma 1}}{(a-a_q)^p};$$

ossia col togliere il fattor comune $a^{\Sigma 1}$ avremo (86)

$$\frac{1}{F(a)} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{L_{p,q}}{(a-a_q)^p} .$$

Troviamo pertanto che le n costanti $L_{p,q}$ sono i numeratori delle frazioni parziali, in cui si può decomporre la frazione $\frac{1}{F(a)}$; di maniera che per la teoria dello spezzamento delle frazioni risulta

$$(99) \qquad L_{p,q} = n_q (n_q - 1) \cdots (n_q - p + 1)\, D^{n_q - p} \frac{1}{F^{(n_q)}(a_q)} .$$

Parimenti per conseguire i valori delle costanti $\overline{L}^{m}_{p,q}$ nella formula (97), si assuma $X = a^{\Sigma 1}$, e fatta astrazione da' gruppi delle costanti arbitrarie, che debbono costituire fra loro una separata equazione, si eguagli la variata m^{esima} della prefata espressione di y desunta dalla (94) coll'espressione della medesima che si deduce dalla (97), senza tener conto delle costanti arbitrarie. Si avrà in questa guisa l'eguaglianza

$$\frac{a^m}{F(a)} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{\overline{L}^{m}_{p,q}}{(a-a_q)^p} ,$$

da cui si scorge che le costanti $\overline{L}^{m}_{p,q}$ sono i numeratori delle frazioni parziali che risultano dalla finale decomposizione della frazione $\frac{a^m}{F(a)}$, cosicchè si trova, come è ben noto,

$$(100) \qquad \overline{L}^{m}_{p,q} = n_q (n_q - 1) \cdots (n_q - p + 1)\, D^{n_q - p} \frac{a_q^m}{F^{(n_q)}(a_q)} .$$

La formula (97) può estendersi a qualsivoglia valore dell'indice m, col solo aggiungervi nel caso di $m > n - 1$ il gruppo de' termini costituito dalle successive variate di X, che pur si trova nella formula (81). Infatti sommando insieme la data equazione (1) a coefficienti costanti moltiplicata per $Q^{(i)}$ (90) colle sue variate 1^a, 2^a, $\cdots$ $(i)^{esima}$ rispettivamente moltiplicate per $Q^{(i-1)}$,

$Q^{(i-2)} \cdots Q^{(1)}$, $Q^{(0)}$, troviamo, a cagione delle eguaglianze (90) che determinano i detti moltiplicatori,

$$E^{n+i}y + \left(A_1 Q^{(i)} + A_2 Q^{(i-1)} + \cdots\right) E^{n-1} y + \left(A_2 Q^{(i)} + A_3 Q^{(i-1)} + \cdots\right) E^{n-2} y + \cdots + A_n Q^{(i)} y$$

$$= E^i X + Q^{(1)} E^{i-1} X + Q^{(2)} E^{i-2} X + \cdots + Q^{(i-1)} E X + Q^{(i)} X \, ;$$

e siccome le espressioni di y, Ey, E^2y, $\cdots E^{n-1}y$ hanno tutte una medesima forma (97) (98) si avrà parimenti

$$(101) \qquad E^{n+i} y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{\overline{L^{n+i}_{p,q}}}{a_q^p} a_q^{\Sigma 1} \Sigma^p X a_q^{-\Sigma 1} + \sum_{p=0}^{p=i+1} Q^{(p)} E^{i-p} X .$$

È poi manifesto che il valore di $\overline{L^{n+i}_{p,q}}$ viene espresso dalla formula (100) col solo mutarvi m in $n+i$, poichè assumendo $X = a^{\Sigma 1}$ e prescindendo da' gruppi delle costanti arbitrarie, troviamo coll' eguagliare la variata $(n+i)^{esima}$ di $y = \frac{a^{\Sigma 1}}{F(a)}$ all' espressione di $E^{n+i}y$ che risulta dalla (101), l' eguaglianza

$$\frac{a^{n+i}}{F(a)} = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{\overline{L^{n+i}_{p,q}}}{(a-a_q)^p} + \sum_{p=0}^{p=i+1} Q^{(p)} a^{i-p} ,$$

da cui si ravvisa essere $\overline{L^{n+i}_{p,q}}$ il numeratore della frazione parziale, che ha per denominatore $(a-a_q)^p$ nello spezzamento della frazione $\frac{a^{n+i}}{F(a)}$. Il gruppo de' termini interi, che trovasi aggiunto all' aggregato delle frazioni parziali, corrisponde (90) al quoziente intero della divisione di a^{n+i} per $F(a)$.

Attesa la nota espressione d' ogni differenza finita per mezzo de' valori variati, si comprende dalle formule (97) (98) (101) che lo sviluppo della differenza finita $(n+i)^{esima}$ di y avrà la forma

$$(101, A) \qquad \Delta^{n+i} y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{\overline{N^{n+i}_{p,q}}}{a_q^p} a_q^{\Sigma 1} \Sigma^p X a_q^{-\Sigma 1} + \sum_{p=0}^{p=i+1} \overline{R^p} E^{i-p} X ,$$

essendo il valore d'ogni costante $\overline{N^{n+i}_{p,q}}$ quello del numeratore della frazione parziale che ha per denominatore $(a - a_q)^p$ nel finale spezzamento della frazione

$$\frac{1}{F(a)} \left\{ a^{n+i} - (n+i)\, a^{n+i-1} + \frac{(n+i)(n+i-1)}{2} a^{n+i-2} - \ldots\ldots + (-1)^{n+i} \right\},$$

e rappresentando R^p il coefficiente di a^{i-p} nella espressione del quoziente intero di grado i, che risulta dal dividere per $F(a)$ il numeratore dell'anzidetta frazione.

Anche la retrovariata r^{esima} di y si può esprimere in modo analogo allo sviluppo di y, e d'ogni suo valore variato. Si avrebbe infatti la formula

$$(101, B) \qquad \mathrm{E}^{-r} y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{\overline{L^{-r}_{p,q}}}{a_q^p} a_q^{\Sigma 1} \Sigma^p X a_q^{-\Sigma 1} + \sum_{q=0}^{q=r} P_q \mathrm{E}^{-r+q} X,$$

in cui $\overline{L^{-r}_{p,q}}$ è il numeratore della frazione parziale che ha per denominatore $(a - a_q)^p$ nello spezzamento finale della frazione $\frac{1}{a^r F(a)}$, e le costanti P_q vengono determinate dalle equazioni

$$(101, C)$$

$$A_n P_0 = 1, \qquad A_n P_1 + A_{n-1} P_0 = 0, \qquad A_n P_2 + A_{n-1} P_1 + A_{n-2} P_0 = 0, \quad \text{ecc.}$$

cosicchè P_0, P_1, P_2 ecc. sono i coefficienti di a^{-r}, a^{-r+1}, a^{-r+2} ecc. nello sviluppo di $\frac{1}{a^r F(a)}$ in serie ascendente.

Imperocchè avendosi (100) per m sì positivo che negativo

$$(100, A) \qquad \overline{L^m_{p,q}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n_q-p)} \mathrm{D}^{n_q-p} \frac{a^m (a-a_q)^{n_q}}{F(a)},$$

purchè si ponga $a = a_q$ dopo di aver eseguito le derivazioni, ne viene evidentemente (86)

$$(101, D) \qquad \overline{L^{n-r}_{p,q}} + A_1 \overline{L^{n-r-1}_{p,q}} + \ldots + A_n \overline{L^{-r}_{p,q}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n_q-p)} \mathrm{D}^{n_q-p} \frac{(a-a_q)^{n_q}}{a^r} = 0$$

per ogni valore $1, 2, 3, \cdots n_q$ di p, e conseguentemente la retrovariata r^{esima} dell' equazione lineare proposta, cioè

$$\mathrm{E}^{n-r} + A_1 \mathrm{E}^{n-r-1} y + A_2 \mathrm{E}^{n-r-2} y + \cdots + A_n \mathrm{E}^{-r} y = \mathrm{E}^{-r} X,$$

si troverà sempre avverata dalle espressioni (97) (98) (101, B) di y, e delle sue variate e retrovariate, a cagione delle relazioni (101, C).

Sviluppiamo nella formula (98) ogni integrale d'un ordine $p > 1$ in integrali semplici, mercè la formula (40, A), ed avremo

$$y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} \frac{L_{p,q} a_q^{\Sigma 1}}{a_q^p} \Big\{ \Sigma^{p-1} 1 \cdot \Sigma X a_q^{-\Sigma 1} - \Sigma^{p-2} 1 \cdot \Sigma X a_q^{-\Sigma 1} \mathrm{E} \Sigma 1 + \cdots \cdots$$

$$\cdots \cdots + (-1)^{p-1} \Sigma X a_q^{-\Sigma 1} \mathrm{E}^{p-1} \Sigma^{p-1} 1 \Big\}.$$

Quindi attribuendo a p i suoi valori $1, 2, 3, \cdots n_q$ nella funzione sottoposta al doppio segno di somma, e poscia raccogliendo i gruppi de' termini affetti dagli integrali d'uno stesso ordine dell' unità dedurremo

(102)

$$y = \sum_{q=1}^{q=r+1} \sum_{p=1}^{p=n_q+1} a_q^{\Sigma 1} \Sigma^{n_q-p} 1 \cdot \Sigma \left\{ \frac{L_{n_q-p+1,q}}{a_q^{n_q-p+1}} - \frac{L_{n_q-p+2,q}}{a_q^{n_q-p+2}} \mathrm{E} \Sigma 1 + \cdots \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \cdots + (-1)^{p-1} \frac{L_{n_q,q}}{a_q^{n_q}} \mathrm{E}^{p-1} \Sigma^{p-1} 1 \right\} X a_q^{-\Sigma 1},$$

e dal paragone di questa formula colla (93) si verrà a raccogliere

(103)

$$\tau_{(n_q-p+1),q} = \left\{ \frac{L_{n_q-p+1,q}}{a_q^{n_q-p+1}} - \frac{L_{n_q-p+2,q}}{a_q^{n_q-p+2}} \mathrm{E}\Sigma 1 + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{L_{n_q,q}}{a_q^{n_q}} \mathrm{E}^{p-1} \Sigma^{p-1} 1 \right\} X a_q^{-\Sigma 1},$$

cioè si rileva (40, B), che $\tau_{(n_q-p+1),q}$ equivale al prodotto di $X a_q^{-\Sigma 1}$ per una funzione intera di $\Sigma 1$ del grado $p-1$.

Immaginiamo nella serie delle equazioni (9) schierati i valori elemen-

tari di y in guisa, che si succedano senza interruzione tutti quelli che corrispondono ad uno stesso gruppo di radici eguali, procedendo nell' ordine ascendente degli integrali replicati dell' unità, a cominciare da quelli che hanno per fattor comune $a_1^{\Sigma 1}$, e proseguendo cogli altri gruppi de' valori elementari corrispondenti alle radici a_2, a_3, $\cdots a_r$. È palese che le funzioni (26) denotate con $\tau_{(n)}$, $\tau_{(n-1)}$, $\cdots \tau_{(1)}$ equivalgono rispettivamente (93) a $\tau_{(n_r),r}$ $\tau_{(n_r-1),r}$, $\cdots \tau_{(1),r}$, $\tau_{(n_{r-1}),r-1}$ ecc. Conseguentemente eguagliando l'espressione (12) di τ ossia di $\tau_{(n)}$ col valore di $\tau_{(n_r),r}$ desunto dalla formula (103), si avrà una equazione identica, donde, attribuendovi ad x quel valore particolare che rende $\mathrm{E}\Sigma 1 = 0$, ossia $\Sigma 1 = -1$, e quindi annulla (40, B) (40, C) $\mathrm{E}^m \Sigma^r 1$ finchè non sia $m > r$, e denotando con $(\mathrm{E}^n y_1)$ $(\mathrm{E}^{n-1} \beta_1)$, ecc. i valori di $\mathrm{E}^n y_1$, $\mathrm{E}^{n-1} \beta$, ecc. corrispondenti al valore particolare $\Sigma 1 = -1$, dedurremo

$$L_{n_r, r} = \frac{a_r^{n_r - 1}}{(\mathrm{E}^n y_1)(\mathrm{E}^{n-1} \beta_1) \cdots (\mathrm{E} \sigma_1)} . \tag{104}$$

Poscia sostituendo i valori (103) di $\tau_{(n_r),r}$ $\tau_{(n_r-1),r}$ $\cdots \tau_{(1),r}$, $\tau_{(n_{r-1}),r-1}$ ecc. nelle eguaglianze (45) divise per X, otterremo

$$- \frac{L_{n_r-1, r}}{a_r^{n_r-2}} = \frac{L_{n_r, r}}{a_r^{n_r-1}} \left(\mathrm{E} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \tag{105}$$

$$- \frac{L_{n_r-2, r}}{a_r^{n_r-3}} = \frac{L_{n_r-1, r}}{a_r^{n_r-2}} \left(\mathrm{E} \frac{\pi_2}{\pi_1} \right) + \frac{L_{n_r, r}}{a_r^{n_r-1}} \left(\mathrm{E} \frac{\pi_3}{\pi_1} \right),$$

$$- \frac{L_{n_r-3, r}}{a_r^{n_r-4}} = \frac{L_{n_r-2, r}}{a_r^{n_r-3}} \left(\mathrm{E} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) + \frac{L_{n_r-1, r}}{a_r^{n_r-2}} \left(\mathrm{E} \frac{\xi_3}{\xi_1} \right) + \frac{L_{n_r, r}}{a_r^{n_r-1}} \left(\mathrm{E} \frac{\xi_4}{\xi_1} \right),$$

. . . .

$$- L_{1, r} = \frac{L_{2, r}}{a_r} \left(\mathrm{E} \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{L_{3, r}}{a_r^2} \left(\mathrm{E} \frac{\mu_3}{\mu_1} \right) + \cdots + \frac{L_{n_r, r}}{a_r^{n_r-1}} \left(\mathrm{E} \frac{\mu_{n_r}}{\mu_1} \right);$$

$$-\frac{L_{n_{r-1},r-1}}{a_{r-1}^{n_{r-1}-1}}=L_{1,r}\left(E\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)+\frac{L_{2,r}}{a_r}\left(E\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)+\cdots+\frac{L_{n_r,r}}{a_r^{n_r-1}}\left(E\frac{\lambda_{n_r+1}}{\mu_1}\right),$$

$$-\frac{L_{n_{r-1}-1,r-1}}{a_{r-1}^{n_{r-1}-2}}=\frac{L_{n_{r-1},r-1}}{a_{r-1}^{n_{r-1}-1}}\left(E\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)+L_{1,r}\left(E\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right)+\frac{L_{2,r}}{a_r}\left(E\frac{\varkappa_4}{\varkappa_1}\right)+\cdots+\frac{L_{n_r,r}}{a_r^{n_r-1}}\left(E\frac{\varkappa_{n_r+2}}{\varkappa_1}\right);$$

ecc.

Anzichè adoperare una sola disposizione de' valori elementari di y (9), e tutte le $n-1$ eguaglianze (105), si potrebbe calcolare i valori delle costanti $L_{p,q}$ (98), rinnovando il calcolo, che serve a determinare $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-1}, \gamma_1$, γ_2, ecc., per cadauna delle r disposizioni in cui l' ultimo gruppo de' valori elementari di y corrisponde alle radici rispettivamente eguali ad $a_r, a_{r-1}, \cdots a_1$, ed impiegando ogni volta un numero corrispondente n_q-1 delle successive equazioni (105), per ciascuno de' valori $r, r-1, \cdots 2, 1$ dell' indice q. Le costanti $L_{p,q}$ affette dal medesimo indice q verranno esibite (104) (105) dalle n_q equazioni

$$(106)\qquad L_{n_q,q}=\frac{a_q^{n_q-1}}{(E^n y_1)(E^{n-1}\beta_1)\cdots(E\sigma_1)},$$

$$-L_{n_q-1,q}=\frac{L_{n_q,q}}{a_q}\left(E\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

$$-L_{n_q-2,q}=\frac{L_{n_q-1,q}}{a_q}\left(E\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)+\frac{L_{n_q,q}}{a_q^2}\left(E\frac{\pi_3}{\pi_1}\right);$$

. . . .

$$-L_{1,q}=\frac{L_{2,q}}{a_q}\left(E\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)+\cdots+\frac{L_{n_q,q}}{a_q^{n_q-1}}\left(E\frac{\mu_{n_q}}{\mu_1}\right).$$

Cercando di nuovo con questo metodo lo sviluppo dell'integrale completo dell'equazione di 5° ordine già trattata alla fine del Capo VII, nella supposizione che l'equazione algebrica ausiliaria abbia 3 radici eguali ad a_1, e 2 radici eguali ad a_2, dedurremo dalla prima distribuzione de' valori elementari di y in

cui l'ultimo posto è occupato da $a_2^{\Sigma 1}\Sigma 1$, mercè il calcolo delle formule (9) già istituito nel Capo VII,

$$\left(E^5 y_1\right)=a_1^4,\ \left(E^4\beta_1\right)=1,\ \left(E^3\gamma_1\right)=1,\ \left(E^2\delta_1\right)=\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^3,\ \left(E\sigma_1\right)=1,\ \left(E\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)=\frac{3a_2}{a_2-a_1},$$

e in conseguenza (106)

$$L_{2,2}=\frac{1}{(a_2-a_1)^3},\qquad L_{1,2}=-\frac{L_{2,2}}{a_2}\left(E\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)=-\frac{3}{(a_2-a_1)^4};$$

avremo poscia dall'altra disposizione de' valori di y (Cap. VII)

$$\left(E^5 y_1\right)=a_2^4,\ \left(E^4\beta_1\right)=1,\ \left(E^3\gamma_1\right)=\frac{a_1^2(a_1-a_2)^2}{a_2^4},\ \left(E^2\delta_1\right)=1,\ \left(E\sigma_1\right)=1,$$

$$\left(E\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)=\frac{2a_1}{a_1-a_2},\qquad \left(E\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)=\frac{2a_1}{a_1-a_2},\qquad \left(E\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)=\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)^2},$$

e quindi

$$L_{3,1}=\frac{1}{(a_1-a_2)^2},\qquad L_{2,1}=-\frac{L_{3,1}}{a_1}\left(E\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)=-\frac{2}{(a_1-a_2)^3},$$

$$L_{1,1}=-\frac{L_{2,1}}{a_1}\left(E\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)-\frac{L_{3,1}}{a_1^2}\left(E\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)=\frac{3}{(a_1-a_2)^4}.$$

Pertanto si avrebbe (98)

$$y=\frac{L_{1,1}}{a_1}a_1^{\Sigma 1}\Sigma X a_1^{-\Sigma 1}+\frac{L_{2,1}}{a_1^2}a_1^{\Sigma 1}\Sigma^2 X a_1^{-\Sigma 1}+\frac{L_{3,1}}{a_1^3}a_1^{\Sigma 1}\Sigma^3 X a_1^{-\Sigma 1}$$

$$+\frac{L_{1,2}}{a_2}a_2^{\Sigma 1}\Sigma X a_2^{-\Sigma 1}+\frac{L_{2,2}}{a^2}a_2^{\Sigma 1}\Sigma^2 X a_2^{-\Sigma 1};$$

e dopo d'avere sviluppato gl'integrali di 2° e 3° ordine, mercè la formula (40, D), si troverà che questo risultato coincide colla espressione di y ottenuta nella fine del Capo VII.

Mediante una sola distribuzione de' valori di y, e in particolare colla seconda (Cap. VII), si avrebbe ottenuto più prontamente

$$\left(E\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)=\frac{a_1}{a_2}-1, \quad \left(E\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)=\frac{a_1}{a_2}, \quad \left(E\frac{\beta_4}{\beta_1}\right)=0,$$

$$\left(E\frac{y_2}{y_1}\right)=0, \quad \left(E\frac{y_3}{y_1}\right)=1, \quad \left(E\frac{y_4}{y_1}\right)=0, \quad \left(E\frac{y_5}{y_1}\right)=0;$$

e quindi dopo di aver calcolato coll'equazione (104), e colle due prime formule (105), i valori testè trovati di $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, $L_{1,1}$, si dedurrebbe dalle due consecutive equazioni (105)

$$L_{2,2}=-a_2\left\{L_{1,1}\left(E\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)+\frac{L_{2,1}}{a_1}\left(E\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)+\frac{L_{3,1}}{a_1^2}\left(E\frac{\beta_4}{\beta_1}\right)\right\}=-\frac{1}{(a_1-a_2)^3},$$

$$L_{1,2}=-\frac{L_{2,2}}{a_2}\left(E\frac{y_2}{y_1}\right)-L_{1,1}\left(E\frac{y_3}{y_1}\right)-\frac{L_{2,1}}{a_1}\left(E\frac{y_4}{y_1}\right)-\frac{L_{3,1}}{a_1^2}\left(E\frac{y_5}{y_1}\right)=-\frac{3}{(a_1-a_2)^4},$$

cioè si otterrebbero gli stessi valori dianzi trovati di $L_{2,2}$, $L_{1,2}$.

Questi valori delle costanti $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, ecc. sono pur quelli (99) de' numeratori delle frazioni parziali in cui si decompone $\frac{1}{F(a)}=\frac{1}{(a-a_1)^3(a-a_2)^2}$.

Capo IX.

Continuazione e fine dell' argomento trattato nel Capo VIII.

Poichè i coefficienti $L_{p,q}$ della formula (98) sono i numeratori delle frazioni parziali che risultano dallo spezzamento della frazione $\frac{1}{F(a)}$, potranno questi coefficienti determinarsi, mediante uno qualunque de' metodi che si ado-

prano, onde eseguire lo spezzamento finale d'una frazione razionale. Così i valori delle costanti $L_{n_q,q}$, $L_{n_q-1,q}$, ... $L_{1,q}$, che hanno un indice comune q, verranno esibiti dalle eguaglianze

$$(107)\qquad f(a_q)L_{n_q,q}=1,$$

$$f(a_q)L_{n_q-1,q}+f'(a_q)L_{n_q,q}=0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$f(a_q)L_{1,q}+f'(a_q)L_{2,q}+\tfrac{1}{2}f''(a_q)L_{3,q}+\cdots\cdots+\frac{f^{(n_q-1)}(a_q)}{2.3\ldots(n_q-1)}L_{n_q,q}=0,$$

in cui (86) (95) si suppone

$$(108)\qquad f(a)=\frac{F(a)}{(a-a_q)^{n_q}}=a^{n-n_q}+K_{1,q}\,a^{n-n_q-1}+\cdots+K_{n-n_q,q},$$

ossia

$$(a-a_q)^{n_q}f(a)=F(a);$$

di maniera che abbiamo, come nella Parte I, col derivare n_q, n_q+1, $\cdots 2n_q-1$ volte questa eguaglianza, e col porre in essa e nelle sue derivate $a=a_q$,

$$(109)\qquad f(a_q)=\frac{1}{1.2.3.\;n_q}F^{(n_q)}(a_q),$$

$$f'(a_q)=\frac{1}{2.3\ldots n_q(n_q+1}F^{(n_q+1)}(a_q),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$f^{(n_q-1)}(a_q)=\frac{1}{n_q(n_q+1)\,.\,.\,(2n_q-1)}F^{(2n_q-1)}(a_q).$$

Osservando qui pure, come nel § IX della Parte I, che dallo spezzamento della frazione $\frac{1}{F(a)}$ in n_q frazioni parziali della forma $\frac{L_{m,q}}{(a-a_q)^m}$, e nella frazione complementare $\frac{\varphi(a)}{f(a)}$, si ricava l'eguaglianza

$$f(a)\left\{L_{n_q,q}+L_{n_q-1,q}(a-a_q)+\cdots+L_{1,q}(a-a_q)^{n_q-1}\right\}+(a-a_q)^{n_q}\varphi(a)=1,$$

e ponendo $a = a_q$ in questa equazione identica, e nelle sue derivate degli ordini 1°, 2°, $\cdots (n_q - 1)^{esimo}$, si ottengono le note equazioni (107).

Dall'elementare dottrina delle combinazioni (Cauchy - *Cours d'analyse algébrique* Ch. IV § 3.) avendosi per m intero e positivo l'identità seguente, che appartiene alla teoria delle fattoriali o facoltà numeriche,

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2.3\ldots m} + q\frac{p(p-1)\ldots(p-m+2)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{q(q-1)}{2}\frac{p(p-1)\ldots(p-m+3)}{1.2.3\ldots(m-2)} + \cdots + \frac{q(q-1)\ldots(q-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$
$$= \frac{(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-m+1)}{1.2.3\ldots m};$$

col porre in questa equazione identica $p = \mathrm{E}\Sigma 1$, $q = -\mathrm{E}\Sigma 1$, ne ricaviamo (40, *B*) (40, *C*)

$$\mathrm{E}\Sigma^m 1 - \mathrm{E}\Sigma 1 \cdot \mathrm{E}\Sigma^{m-1} 1 + \mathrm{E}^2\Sigma^2 1 \cdot \mathrm{E}\Sigma^{m-2} 1 - \cdots\cdots + (-1)^m \mathrm{E}^m \Sigma^m 1 = 0,$$

e conseguentemente moltiplicando per le quantità rispettive $\mathrm{E}\Sigma^m 1$, $\mathrm{E}\Sigma^{m-1} 1$, $\cdots$ $\cdots \mathrm{E}\Sigma 1$, 1, e sommando insieme le $m+1$ equazioni che si deducono dalla (103), col sostituirvi in luogo di p i numeri $1, 2, 3, \cdots m+1$, otteniamo

$$\frac{L_{n_q - m, q}}{a_q^{n_q - m - 1}} = \left\{ \tau_{(n_q - m), q} + \tau_{(n_q - m + 1), q} \mathrm{E}\Sigma 1 + \tau_{(n_q - m + 2), q} \mathrm{E}\Sigma^2 1 + \cdots + \tau_{(n_q), q} \mathrm{E}\Sigma^m 1 \right\} \frac{a_q^{\mathrm{E}\Sigma 1}}{X}.$$

Ora sostituendo nelle (105) i valori di $\frac{L_{n_r, r}}{a_r^{n_r - 1}} \cdots\cdot L_{1, r}$, $\frac{L_{n_{r-1}, r-1}}{a_{r-1}^{n_{r-1} - 1}}$ ecc. desunti da questa formula, troveremo n equazioni comparabili colle (45), poichè $\tau_{(n_r), r}, \cdots$ $\cdots \tau_{(1), r}$, $\tau_{(n_{r-1}), r-1}$, ecc. equivalgono rispettivamente a $\tau_{(n)}$, $\tau_{(n-1)}$, ecc. Da simile confronto dedurremo una serie di equazioni, le quali retrovariate si riducono alle forme seguenti, e ci esibiscono lo sviluppo o la legge di composizione delle funzioni (9), allorchè i coefficienti dell'equazione (1) sono costanti,

(110)

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\mathrm{E}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \Sigma 1, \\
\frac{\pi_2}{\pi_1} = \left(\mathrm{E}\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) + \Sigma 1, \qquad \frac{\pi_3}{\pi_1} = \left(\mathrm{E}\frac{\pi_3}{\pi_1}\right) + \left(\mathrm{E}\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)\Sigma 1 + \Sigma^2 1, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{\mu_2}{\mu_1} = \left(\mathrm{E}\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \Sigma 1, \; \cdots\cdots \; \frac{\mu_{n_r}}{\mu_1} = \left(\mathrm{E}\frac{\mu_{n_r}}{\mu_1}\right) + \left(\mathrm{E}\frac{\mu_{n_r - 1}}{\mu_1}\right)\Sigma 1 + \cdots + \Sigma^{n_r - 1} 1;
\end{array}\right.$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\Sigma 1\right\}\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}, \ldots\ldots$$

$$\frac{\lambda_{n_r+1}}{\lambda_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{\lambda_{n_r+1}}{\lambda_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{\lambda_{n_r}}{\lambda_1}\right)\Sigma 1+\cdots\cdots+\left(\mathrm{E}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\Sigma^{n_r-1}1\right\}\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1};$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)+\Sigma 1, \quad \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right)\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}, \quad \frac{\varkappa_4}{\varkappa_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{\varkappa_4}{\varkappa_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\right)\Sigma 1\right\}\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}, \text{ ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)+\Sigma 1, \quad \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)\Sigma 1+\Sigma^2 1, \ldots\ldots \\
\frac{\vartheta_{n_{r-1}+1}}{\vartheta_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\vartheta_{n_{r-1}+1}}{\vartheta_1}\right)\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}; \ldots\ldots
\end{array}\right.$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\right)^{\Sigma 1}, \quad \frac{\eta_3}{\eta_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\Sigma 1\right\}\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\right)^{\Sigma 1}, \ldots\ldots$$

$$\frac{\eta_{n_{r-1}+2}}{\eta_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\eta_{n_{r-1}+2}}{\eta_1}\right)\left(\frac{a_r}{a_{r-2}}\right)^{\Sigma 1}, \ldots\ldots$$

. . . .

$$\frac{\delta_2}{\delta_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \quad \frac{\delta_3}{\delta_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\Sigma 1\right\}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)+\Sigma 1, \quad \frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\left(\mathrm{E}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{y_2}{y_1}=\left(\mathrm{E}\frac{y_2}{y_1}\right)+\Sigma 1=\Sigma 1, \quad \frac{y_3}{y_1}=\left(\mathrm{E}\frac{y_3}{y_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{y_2}{y_1}\right)\Sigma 1+\Sigma^2 1=\Sigma^2 1, \ldots \frac{y_{n_1}}{y_1}=\Sigma^{n_1-1}1, \\
\frac{y_{n_1+1}}{y_1}=\left(\mathrm{E}\frac{y_{n_1+1}}{y_1}\right)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \quad \frac{y_{n_1+2}}{y_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{y_{n_1+2}}{y_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{y_{n_1+1}}{y_1}\right)\Sigma 1\right\}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{y_{n-n_r+1}}{y_1}=\left(\mathrm{E}\frac{y_{n-n_r+1}}{y_1}\right)\left(\frac{a_r}{a_1}\right)^{\Sigma 1}, \ldots\ldots \\
\frac{y_n}{y_1}=\left\{\left(\mathrm{E}\frac{y_n}{y_1}\right)+\left(\mathrm{E}\frac{y_{n-1}}{y_1}\right)\Sigma 1+\cdots\cdots+\left(\mathrm{E}\frac{y_{n-n_r+1}}{y_1}\right)\Sigma^{n_r-1}\right\}\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}.
\end{array}\right.$$

Per comprendere il modo con cui si svolgono le presenti equazioni (110) si osservi, che alle $n-1$ lettere ρ, π, ξ, $\cdots$ β, y corrispondono 1, 2, 3, $\cdots$ $n-1$ equazioni disposte in $n-1$ ranghi o file. Nel gruppo de' primi n_r-1 ranghi relativi alle lettere ρ, π, $\cdots$ μ i secondi membri sono funzioni lineari delle quantità successive $\Sigma 1$, $\Sigma^2 1$, $\Sigma^{n_r-1} 1$. Poscia s' incontra una fila di n_r equazioni relative alla lettera λ, i cui secondi membri hanno per comun fattore $\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{\Sigma 1}$. Succede quindi un 2.° gruppo di $n_{r-1}-1$ ranghi di eguaglianze, i cui secondi membri seguono a primo tratto la legge del 1.° gruppo dianzi accennato, cioè contengono di mano in mano sotto forma lineare le quantità $\Sigma 1$, $\Sigma^2 1$, $\cdots$ $\Sigma^{n_{r-1}-1}$, ma infine esibiscono in ciascun rango n_{r-1} funzioni soggette alla legge della fila precedente relativa alla lettera λ. Si trova in seguito una fila relativa alla lettera η, che consta di due parti, cioè di n_{r-1} equazioni i cui secondi membri hanno per comun fattore $\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\right)^{\Sigma 1}$, e di n_r equazioni che hanno per fattore de' loro secondi membri $\left(\frac{a_r}{a_{r-2}}\right)^{\Sigma 1}$, seguendo tutte una legge analoga a quella delle equazioni relative alla lettera λ. Succederebbe un 3.° gruppo di $n_{r-2}-1$ ranghi, le cui eguaglianze cominciano dall'avere, come nel 1.° gruppo, per secondi membri funzioni di 1.° grado contenenti di mano in mano $\Sigma 1$, $\Sigma^2 1$, $\cdots$ $\Sigma^{n_{r-2}-1} 1$, e procedono in seguito colla legge della fila anteriore relativa alla lettera η. La fila susseguente sarebbe divisa in tre parti o sezioni rispettivamente costituite da n_{r-2}, n_{r-1}, n_r equazioni, i cui secondi membri, seguendo sempre la legge delle file relative a λ, e ad η, avrebbero per rispettivi fattori comuni $\left(\frac{a_{r-2}}{a_{r-3}}\right)^{\Sigma 1}$, $\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-3}}\right)^{\Sigma 1}$, $\left(\frac{a_r}{a_{r-3}}\right)^{\Sigma 1}$. Indi si incontrerebbe un 4.° gruppo di $n_{r-3}-1$ ranghi ecc., e in simil guisa si giungerà alla fila relativa alla lettera δ, che si divide in $r-1$ parti costituite da n_2, n_3, $\cdots$ n_r equazioni, i cui secondi membri hanno rispettivamente per comun fattore $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\Sigma 1}$, $\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{\Sigma 1}$, $\cdots$ $\left(\frac{a_r}{a_1}\right)^{\Sigma 1}$, e seguono una legge analoga a quella della fila di equazioni relative alla lettera λ. Si troverà infine un ultimo gruppo di n_r-1 ranghi re-

lativi alle lettere $\gamma, \cdots y$, le cui equazioni cominciano dall' avere per secondi membri delle funzioni lineari di $\Sigma 1$, $\Sigma 1$, $\cdots \Sigma^{n_1 - 1}$, in modo analogo al gruppo de' primi $n_r - 1$ ranghi, e procedono nel rimanente colla legge della fila predetta di equazioni relative alla lettera δ. Pertanto se alcuno n_m de' numeri n_1, $n_2, \cdots n_r$ fosse eguale all' unità, mancherebbe il gruppo degli $n_m - 1$ ranghi che precedono la fila ove la prima equazione ha per fattore del secondo membro $\left(\frac{a_m}{a_{m-1}}\right)^{\Sigma 1}$, o che succedono a quella in cui si incomincia a trovare per fattore del secondo membro $\left(\frac{a_{m+1}}{a_m}\right)^{\Sigma 1}$. Sarà poi conveniente applicare in ogni caso alle varie file di equazioni del sistema (110), risalendo dalle inferiori alle superiori, le lettere β, γ senza interruzione, cosicchè queste corrispondano alle lettere adoperate nelle equazioni (4) (7), e nelle relazioni (9).

Viceversa il paragone delle equazioni (105) con quelle che si ottengono dalla sostituzione delle espressioni (103) di $\tau_{(n_r), r} \cdots \tau_{(1), r}$ ecc. ossia di $\tau_{(n)}\ \tau_{(n-1)}$ ecc. nelle (45) offrirebbe $\left(E\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$, $\left(E\frac{\pi_2}{\pi_1}\right)$, $\left(E\frac{\pi_3}{\pi_1}\right)$, ecc. in funzione di $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\frac{\pi_2}{\pi_1}$, $\frac{\pi_3}{\pi_1}$ ecc. Per formare le retrovariate di queste nuove eguaglianze basterebbe permutare nella (110) le quantità della prima di dette due serie con quelle dell' altra, e sostituire $(-1)^m E^m \Sigma^m 1$ a $\Sigma^m 1$. Non occorre occuparsi di siffatte equazioni affatto superflue, nè delle identità che se ne potrebbero dedurre colla differenziazione finita.

Onde conseguire le espressioni di $E\sigma_1$, $E\rho_1$, $E\pi_1$ ecc., introduciamo il valore di $L_{n_r, r}$ (104) nella espressione di $\tau_{(n_r), r}$ desunta dalla formula (103), e paragonando questa espressione colla formula (12) avremo l' eguaglianza

$$E^n y_1 \cdot E^{n-1} \beta_1 \cdot \cdots \cdot E^2 \rho_1 \cdot E \sigma_1 = (E^n y_1)(E^{n-1} \beta_1) \cdot \cdots \cdot (E \sigma_1)\, a_r^{E\Sigma 1}.$$

In simil guisa prescindendo ogni volta dall' ultimo de' valori elementari di y si avrà una serie di n equazioni in cui mancheranno di mano in mano ρ_1, σ_1, ecc. e gli ordini delle variate di y_1, β_1, ecc. andranno scemando dell' unità. Le prime n_r equazioni così dedotte avranno per fattor comune de' loro secondi membri $a_r^{E\Sigma 1}$, ma ne' secondi membri delle n_{r-1} equazioni susseguenti si tro-

verà invece il fattore $a_{r-1}^{E\Sigma 1}$ ecc., e parimenti il gruppo dell'ultime n_1 equazioni presenterà per fattor comune de' secondi membri $a_1^{E\Sigma 1}$. Quindi colla relativa divisione de' due membri di ciascuna eguaglianza per quelli della variata dell'equazione susseguente otterremo

$$E\sigma_1 = \frac{(E^n y_1)(E^{n-1}\beta_1)\cdots(E\sigma_1)}{(E^{n-1}y_1)(E^{n-2}\beta_1)\cdots(E\rho_1)a_r}, \cdots\cdot E\mu_1 = \frac{(E^{n-n_r+1}y_1)\cdots\cdots(E\mu_1)}{(E^{n-n_r}y_1)\cdots\cdots(E\lambda_1)a_{r-1}}\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{E\Sigma 1};$$

$$E\lambda_1 = \frac{(E^{n-n_r}y_1)\cdots(E\lambda_1)}{(E^{n-n_r-1}y_1)\cdots(E\varkappa_1)a_{r-1}}, \cdots\cdots\cdots E\vartheta_1 = \frac{(E^{n-n_r-n_{r-1}+1}y_1)\cdots(E\vartheta_1)}{(E^{n-n_r-n_{r-1}}y_1)\cdots(E\eta_1)a_{r-2}}\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\right)^{E\Sigma 1};$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$E\delta_1 = \frac{(E^{n_1}y_1)(E^{n_1-1}\beta_1)\cdots(E\delta_1)}{(E^{n_1-1}y_1)\cdots(E\gamma_1)a_1}, \cdots\cdots\cdot E\beta_1 = \frac{(Ey_1)(E\beta_1)}{(Ey_1)a_1}, \qquad Ey_1 = (Ey_1)a_1^{E\Sigma 1};$$

di maniera che attribuendo ad x quel valore che rende $\Sigma 1 = -1$, e denotando con (σ_1) (ρ_1) ecc. i valori corrispondenti di σ_1, ρ_1, ecc., avremo una serie di eguaglianze, pe' cui membri dividendo rispettivamente quelli delle eguaglianze testè indicate otterremo

$$(111)\qquad E\sigma_1 = (E\sigma_1),\quad E\rho_1 = (E\rho_1),\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad E\mu_1 = (E\mu_1)\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}\right)^{E\Sigma 1};$$

$$E\lambda_1 = (E\lambda_1),\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad E\vartheta_1 = (E\vartheta_1)\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\right)^{E\Sigma 1};$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$E\delta_1 = (E\delta_1),\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad E\beta_1 = (E\beta_1),\quad Ey_1 = (Ey_1)a_1^{E\Sigma 1} = a_1^{E\Sigma 1};$$

La retrovariazione di queste equazioni ci darebbe $\sigma_1, \rho_1, \cdots \beta_1, y_1$, e dal prodotto delle equazioni **(111)** variate $0, 1, 2, \cdots n-1$ volte si avrà pure

$$(111, A)\qquad E^n y_1 \cdot E^{n-1}\beta_1 \cdots E^2\rho_1 \cdot E\sigma_1 = (Ey_1)(E\beta_1)\cdots\cdots(E\sigma_1)\,a_r^{n_r}a_{r-1}^{n_{r-1}}\cdots a_1^{n_1}a_r^{\Sigma 1}$$

$$= (-1)^n A_n (Ey_1)(E\beta_1)\cdots(E\sigma_1)\,a_r^{\Sigma 1}.$$

Conviene poi avvertire, che se alcuno n_m de' numeri n_1, n_2, ecc. si riduce all' unità, è mestieri nella fila di equazioni del sistema (111), l'ultima delle quali ha per fattore del secondo membro $a_m^{E\Sigma 1}$, sopprimere tutte l'altre equazioni, ad eccezione dell' ultima, avendo sempre la cura che le lettere β, γ, ecc. si succedano senza interruzione in modo da corrispondere colle cifre delle equazioni (9). Così nel caso, in cui tutte le radici dell' equazione (86) sieno fra loro disuguali, si avrebbe (111)

$$\sigma_1=(\sigma_1)\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{E\Sigma 1}, \quad \rho_1=(\rho_1)\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)^{E\Sigma 1}, \ldots\ldots \beta_1=(\beta_1)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{E\Sigma 1}, \quad y=(y_1)\,a_1^{E\Sigma 1}=a_1^{\Sigma 1}.$$

La differenziazione finita delle equazioni (110), avuto riguardo alle relazioni (9), ci offre un nuovo sistema di equazioni, che può presentarsi sotto due aspetti alquanto diversi, secondochè la differenza finita d' un prodotto PQ si esprima per $P\Delta Q+EQ\cdot\Delta P$, oppure per $Q\Delta P+EP\cdot\Delta Q$. Servendoci della prima di queste due formule, e risalendo dall'ultime file (110) alle superiori troviamo

(112)

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_1=1, \quad \beta_2=\frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots\ldots \quad \beta_{n_1-1}=\frac{y_{n_1-1}}{y_1}, \\
\beta_{n_1}=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{y_{n_1+1}}{y_1}, \quad \beta_{n_1+1}=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{y_{n_1+2}}{y_1}+\frac{a_2}{a_1}\frac{y_{n_1+1}}{y_1}, \quad \ldots\ldots \\
\beta_{n_1+n_2}=\left(\frac{a_3}{a_1}-1\right)\frac{y_{n_1+n_2+1}}{y_1}, \quad \ldots\ldots \\
\beta_{n-n_r}=\left(\frac{a_r}{a_1}-1\right)\frac{y_{n-n_r+1}}{y_1}, \quad \ldots\ldots \quad \beta_{n-1}=\left(\frac{a_r}{a_1}-1\right)\frac{y_n}{y_1}+\frac{a_r}{a_1}\frac{y_{n-1}}{y_1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_1=1, \quad \delta_2=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \quad \delta_3=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{\gamma_4}{\gamma_1}+\frac{a_2}{a_1}\frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \quad \ldots\ldots
\end{array}\right.$$

$$\zeta_1=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \zeta_2=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{\delta_3}{\delta_1}+\frac{a_2}{a_1}\frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vartheta_1=\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}-1\right)\frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \vartheta_2=\left(\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}-1\right)\frac{\eta_3}{\eta_1}+\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}\frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \ldots\ldots$$

$$\vartheta_{n_{r-1}+1}=\left(\frac{a_r}{a_{r-2}}-1\right)\frac{\eta_{n_{r-1}+2}}{\eta_1}, \ldots \vartheta_{n_{r-1}+n_r}=\left(\frac{a_r}{a_{r-2}}-1\right)\frac{\eta_{n_{r-1}+1}}{\eta_1}+\frac{a_r}{a_{r-2}}\frac{\eta_{n_{r-1}}}{\eta_1},$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\iota_1=1, \quad \iota_2=\frac{\vartheta_1}{\vartheta_1}, \quad \ldots\ldots \quad \iota_{n_{r-1}-1}=\frac{\vartheta_{n_{r-1}-1}}{\vartheta_1}, \\
\iota_{n_{r-1}}=\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}-1\right)\frac{\vartheta_{n_{r-1}+1}}{\vartheta_1}, \quad \ldots\ldots \\
\ldots\ldots \\
\lambda_1=1, \quad \lambda_2=\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}-1\right)\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}, \quad \lambda_3=\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}-1\right)\frac{\varkappa_4}{\varkappa_1}+\frac{a_r}{a_{r-1}}\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}, \quad \ldots\ldots
\end{array}\right.$$

$$\mu_1=\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}-1\right)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \mu_2=\left(\frac{a_r}{a_{r-1}}-1\right)\frac{\lambda_3}{\lambda_1}+\frac{a_r}{a_{r-1}}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\nu_1=1, \quad \nu_2=\frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \ldots\ldots \quad \nu_{n_r-1}=\frac{\mu_{n_r-1}}{\mu_1}, \\
\ldots\ldots \\
\rho_1=1, \quad \rho_2=\frac{\pi_2}{\pi_1}, \\
\sigma_1=1.
\end{array}\right.$$

La presente tabella è costituita da n file o ranghi, che contengono n, $n-1$, $\cdots$ 3, 2, 1 eguaglianze relative alle lettere β, γ, $\cdots$ ρ, σ. Nel gruppo de' primi n_1-1 ranghi si trova l' unità per secondo membro della prima equazione d'ogni rango, poscia i secondi membri sono i rapporti de' valori elementari della lettera o quantità precedente col primo di questi valori; finchè a partire dalle equazioni determinanti β_{n_1}, γ_{n_1-1} $\cdots$ δ_2 si manifesta ne' secondi membri la legge della n_1^{esima} fila relativa alla lettera ζ, che si trova divisa in $r-1$ parti o sezioni costituite da n_2, n_3, $\cdots$ n_r equazioni, i cui secondi membri cominciano da prodotti che hanno per rispettivi fattori $\frac{a_2}{a_1}-1$, $\frac{a_3}{a_1}-1$, $\cdots$

$\cdots \frac{a_r}{a_1} - 1$, e proseguono coll'esibire un prodotto dotato dello stesso fattore, ed un altro prodotto che ha rispettivamente per fattore $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \cdots \frac{a_r}{a_1}$. Succederebbe a questa fila un 2.° gruppo di $n_2 - 1$ ranghi di equazioni, i cui secondi membri procedono a primo tratto come quelli del 1.° gruppo di $n_1 - 1$ ranghi testè indicato, ma poscia seguono la legge della $(n_1 + n_2)^{esima}$ fila susseguente, la quale consta di $r - 2$ sezioni composte di $n_3, n_4, \cdots n_r$ eguaglianze, i cui secondi membri sono dapprima un prodotto che ha per rispettivo fattore $\frac{a_3}{a_2} - 1, \frac{a_4}{a_2} - 1, \cdots \frac{a_r}{a_2} - 1$, e successivamente esibiscono un prodotto consimile aggiunto ad un altro prodotto che ha per rispettivo fattore $\frac{a_3}{a_2}$, $\frac{a_4}{a_2}, \cdots \frac{a_r}{a_2}$. Così procedendo si giunge alla $(n - n_r - n_{r-1})^{esima}$ fila relativa alla lettera ϑ, che si divide in due parti l'una composta di n_{r-1} equazioni, i cui secondi membri cominciano da un prodotto che ha per fattore $\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}} - 1$, e si compongono poscia d'un prodotto che ha lo stesso fattore, e di un prodotto che ha per fattore $\frac{a_{r-1}}{a_{r-2}}$, l'altra contenente n_r eguaglianze, i cui secondi membri sono dapprima un prodotto che ha per fattore $\frac{a_r}{a_{r-2}} - 1$, e poscia la somma di un prodotto che ha lo stesso fattore, e d'un altro prodotto che ha per fattore $\frac{a_r}{a_{r-2}}$. Si incontra appresso un penultimo gruppo di $n_{r-1} - 1$ ranghi di equazioni i cui secondi membri seguono a primo tratto la legge del gruppo de' primi $n_1 - 1$ ranghi, e degli altri gruppi analoghi, ma infine presentano come nella susseguente fila $(n - n_r)^{esima}$ relativa alla lettera μ un numero n_r di eguaglianze, che hanno per secondi membri in primo luogo un prodotto col fattore $\frac{a_r}{a_{r-1}} - 1$, e successivamente la somma d'un prodotto collo stesso fattore, e di un altro prodotto che ha per fattore $\frac{a_r}{a_{r-1}}$. Finalmente alla fila $(n - n_r)^{esima}$ suc-

cede l' ultimo gruppo di $n_r - 1$ ranghi di equazioni i cui secondi membri cominciano dall' unità, e procedono colla legge che si scorge a prima giunta nel gruppo de' primi $n_1 - 1$ ranghi e in ogni altro gruppo consimile. Quindi è palese che se alcuno n_m de' numeri $n_1, n_2, \cdots n_r$ si riduce all' unità, conviene sopprimere nella serie delle equazioni (112) il gruppo degli $n_m - 1$ ranghi di equazioni che precedono la fila in cui i secondi membri cominciano da un prodotto che ha per fattore $\frac{a_{m+1}}{a_m} - 1$, o succedono a quella ove i secondi membri cominciano dall' avere per fattore $\frac{a_m}{a_{m-1}} - 1$, avvertendo sempre di adoperare le lettere β, γ, ecc. in modo da non interrompere la serie e da mantenere la progressione delle cifre adottate nelle relazioni (9). Così nel caso in cui tutte le radici dell' equazione (86) sieno diseguali si avrebbe

$$\beta_1 = \left(\frac{a_2}{a_1} - 1\right)\frac{y_2}{y_1}, \quad \beta_2 = \left(\frac{a_3}{a_1} - 1\right)\frac{y_3}{y_1}, \quad \cdots\cdots \quad \beta_{n-1} = \left(\frac{a_n}{a_1} - 1\right)\frac{y_n}{y_1},$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{a_3}{a_2} - 1\right)\frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \gamma_{n-2} = \left(\frac{a_n}{a_2} - 1\right)\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_1 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 1\right)\frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad \rho_2 = \left(\frac{a_n}{a_{n-2}} - 1\right)\frac{\pi_3}{\pi_1},$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Volendosi sviluppare i valori elementari di $\beta, \gamma, \cdots \sigma$ mediante il sistema delle equazioni (112), basta calcolare preventivamente colla stessa tavola $(\beta_1)\,(\beta_2) \cdots (\gamma_1)$ ecc. attribuendo ad x quel valore che rende $\Sigma 1 = -1$. Le quantità $(\beta_1)\,(\beta_2) \cdots (\beta_{n-1})$ avranno i valori seguenti:

$$(\beta_1) = 1, \quad (\beta_2) = -1, \quad \cdots\cdots \quad (\beta_{n_1-1}) = (-1)^{n_1-2},$$

$$(\beta_{n_1}) = 1 - \frac{a_1}{a_2}, \quad (\beta_{n_1+1}) = \frac{a_1}{a_2}, \quad \cdots\cdots \quad (\beta_{n_1+n_2-1}) = (-1)^{n_2-2}\frac{a_1}{a_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\beta_{n-n_r}) = 1 - \frac{a_1}{a_r}, \quad (\beta_{n-n_r+1}) = \frac{a_1}{a_r}, \quad \cdots\cdots \quad (\beta_{n-1}) = (-1)^{n_r-2}\frac{a_1}{a_r}.$$

Si potrebbe invece dedurre i valori elementari di β, γ, $\cdots \rho$, σ dal sistema delle equazioni (110), e dalle retrovariate delle equazioni (111), sol che si ottengano col mezzo delle variate delle eguaglianze (112) i valori di $(E\beta_1)$, $(E\beta_2)$, $\cdots (E\sigma_1)$ corrispondenti a $\Sigma 1 = -1$. Ora siccome prendendo le variate delle equazioni (112), ed attribuendovi ad x quel valore che rende $E\Sigma 1 = 0$, ossia $\Sigma 1 = -1$, abbiamo evidentemente

$$\left(E\frac{y_{n_1+1}}{y_1}\right) = 1, \quad \left(E\frac{y_{n_1+n_2+1}}{y_1}\right) = 1, \quad \cdots\cdots \quad \left(E\frac{y_{n-n_r+1}}{y_1}\right) = 1,$$

e troviamo annullarsi (40, C) le variate degli altri valori elementari di y; se ne raccoglie

(113)

$$(E\beta_1) = 1, \quad (E\beta_2) = 0, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (E\beta_{n_1-1}) = 0,$$

$$(E\beta_{n_1}) = \frac{a_2}{a_1} - 1, \quad (E\beta_{n_1+1}) = \frac{a_2}{a_1}, \quad (E\beta_{n_1+2}) = 0, \quad \cdots\cdots \quad (E\beta_{n_1+n_2-1}) = 0,$$

$$(E\beta_{n_1+n_2}) = \frac{a_3}{a_1} - 1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(E\beta_{n-n_r}) = \frac{a_r}{a_1} - 1, \quad (E\beta_{n-n_r+1}) = \frac{a_r}{a_1}, \quad (E\beta_{n-n_r+2}) = 0, \quad \cdots \quad (E\beta_{n-1}) = 0.$$

ecc.

Il sistema di queste equazioni si protrae fino all'ultime con legge analoga a quella testè spiegata delle equazioni (112).

Ma senza svolgere nell'uno o nell'altro modo le funzioni esprimenti i valori elementari di β, γ, $\cdots \rho$, σ, è sufficiente calcolare $(E\beta_1)$, $(E\beta_2)$, $\cdots (E\sigma_1)$ mercè la tavola (113) fondata sulla stessa legge con cui procedono le equazioni (112), per conseguire (93) lo sviluppo in integrali semplici dell'integrale completo d'ogni equazione lineare a coefficienti costanti. Infatti non resterà che dedurre dalla formula (111, A) il valore di $(E^n y_1)$ $(E^{n-1}\beta_1) \cdots (E\sigma_1)$ per ottenere dalle equazioni (104) (105) $L_{n_r, r}$, $\cdots L_{1, r}$, $L_{n_{r-1}, r-1}$ ecc., e quindi determinare, mercè la formula (103), $\tau_{(n_r), r}$, $\tau_{(n_r-1), r}$ ecc. comprese (93) nello sviluppo cercato.

Anzichè adoperare una sola distribuzione de' valori elementari di y, e calcolare i valori di tutte le costanti $L_{p,q}$ coll'intero sistema delle equazioni (105),

si potrebbe determinare le quantità (113) per ciascuna delle r disposizioni dei valori elementari di y, in cui l'ultimo posto è occupato da $a_q^{\Sigma 1} \Sigma^{n_q-1} 1$, essendo q uno de' numeri $r, r-1, r-2, \cdots 2, 1$. Allora per ciascun valore di q basta assegnare i valori di $L_{n_q, q}, \cdots L_{1,q}$ mediante le n_q equazioni (106).

Giova osservare a questo proposito, che per qualsivoglia delle suddette distribuzioni de' valori elementari di y si ricava dal paragone delle equazioni (106) colle (107)

$$(114) \qquad (E^n y_1)(E^{n-1}\beta_1)\cdots(E\sigma_1) = a_q^{n_q-1} f(a_q),$$

$$\left(E\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \left(E\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) = \cdots\cdot = \left(E\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \frac{a_q f'(a_q)}{f(a_q)},$$

$$\left(E\frac{\pi_3}{\pi_1}\right) = \left(E\frac{3}{\xi_1}\right) = \cdots\cdot = \left(E\frac{\mu_3}{\mu_1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{a_q^2 f''(a_q)}{f(a_q)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(E\frac{\mu_{n_q}}{\mu_1}\right) = \frac{a_q^{n_q-1}}{1.2.3\ldots(n_q-1)}\,\frac{f^{(n_q-1)}(a_q)}{f(a_q)}.$$

Pertanto riproducendo la 1.ª delle equazioni (106) possiamo esporre le rimanenti sotto questo aspetto

$$(115) \qquad L_{n_q, q} = \frac{a_q^{n_q-1}}{(E^n y_1)(E^{n-1}\beta_1)\cdots(E\sigma_1)},$$

$$-L_{n_q-1, q} = \frac{L_{n_q, q}}{a_q}\left(E\frac{\mu_2}{\mu_1}\right),$$

$$-L_{n_q-2, q} = \frac{L_{n_q-1, q}}{a_q}\left(E\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{L_{n_q, q}}{a_q^2}\left(E\frac{\mu_3}{\mu_1}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-L_{1, q} = \frac{L_{2, q}}{a_q}\left(E\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \cdots\cdot + \frac{L_{n_q, q}}{a_q^{n_q-1}}\left(E\frac{\mu_{n_q}}{\mu_1}\right).$$

Di più le prime $n_q - 1$ equazioni d'ogni sistema conforme al (110) ci esibiranno a cagione delle (114)

(116) $$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\pi_2}{\pi_1}=\cdots=\frac{\mu_2}{\mu_1}=a_q\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}+\Sigma 1\,,$$

$$\frac{\pi_3}{\pi_1}=\frac{\xi_3}{\xi_1}=\cdots=\frac{\mu_3}{\mu_1}=\frac{a_q^2}{2}\frac{f''(a_q)}{f(a_q)}+a_q\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}\Sigma 1+\Sigma^2 1\,,$$

. . . .

$$\frac{\mu_{n_q}}{\mu_1}=\frac{a_q^{n_q-1}}{1.2.3\ldots(n_q-1)}\frac{f^{(n_q-1)}(a_q)}{f(a_q)}+\cdots+a_q\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}\Sigma^{n_q-2}1+\Sigma^{n_q-1}1\,,$$

e colla differenziazione finita delle (114) si avrà pure (9)

(117) $$\sigma_1=\rho_1=\pi_1=\cdots=\nu_1=1\,,$$

$$\rho_2=\pi_2=\cdots=\nu_2=a_q\frac{f'(a_q)}{f(a_q)}+\Sigma 1=\frac{\mu_2}{\mu_1};$$

. . . .

$$\nu_{n_q-1}=\frac{\mu_{n_q}}{\mu_1}.$$

Offriremo in ultimo luogo un esempio dell' uso della tavola (113), che risulta dalla (112) nella supposizione di $\Sigma 1=-1$, proponendoci un' altra volta l'equazione lineare alle differenze del 5.° ordine già trattata ne' Cap. VII, VIII, e ritenendo che tre radici della relativa equazione algebrica (86) sieno eguali ad a_1, e le due rimanenti equivalgano ad a_2. Dall' una delle distribuzioni de' valori elementari di y cioè

$$y_1=a_1^{\Sigma 1},\qquad y_2=a_1^{\Sigma 1}\Sigma 1,\qquad y_3=a_1^{\Sigma 1}\Sigma^2 1,\qquad y_4=a_2^{\Sigma 1},\qquad y_5=a_2^{\Sigma 1}\Sigma 1,$$

ricaveremo (113)

$$(\text{E}\beta_1)=1,\qquad (\text{E}\beta_2)=0,\qquad (\text{E}\beta_3)=\frac{a_2}{a_1}-1,\qquad (\text{E}\beta_4)=\frac{a_2}{a_1},$$

$$(\text{E}\gamma_1)=1,\qquad (\text{E}\gamma_2)=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{(\text{E}\beta_3)}{(\text{E}\beta_1)}=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^2,$$

$$(\text{E}\gamma_3)=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{(\text{E}\beta_4)}{(\text{E}\beta_1)}+\frac{a_2}{a_1}\frac{(\text{E}\beta_3)}{(\text{E}\beta_1)}=2\,\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right);$$

$$(E\delta_1)=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{(E\gamma_2)}{(E\gamma_1)}=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^3,\quad (E\delta_2)=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)\frac{(E\gamma_3)}{(E\gamma_1)}+\frac{a_2}{a_1}\frac{(E\gamma_2)}{(E\gamma_1)}=3\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^2,$$

$(E\sigma_1)=1$;

e poichè dall' equazione (111, A) risulta

$$(E^5 y_1)(E^4\beta_1)(E^3\gamma_1)(E^2\delta_1)(E\sigma_1)=\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)^3 a_2 a_1^3=(a_2-a_1)^3 a_2,$$

troveremo che le equazioni (104) (105) ci danno gli stessi valori di $L_{2,2}$, $L_{1,2}$, $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, $L_{1,1}$ già conseguiti alla fine del Cap. VIII, e quindi la formula (103) ci offrirà le espressioni di $\tau_{(2),2}$, $\tau_{(1),2}$, $\tau_{(3),1}$, $\tau_{(2),1}$ $\tau_{(1),1}$ ottenute nel Cap. VII.

Coll' altra distribuzione de' valori elementari di y nella serie

$$y_1=a_2^{\Sigma 1},\quad y_2=a_2^{\Sigma 1}\Sigma 1,\quad y_3=a_1^{\Sigma 1},\quad y_4=a_1^{\Sigma 1}\Sigma 1,\quad y_5=a_1^{\Sigma 1}\Sigma^2 1,$$

si avrebbe (113)

$$(E\beta_1)=1,\quad (E\beta_2)=\frac{a_1}{a_2}-1,\quad (E\beta_3)=\frac{a_1}{a_2},\quad (E\beta_4)=0,$$

$$(E\gamma_1)=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{(E\beta_2)}{(E\beta_1)}=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)^2,\quad (E\gamma_2)=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{(E\beta_3)}{(E\beta_1)}+\frac{a_1}{a_2}\frac{(E\beta_2)}{(E\beta_1)}=2\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right),$$

$$(E\gamma_3)=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{(E\beta_4)}{(E\beta_1)}+\frac{a_1}{a_2}\frac{(E\beta_3)}{(E\beta_1)}=\frac{a_1^2}{a_2^2},$$

$$(E\delta_1)=1,\quad (E\delta_2)=\frac{(E\gamma_2)}{(E\gamma_1)}=\frac{2a_1}{a_1-a_2},$$

$(E\sigma_1)=1$;

e dalla (111, A) si avrà pure

$$(E^5 y_1)(E^4\beta_1)(E^3\gamma_1)(E^2\delta_1)(E\sigma_1)=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)^2 a_1^2 a_2^2=(a_1-a_2)^2 a_1^2.$$

Questi valori di $(E\beta_1)$, $(E\beta_2)$, $\cdots$ $(E\sigma_1)$ coincidono con quelli, che nella supposizione di $\Sigma 1=-1$ vengono assunti dalle variate delle funzioni β_1, β_2, $\cdots$ σ_1 già trovate nel Cap. VII colla seconda disposizione de' valori ele-

mentari di y. Non sarà inopportuno verificare, che le espressioni di dette funzioni desunte dalla tavola (112) sono conformi alle espressioni determinate nel Cap. VII. Ed infatti troviamo (112)

$$\beta_1=1, \qquad \beta_2=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{y_3}{y_1}=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\Sigma 1},$$

$$\beta_3=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{y_4}{y_1}+\frac{a_1 y_3}{a_2 y_1}=\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\Sigma 1+\frac{a_1}{a_2}\right\}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\Sigma 1},$$

$$\beta_4=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{y_5}{y_1}+\frac{a_1 y_4}{a_1 y_1}=\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\Sigma^2 1+\frac{a_1}{a_2}\Sigma 1\right\}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\Sigma 1},$$

$$\gamma_1=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{\beta_2}{\beta_1}=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)^2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\Sigma 1},$$

$$\gamma_2=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{\beta_3}{\beta_1}+\frac{a_1\beta_2}{a_2\beta_1}=\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)^2\Sigma 1+2\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\right\}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\Sigma 1},$$

$$\gamma_3=\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\frac{\beta_4}{\beta_1}+\frac{a_1}{a_2}\frac{\beta_3}{\beta_1}=\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)^2\Sigma^2 1+2\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\Sigma 1+\frac{a_1^2}{a_2^2}\right\}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\Sigma 1},$$

$$\delta_1=1, \qquad \delta_2=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\Sigma 1+\frac{2a_1}{a_1-a_2},$$

$$\sigma_1=1.$$

Ottenuti i valori di $(E\beta_1)$, $(E\beta_2)$, $\cdots$ $(E\sigma_1)$ per cadauna disposizione dei valori elementari di y, possiamo col solo sistema delle equazioni (106), ovvero delle (115), determinare primieramente $L_{2,2}$, $L_{1,2}$, e poscia $L_{3,1}$, $L_{2,1}$, $L_{1,1}$, coll'avvertenza che le quantità $(E\mu_1)$, $(E\mu_2)$ ecc. corrispondono per la prima distribuzione ad $(E\delta_1)$, $(E\delta_2)$, e per l'altra ad $(E\gamma_1)$, $(E\gamma_2)$, $(E\gamma_3)$. Quindi dalle (115) mediante la prima serie de' valori elementari di y, e coll' uso della formula (111, A), o colla 1.ª delle (114), avremo

$$L_{2,2}=\frac{a_2}{(E^5 y_1)(E^4\beta_1)(E^3\gamma_1)(E^2\delta_1)(E\sigma_1)}=\frac{1}{(a_2-a_1)^3},$$

$$-L_{1,2}=\frac{L_{2,2}}{a_2}\left(E\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)=\frac{3}{(a_2-a_1)^4},$$

e coll' altra serie di detti valori elementari otterremo

$$L_{3,1} = \frac{a_1^2}{(E^5 y_1)(E^4 \beta_1)(E^3 \gamma_1)(E^2 \delta_1)(E \sigma_1)} = \frac{1}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$-L_{2,1} = \frac{L_{3,1}}{a_1}\left(E \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) = \frac{2}{(a_1 - a_2)^3},$$

$$-L_{1,1} = \frac{L_{2,1}}{a_1}\left(E \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) + \frac{L_{3,1}}{a_1^2}\left(E \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right) = -\frac{3}{(a_1 - a_2)^4}.$$

I presenti valori s'accordano pure con quelli di dette costanti trovati nel Cap. VIII.

Colla seconda distribuzione de' valori elementari di y si avrebbe dalle formule (116), a cagione di $f(a) = \frac{F(a)}{(a-a_1)^3} = (a-a_2)^2$,

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{2\,a_1}{a_1 - a_2} + \Sigma 1, \qquad \frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{a_1^2}{(a_1 - a_2)^2} + \frac{2\,a_1 \Sigma 1}{a_1 - a_2} + \Sigma^2 1,$$

coerentemente a' risultati del calcolo che ci ha servito poc' anzi a determinare β_1, $\beta_2, \cdots \sigma_1$ mercè la tavola (112).

Osserveremo infine che se si chiegga lo sviluppo della variata d'ordine m, oppure della retrovariata m^{esima} di y, anzichè ricorrere alle formule (97) (101) (101, B), e determinare le costanti $\overline{L}^{\pm m}_{p,q}$ con qualsivoglia metodo di spezzamento della frazione $\frac{a^{\pm m}}{F(a)}$, e in particolare colla formula (100) per m positivo, e colla (100, A) per m sì positivo che negativo, oppure col sistema delle equazioni analoghe alle (107)

$$f(a_q)\, \overline{L}^{\pm m}_{n_q, q} = a_q^{\pm m},$$

$$f(a_q)\, \overline{L}^{\pm m}_{n_q - 1, q} + f'(a_q)\, \overline{L}^{\pm m}_{n_q, q} = \pm m\, a_q^{\pm m - 1}, \qquad \text{ecc.}$$

gioverà invece calcolare soltanto le quantità $L_{p,q}$, o collo spezzamento finale

della frazione $\frac{1}{F(a)}$, oppure col metodo esposto nel presente Cap. IX, e così ottenere (103) le funzioni $\tau_{(n_r),r}$ $\tau_{(n_r-1),r} \cdots \tau_{(1),r}$ ecc. cioè le funzioni $\tau_{(n)}$, $\tau_{(n-1)}$, ecc. comprese nelle formule (80) (81) (81, C). Imperocchè queste formule ci additano che dallo sviluppo (26) dell'espressione di y si passa immediatamente a quello d'ogni sua variata o retrovariata m^{esima}, col sostituire nella (26) a' valori elementari, y_1, y_2, $\cdots y_n$, che moltiplicano gli integrali finiti, le loro variate o retrovariate d'un ordine eguale al richiesto, e coll' aggiungere (81, A) il gruppo $\sum_{q=0}^{q=m-n+1} \mathrm{E}^{m-n-q}(M^{(q)}X)$, se l'ordine m della variata sia superiore ad $n-1$, ovvero (81, C) il gruppo $\sum_{q=0}^{q=m} \mathrm{E}^{-m+q}(P_q X)$, ove si tratti della retrovariata m^{esima} di y; essendo i valori delle costanti $M^{(q)}$ determinati dalle equazioni (82) od (82, A), e quelli di P_q dalle equazioni (81, D).

Così trovato (Cap. VIII, Cap. IX) lo sviluppo dell'integrale completo dell'equazione lineare del 5.° ordine, che abbiamo recato più volte ad esempio,

$$y = a_1^{\Sigma 1} \Sigma^2 1 \cdot \Sigma \tau_{(3),1} + a_1^{\Sigma 1} \Sigma 1 \cdot \Sigma \tau_{(2),1} + a_1^{\Sigma 1} \Sigma \tau_{(1),1}$$
$$+ a_2^{\Sigma 1} \Sigma 1 \cdot \Sigma \tau_{(2),2} + a_2^{\Sigma 1} \Sigma \tau_{(1),2},$$

avremo immantinente

$$\mathrm{E}^6 y = a_1^{\Sigma 1+6} \left\{ \frac{(\Sigma 1 + 5)(\Sigma 1 + 6)}{1 \cdot 2} \Sigma \tau_{(3),1} + (\Sigma 1 + 6) \Sigma \tau_{(2),1} + \Sigma \tau_{(1),1} \right\}$$
$$+ a_2^{\Sigma 1+6} \left\{ (\Sigma 1 + 6) \Sigma \tau_{(2),2} + \Sigma \tau_{(1),2} \right\} + \mathrm{E} \frac{X}{A_0} - \frac{X}{A_0} \mathrm{E} \frac{A_1}{A_0},$$

$$\mathrm{E}^{-2} y = a_1^{\Sigma 1-2} \left\{ \frac{(\Sigma 1 - 3)(\Sigma 1 - 2)}{2} \Sigma \tau_{(3),1} + (\Sigma 1 - 2) \Sigma \tau_{(2),1} + \Sigma \tau_{(1),1} \right\}$$
$$+ a_2^{\Sigma 1-2} \left\{ (\Sigma 1 - 2) \Sigma \tau_{(2),2} + \Sigma \tau_{(1),2} \right\} + \mathrm{E}^{-2} \frac{X}{A_n} - \mathrm{E}^{-2} \frac{A_{n-1}}{A_n} \cdot \mathrm{E}^{-1} \frac{X}{A_n},$$

avvertendo che i valori di $\mathrm{E}^6 \Sigma^2 1$, $\mathrm{E}^{-2} \Sigma^2 1$ risultano da quello di $\Sigma^2 1 = \frac{\mathrm{E}^{-1} \Sigma 1 \cdot \Sigma 1}{1 \cdot 2}$ determinato dalla espressione (40, C).

(*Letta il 28 aprile 1851*)

INTORNO AD UNA NUOVA CLASSIFICAZIONE

DELLE

CALCARIE ROSSE AMMONITICHE

DELLE ALPI VENETE.

MEMORIA

DEL M. E. PROF. CAV. TOMMASO ANTONIO CATULLO.

Nelle mie Osservazioni ad uno scritto: *Su la non promiscuità de' fossili tra il biancone e la calcaria ammonitica rossa,* io diceva che, senza nuocere al piano de' miei studj paleontologici, avrei potuto distaccare la seconda di queste rocce, e riporla tra le più recenti del terreno jurese, ad onta degli esempi che ho allegati circa l'accomunamento di specie cretacee con le specie di formazione più antica, accomunamento già stato antiveduto da La Bèche, e confermato da tutti coloro, che il vero di scienza antepongono al vero di opinione. (1)

Murchison in una dotta Memoria sulla struttura delle Alpi (*Quarterly Journal of the geolog. Soc.,* 13 dec. 1848, 17 febb. 1849) fa onorevole menzione delle osservazioni che ho consegnate nel Prodromo di Geognosia paleozoica

delle Alpi Venete, se non che, ignorando egli i mutamenti per me introdotti nei decorsi anni, crede che sussista una divergenza di opinione circa il posto ch'io assegnava alla calcaria ammonitica rossa, mentre essendomi ricondotto all'antica classificazione del terreno cretaceo da me proposta nella Zoologia fossile, io mi trovo adesso in perfetto accordo con la più gran parte dei Geologi viventi. Nè ciò facendo mi sono posto in contraddizione con le deduzioni che avessi potuto ricavare dalle osservazioni già pubblicate in altri miei scritti, giacchè oltre di avere sempre tenuto conto de' fatti, che mi offeriva la paleontologia, anche quando stavano in disaccordo con la classificazione dei terreni da me adottata (*Zoolog. fossil.* p. 263), ebbi precipua cura di fermare la mia attenzione sopra le specie, che più costantemente ed in maggior copia d'individui si trovano nicchiate entro i limiti di una data formazione, onde attribuire ad esse sole il debito valore. Ho detto in *maggior copia d' individui*, perchè avviene talvolta d'incontrarne qualcuno fuori dell'ordinaria sua sede, cioè mescolato con gl' individui di specie più o meno antiche del suolo, cui esso appartiene. (2)

Questo fatto proclamato innanzi tutti da Brongniart seniore (*Annal. des min.* 1821) fu avvertito da più geologi (*Bull. de la Soc. géol.* Séance 15 Juin 1849), e sono note le discussioni cui diede luogo la scoperta di Fiton in una seduta della Società geologica di Francia, per la quale l'*Ammonites Deshayesii*, che pure abbonda nella creta inferiore del Caucaso (De Buch, *Bull. de la Soc. géol. de France.* Séance du 18 Juin 1849), ed altre specie fossili del Gault risultarono promiscue alla calcaria neocomiana dell'Inghilterra (*Bull. de la Soc. géol.* Séance du 20 mai 1844). A tale annunzio la messe delle osservazioni esposte in quel giorno sul sincronismo di certe zone credute paleozoicamente dissimili crebbe sotto la falce, e allora fu che il celebre Constant Prévost insinuava alla Società geologica di Francia *non doversi accordare tutta la fiducia alla già proposta divisione dei fossili per terreni, senza che vi sia mescolanza di specie di una zona con le specie di un' altra zona, fermo nel pensiero che più accrescendo le indagini e le osservazioni si accresca eziandio il numero dei fatti* analoghi a quelli verificati dal Fiton nelle Alpi Inglesi. E tanto più volontieri ho ricordato le parole dette in quella seduta, quanto ciò che sarò per dire indi a non molto in altro scritto avanzerà in evidenza il fin qui detto, e metterà in guardia chi arrischiò di associare al terreno della creta cloritica la calcaria dell' Alpago,

solo perchè al numero ben grande di fossili neocomiani, cui dà ricetto, si trovano congiunte alcune specie, che il sig. di Orbigny riguarda come esclusivamente proprie della calcaria cloritica della Francia (3).

Riconducendomi per progredire là donde ho preso le mosse, dirò che la separazione della calcaria rossa ammonitica dal sistema cretaceo può tornare legittima anche ad onta di quelle alcune volte che i suoi fossili si mostrassero in altri terreni, purchè si voglia avere riguardo alle circostanze che accompagnano tali anomalie. Diceva in altro mio scritto, che una specie organica fossile pel numero grande degl' individui che la rappresentano fissa l' epoca di formazione del piano, in cui si trova inviluppata, e che se un qualche raro individuo della stessa specie comparisce talvolta negli strati superiori od inferiori di detto piano si dovesse considerarlo come fossile avventizio ivi recato o dall' una o dall' altra delle cause, che ho allegate nella Memoria sopra il Keuper, o marne iridate delle Alpi Venete (*Annali di Sc. nat. di Bologna* fasc. di giug. 1845. 8.°). È dietro a queste norme, ed a seconda dell' importanza più o meno apparente dei caratteri geognostici, che tolsi a studiare le calcarie rosse nei loro più essenziali rapporti con le calcarie bianche o cineree del terreno cretaceo, per indi ripetere con la maggior possibile accuratezza le mie indagini intorno alla calcaria ammonitica rossa, col fine di meglio assicurarmi se realmente appartenga essa stessa al sistema cretaceo, ovvero si dovesse riporla tra le rocce più recenti della formazione jurese, ov' io l' aveva molti anni or sono collocata. (*Zool. foss. delle Prov. Ven.* con tav. Padova 1827, 4.°).

Le calcarie rosse occupano una grande estensione di suolo, e formano parte del sistema *jurese,* ovvero del terreno *cretaceo,* secondo che appartengono all' uno o all' altro dei detti sistemi. Nel primo costituiscono un importantissimo gruppo di rocce distinte coll' epiteto di *soprajurassiche,* perchè in fatto hanno per limite superiore una calcaria rossa talvolta scissile, talvolta sabbioniccia, che soggiace alla calcaria neocomiana, e più spesso si erige in alto coprendo essa sola co' suoi strati più o meno inclinati gli strati della calcaria rossa compatta, che l' è sempre inferiore. Nel secondo sistema le calcarie rosse esistono d' ordinario disgiunte tra loro: i banchi dell' una alternano co' banchi della calcaria neocomiana bianca o gialliccia, di cui contengono gli stessi fossili; laddove gli strati sempre sottili dell' altra sono ora rossi ora bigi, più o meno fossiliferi, e raffigurano forse la zona Albiena di

Orbigny, o meglio una gran porzione del Macigno de' Toscani, ed anche secondo Murchison l'Arenaria carpatica; in una parola essi rappresentano la *Scaglia* dei Veneti geologisti, con la quale, seguendo il metodo *discendente*, prende principio il terreno della creta. Io non mi occuperò adesso che delle prime due calcarie superiormente ricordate, le quali benchè sieno state fin qui confuse in una sola, sotto la denominazione di calcaria ammonitica rossa, pure come si vedrà in seguito, meritano di essere l'una dall'altra distinte.

Circa la distribuzione geografica della calcaria ammonitica il barone de Buch fece osservare ch'essa forma una zona estesissima, che tocca la Crimea per un verso, e per l'altro il monte Tatra nella Polonia, estendendosi all'ovest fino al Jura francese. Appresso egli avverte che l'*Ammonites tatricus*, la *Terebratula diphya*, ed alcuni Aptici sono i fossili, che più particolarmente caratterizzano questa formazione (4) (*Diario del Congresso scientifico di Milano*, 25 *settembre* 1844). Nell'Italia la stessa roccia si prolunga sopra una linea parimente estesa: essa comincia a risorgere presso i confini del Tirolo Tedesco (Stua, nelle pertinenze di Cortina d'Ampezzo) spingendo le sue diramazioni appiè delle Alpi dolomitiche Agordine (Celo, Colazzo ecc.) per dirigersi da varie bande. Verso l'ovest si distende nel Feltrino (Cesio maggiore, Fastro ecc.) per progredire nei Sette Comuni (Rotro, Castelletto, Cesuna) e nel Veronese (Le Sine); e verso l'est si dilata sopra Belluno (Igne, Pirago, Lavazzo ecc.), dove viene escavata per impiegarla come pietra da costruzione. Nel suolo Lombardo ricompare sotto le identiche condizioni (Erbe, Suello, Trescorre, Entratico), di là entra nel Piemonte, e nella Savoja (Murchison), come pure nella Toscana, nell'Umbria, nel Modenese e nella Liguria costituendo ovunque un terreno bene distinto. La calcaria ammonitica sottoposta alla calcaria rossa schistosa di Parodi descritta dal prof. Pilla, e quella dell'agro Perugino e di tutta la linea dei monti secondarii Spoletani sono entrambe contrassegnate dagli stessi fossili che abbiamo in un lungo giro d'anni raccolti nelle montagne della Lombardia e della Venezia, i quali da poche specie in fuori, non sono diversi dai fossili che racchiudono le calcarie rosse del Genovesato.

Calcarie rosse epiolitiche del gruppo soprajurassico.

Questo gruppo, nei luoghi ove ha acquistato tutto il suo sviluppo, si eleva in montagne molto estese, di forma pressochè costante, presentanti chine più

o meno ripide per un verso, segnatamente nel terzo superiore dell'altezza, e conformantisi nel verso opposto in spalti inclinati, ed anche in altipiani (*plateaux*), talvolta presso che orizzontali (chine meridionali di monte Valdart nel Bellunese). Questo terreno può, com'è detto, considerarsi composto di due distinte calcarie, una delle quali non conserva ovunque gli stessi caratteri, ma presenta colori e strutture diverse, mentre l'altra che la ricopre mantiensi quasi sempre di una tinta rosso-oscura vergente talvolta al gialliccio, benchè in qualche luogo perda essa stessa l'aspetto arenaceo per assumere la compage schistosa, ed è allora che inumidita coll'alito esala un forte odore di fango. In varii luoghi l'inclinazione de'suoi strati è forte di 60 a 65 gradi (tra Igne e Pirago nel Bellunese), laddove gli strati della prima sono alquanto meno eretti, e talvolta giaciono in positura che poco si discosta dall'orizzontale (Fastro non lunge dal Cismone, Lavazzo, ecc.). Io chiamo la prima di queste rocce *Calcaria epiolitica inferiore*, e contradistinguo la seconda col nome di *Calcaria epiolitica superiore*, con che vado a rettificare gli equivoci occasionati, come doveva succedere, dall'aver voluto considerare tali rocce come il prodotto di una sola ed unica formazione. Questa distinzione mineralogico-geognostica conduce naturalmente a credere che dall'aspetto terroso della roccia derivi la diversa adesione dei fossili presi nelle dette due calcarie, giacchè quelli inclusi nella calcaria scissile, investiti come sono da un astuccio marnoso, si distaccano con molta facilità; laddove i fossili della calcaria inferiore, sempre compatta e pulibile, sono così tenacemente aderenti che si può dire essere con essa immedesimati.

Fermiamo per un momento la nostra attenzione sopra i fossili contenuti nella più antica di queste calcarie prendendo a scorta principale le specie di Ammoniti, che le sono peculiari, trasandando per ora le reliquie animali di generi diversi, che dai piani di essa roccia trapassarono nei piani delle rocce superiori.

Ammoniti della calcaria epiolitica inferiore delle Alpi Venete.

Se l'*Ammonites Fontana*, l'*Amm. Toblinianus* ed altre specie del medesimo genere, che considero inedite, non si trovassero associate ad alcune poche già pubblicate dall'Orbigny, io non potrei con la guida di esse sole pronunziare verun giudizio sull'età della calcaria che le contiene; ma fortunatamente vengono accompagnate da specie conosciute, le quali ci autorizzano a

crederla di una formazione anteriore a quella della calcaria scissile, con cui è stata confusa.

L'*Ammonites perarmatus*, l'*Amm. annulatus* e *biplex* di Sowerby, e l'*Amm. linguiferus* di Orbigny sono specie note che potrebbero spargere qualche luce sul proposito nostro, se in altri paesi non esistessero in zone di età differenti. Difatto l'*Amm. perarmatus* e *biplex* sono stati trovati dal barone de Buch nella calcaria poliparica dell'Elvezia aggiudicata coetanea al *Coral-rag:* l'*Amm. linguiferus* fu riferito dall'Orbigny alle ooliti inferiori della Vandea e di altri paesi della Francia, mentre l'*Amm. annulatus* (non confondibile con la specie dello stesso nome descritta da Schlotheim) spetta secondo Sowerby al lias inferiore (*Min. conch. cura* Agassiz p. 274), e secondo Orbigny al lias superiore, il qual ultimo sarebbe un equivalente della nostra Calcaria epiolitica superiore. Il cav. Murchison colloca le calcarie di cui si parla nel secondo gruppo del terreno jurese occupato dalle rocce Oxfordiane, e non piuttosto nel primo, che abbraccia le rocce corallifere e portlandiane, che sarebbero le vere rappresentanti del terreno soprajurassico di Brongniart, a cui succede immediatamente il sistema cretaceo. (*Quarterly. Jour. Vol. V. part. I.* 1848-1849). Senza impegnarmi in discussioni per decidere a quale dei tre gruppi appartenga il terreno epiolitico delle Alpi Venete mi limiterò ad osservare che alcuni de' suoi fossili hanno i loro analoghi nel *Coral-rag*, ch'è uno dei membri compresi nel primo gruppo superiore divisato dalla scuola inglese. Le ragioni che vietano di considerare la parte inferiore di detto gruppo come un equivalente del *Coral-rag* sono state dichiarate dal Murchison medesimo nel suo *Schizzo dei terreni oolitici della Germania.* (*Proceeding of the Geol. Society, Mai* 1831). Se dalla giacitura delle calcarie rosse inferiori del Veneto si può visibilmente congetturare, ch'esse abbiano la più grande attenenza con la calcaria corallifera di altri paesi, dall'altro canto si discostano per essere destituite di polipaj. I pochi che possiedo si riferiscono all'ordine dei *Spongiari*, e provengono dalla calcaria epiolitica superiore del Bergamasco, di cui darò le figure nell'opera sopra i polipaj fossili già condotta a compimento.

I fossili poi che oltre gli Ammoniti occorrono nella roccia di cui parliamo, sono varie specie del genere *Inoceramus* (5), alcune delle quali passarono anche negli strati neocomiani superiori, i denti di *Lamna longidens?* di *Ptycodus latissimus*, di *Ptycodus Mortonii* e *mammilaris* di Agassiz, e fra gli avanzi di Sauriani un teschio di Coccodrillo incluso nella calcaria ammonitica di

Treschè nei Sette Comuni, già descritto dallo Sternberg (*Voyage en Tyrol* ecc. Ratisbon. 1806) e conguagliato dal Cuvier al *Gavial. longirostris* delle rocce juresi di Honfleur nella Normandia (*Steneosaurus rostro-major, Saint-Hilaire Mém. du Muséum,* Tom. XII), il che mi porse argomento negli anni addietro di toccare la consonanza, che v' ha tra gli strati delle marne Arviane della Francia e gli strati della calcaria ammonitica dell' alto Vicentino (*Zool. foss. delle Alpi Venete* p. 190. 1827. in 4.°). Ciò che importa di essere notato si è che la *Terebratula antinomia,* tanto frequente nella calcaria epiolitica superiore e nel biancone che la ricopre, non comparisce nella calcaria del piano inferiore, circostanza che merita di essere ricordata, perchè concorre essa stessa a dimostrare la differenza tra queste due calcarie. Se non che gl' individui di detta Terebratula distaccati dagli strati ora rossi ora bianchi del terreno neocomiano, non si possono identificare con gl' individui tolti dalla calcaria scissile epiolitica, che gli soggiace, come vedremo tra poco. Le specie di fossili politalami, che sempre ho trovate nel piano inferiore del terreno epiolitico, delle quali esibisco le figure e le descrizioni, sono le seguenti:

Ammonites perarmatus, *Sow.*
—— biplex, *Sow.*
—— annulatus, *Sow.*
—— linguiferus, *Orb.*
—— Zignii, *Cat.* (6)
—— Fontana, *Cat.*
—— Toblinianus, *Cat.*
—— tornatilis, *Cat.*

Ammonites strictus, *Cat.* (7)
—— Albertinus, *Cat.*
—— quinquecostatus, *Cat.*
—— contiguus, *Cat.*
—— Benianus, *Cat.*
—— exornatus, *Cat.*
Ancyloceras nodosus, *Cat.*

Calcaria epiolitica superiore.

La calcaria epiolitica superiore si mostra con tutti li suoi caratteri in molti luoghi del Veneto e della Lombardia. Nel Bellunese costituisce la parte superiore dell' Alpe, che resta alla sinistra del Piave rimpetto al paese di Longarone (Monte Salta), ed è quella medesima che a dritta dello stesso fiume si eleva tra Pirago ed Igne, formando il lato diritto della strada che mette nel Zoldiano. La vera calcaria epiolitica superiore manca nelle vicinanze di Belluno (non dovendosi confondere con essa la scaglia rossa con fucoidi (*Chondrites*) addossata per apposizione sul versante sud del Monte Serva), ma sembra che

dalle pertinenze d'Igne pieghi al nord-ovest (Perera, Soffranco), e verso il sud venga ricoperta dal terreno neocomiano (dritta del Piave), e dalle arenarie eocene e miocene (Valle dell'Ardo), indi risalga presso Vedana avvicinandosi al Mis, per prolungarsi nell'Agro Feltrino (Cesio maggiore e Vedana). Quivi più che dovunque altrove si ammira il terreno epiolitico in tutte le sue fasi geognostico-orittognostiche, imperciocchè vedesi di fatto che superiormente la calcaria rossa è scissile, tenera e marnosa, mentre la calcaria degli strati inferiori appare compatta, solidissima, di un fondo rosso cupo con macchie bianco-gialliccie, la quale nelle parti più basse dell'Alpe si risolve in una specie di conglomerato, i cui nodi sono concatenati fra loro, e presentano presso a poco la forma medesima delle macchie che sulla pietra non alterata si osservano. L'opinione emessa da gran tempo, che questi nodi sieno frammenti di *Ammonites* sussiste tuttavia, perciocchè le macchie dei pezzi che si estraggono a Cesio per essere lavorati in colonne od in tavole conservano i contorni della spira, non che i segni delle tramezze, accidenti che si palesano in maniera tanto più evidente quanto più lucida riesce la politura che si dà alla pietra.

Per meglio vedere i rapporti che hanno tra loro le calcarie rosse del terreno epiolitico è d'uopo attraversare il Mis, e volgere lo sguardo alla sinistra del torrente tra *S.ª Giuliana* e le *Rosse Alte* non lungi da Vedana. Appiè del monte si può osservare gli strati del conglomerato suddetto, che essendo paralleli a quelli della sovrapposta calcaria ammonitica rossa mostrano di formare con essa uno stesso deposito. Ricomparisce verso l'alto della montagna la calcaria epiolitica superiore, che non è diversa molto nell'aspetto dalla calcaria d'Igne, cui è parallela, benchè si palesi più sabbioniccia e meno ricca di fossili. È sopra di questa calcaria che presso le *Rosse Alte* si erigono i banchi della creta (8), la quale sembrerebbe a prima giunta essere un passaggio della calcaria neocomiana Alpaghese alla calcaria oolitica, se i grani sparsi molto irregolarmente nella sua massa non si dessero a conoscere per avanzi organici simili a quelli che abbiamo notati nella calcaria neocomiana ippuritica del Pinè e di Tambre nell'Alpago (*Mem. sopra le Caverne delle Alpi Venete*, pag. 14).

Io darò quando che sia più circostanziati dettagli degli accidenti osservati nei luoghi, in cui ho potuto studiare le stratificazioni delle due calcarie epiolitiche, ed intanto mi limiterò a dire ch'elleno talvolta ricoprono, e talvolta fiancheggiano la formazione dolomitica, ma più spesso costituiscono da sè sole la base su cui posa il terreno cretaceo conservando con esso un perfetto paral-

lelismo. Noto qui di transito che ove la dolomia si erige a grandi altezze di rado o non mai porta sopra di sè il gruppo epiolitico, ma appare in quella vece coronata di rocce più moderne. Spettano a queste ultime le calcarie rosse osservate sulle cime dolomitiche di Valle di Brenta, non che i banchi regolari di calcaria rossa intercalati a' strati di biancone che osservai verso l'alto del *Piano della Fugazza* in Vallarsa (*Prodromo* p. 103), e quelli ancora che vidi anni sono in un vallone (Valgadena) che mette nella valle del Brenta (*Zool. fossile*, pag. 98 e seg.)

a. Sistema dolomitico = b. Conglomerato ammonitico

c. Calcaria epiolitica inferiore = d. Calcaria epiolitica superiore

e. Calcaria neocomiana ?

Così nelle calcarie epiolitiche superiori dell'Agro Feltrino (non lungi da Cesio), come pure in quelle di Cesuna presso Treschè (Sette Comuni), di Entratico nel Bergamasco e di Perugia nella Romagna, si trovano individui della *Terebratula antinomia*, i quali, come dissi, hanno fattezze diverse da quelle che ho finora osservate negl' individui delle calcaree neocomiane tanto rosse quanto bianche del Tirolo (Fondo) del Vicentino e del Veronese. La medesima dif-

ferenza di forma so avere notata negli esemplari della stessa specie raccolti dal prof. sig. Pilla nella calcaria schistosa della Spezia, dove esiste in compagnia dell'*Ammonites tatricus*, e di alcune Nerinee proprie del sistema jurese superiore (*Bull. de la Soc. géol.* Séance du 25 juin 1847).

La calcaria scissile rosso-oscura della Spezia, di cui è stata ultimamente raddrizzata la paleontologia può servire di orizzonte geognostico per conguagliare ad essa le calcarie analoghe della Lombardia, della Toscana e delle Alpi Spoletane, già considerate da de Buch come rocce del periodo soprajurassico. Questa opinione emessa dal Nestore dei geologi europei sortì una favorevole accoglienza presso i dotti di tutte le nazioni, quindi assai male vi si appose l'autore di un articolo inserito nel Bollettino della Società geologica di Francia, qualificando la calcaria della Spezia per lias inferiore, imperciocchè prendendo egli la parte più alta della formazione jurese per la più bassa, dovette di necessità considerare i marmi salini di Carrara e di Campiglia come rocce del terreno devoniano, e ciò che più rileva, dovette profondare gli schisti che sottostanno ai detti marmi nell'abisso del terreno cambriano. (9)

È tra i fossili della calcaria superiore epiolitica che trovai accomunate più specie del terreno neocomiano, come a dire l'*Ammonites bicurvatus* di Michelin, l'*Amm. simplus* e *fascicularis* di Orbigny, il *Crioceras Villiersianus* di Orb., ed alquante terebratule per la più parte riferibili alla famiglia delle *Cinctae* di de Buch. Avvi tra queste la *Terebratula antinomia* descritta e rappresentata nella Zoologia fossile, che diedi in luce l'anno 1827 (pag. 169. Tav. V. fig. *p. q. r.*). Varii anni dopo il barone de Buch prese in considerazione quanto ho scritto intorno a questo singolare brachiopodo, ma ignorando egli le figure di altri esemplari che aveva esibite negli Annali delle Scienze naturali di Bologna nel 1828, non parla se non di quelle, che sotto diversi aspetti ho pubblicate nella Tavola V. della Zoologia fossile stampata un anno prima.

Insiste il barone de Buch a considerare la *Terebratula deltoidea, triquetra,* ed *antinomia* come semplici varietà della *Terebratula diphya,* specie non mai trovata sinora da verun naturalista moderno, ma che vedesi soltanto figurata nell'*Ecphrasis stirpium minus cognitarum* di Fabio Colonna, pubblicato nel 1616, al quale ravvicinamento mi sono vigorosamente opposto in una Memoria accompagnata da figure, già inserita nel V. Volume degli Atti dell'Accademia di Padova per l'anno 1838.

Negli anni successivi io inviava ai paleontologi di Francia i disegni e gli

originali della *Terebratula antinomia* perchè volessero avere la cortesia di dirmi ciò che pensano circa la nuova specie che proponeva di aggiungere al genere *Terebratula*, ed il sig. Buchard, quello stesso che dimostrò non ha guari la necessità di distaccare dalle Terebratule la *Terebratula pumila* di Lamarck per collocarla, contro l'avviso di de Buch, nel genere Magas di Sowerby (*Bull. de la Soc. géol.* Séance du 17 janv. 1848), mi scrive in proposito ne'seguenti termini: *relativement au* Terebratula deltoidea, diphya *et* antinomia *je partage entièrement votre manière de voir, et je suis comme vous convaincu que dans leurs formes percées vers le centre il y a plusieurs espèces avec lesquelles on peut former un groupe charmant.* Anche Davidson per rendere meno equivoca la classe dei Brachiopodi tolse dal genere delle Terebratule la *T. rosea* per fabbricarvi il genere *Buchardia*, e la intitolò *Buchardia rosea*. De Buch invece presume che le Terebratule col corpo interciso longitudinalmente, come è quello delle specie sopra indicate, e per conseguenza tutte le altre date ultimamente in luce dal prof. Zeuschner di Cracovia si debbano riguardare come individui della *Terebratula diphya*, qualunque sia la forma dell'allargamento del solco, e la figura del foro ch'esse hanno nel dorso e sul ventre. Pel contrario io mi sono cimentato a pensare che il solco più o meno profondo nel dorso e la presenza del foro dorso-ventrale siano caratteri da poter servire allo stabilimento del genere, che intitolai *Antinomia*, mentre le diverse fattezze sia del solco sia del foro, nonchè la forma talvolta angolare, talvolta rotonda dei lati della base possono mirabilmente prestarsi alle distinzioni specifiche. E tanto più sono entrato nella persuasione di ammettere queste distinzioni in quanto vi sono delle forme che mai escono dalle zone del terreno neocomiano, come ve ne sono delle altre, la cui sede è costantemente circoscritta entro i limiti occupati dalla calcaria epiolitica superiore. Guidato da questi principii propongo pel terreno neocomiano le specie *Antinomia diphya, deltoidea* e *triquetra*, e riferisco alla calcaria epiolitica le *Antinomia angulata, angusta* e *dilatata*, di cui darò in altra occasione le figure. Per ora mi limito ad esibire soltanto i contorni di ciascheduna.

Specie della Calcarea neocomiana
1. Antinomia diphya. — 2. Ant.a deltoidea.

Specie della Calcarea epiolitica superiore
3. Ant.a angulata. — 4. Ant.a angusta. —
5 Ant.a dilatata.

Nella presente Memoria ho avuto in mira di descrivere, e di rappresentare quel resto di testacei politalami, che per mancanza di spazio non trovarono luogo nelle undici tavole pubblicate nel vol. XXIV della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, mentre degli altri testacei, che mi giunsero alle mani dopo l' impressione di quel volume vado presentemente ad occuparmi, onde ridurre a miglior compimento la paleontologìa dell' Italia superiore. Aggiungerò inoltre alla descrizione delle conchiglie quella degli echinidi, discoperti nel terreno epiolitico, paragonando in pari tempo le specie disseppellite nell' Alpi Venete con le specie analoghe delle altre contrade dell' Europa, affinchè possa il lettore ricavare le conseguenze che da siffatti confronti spontaneamente fluiscono.

Conchiglie politalamiche della Calcaria epiolitica superiore (*).

Ammonites pulchellus? *, *Orb.*
—— fascicularis *, *Orb.*
—— simplus? *, *Orb.*
—— Helius *, *Orb.*
—— emaciatus, *Cat.*
—— bifrons, *Bruguier.*
—— tatricus, *Pusch.*
—— sub-Beudanti, *Cat.*
—— bicingulatus, *Cat.*
—— bicurvatus, * *Michelin*
—— Capitanei, *Cat.*
—— Venantii, *Cat.*
—— Doderleinianus, *Cat.*
Hamites Labatii, *Cat.*

Ciò che ho detto circa le distinzioni da farsi nel terreno epiolitico può essere ricapitolato nei fatti seguenti:

1.° Le calcarie rosse epiolitiche sottoposte al sistema cretaceo dell'Italia settentrionale, distinte dai geologi sotto il nome collettivo di *calcaria ammonitica rossa*, spettano a due diverse formazioni: la prima o più antica riceve una viva pulitura e contiene molte specie di *Ammonites* che mai o quasi mai si veggono nelle calcarie che gli sono superiori, benchè vi si trovi per entro buon numero di avanzi ittiolitici che hanno i loro analoghi nelle zone dell'era cretacea: la seconda o più recente è di struttura scissile, talvolta arenacea, e contiene avanzi fossili che in parte gli sono peculiari (*Ammonites, Antinomia*) ed in parte ricompariscono nel terreno neocomiano, lo che prova essersi depositata in un periodo intermedio tra la creta ed il terreno jurese.

2.° Le specie del genere *Antinomia* che abbiamo divisate come proprie di ogni qualunque zona del terreno neocomiano (*Antinomia diphya, deltoidea*)

(*) Le specie segnate con * si ripetono nelle zone del terreno neocomiano, le altre sono esclusivamente proprie del terreno nel quale si trovano incluse.

non mai compariscono nella soggiacente calcaria epiolitica, ma vi si trovano invece le specie dello stesso genere che conguagliai all' *Antin. angusta, dilatata, angulata,* le quali gli sono peculiari.

3.° Il parallelismo delle calcarie epiolitiche e delle cretacee è da per tutto evidente, anche dove gli strati si presentano sotto tutte le sorta di direzioni (10).

DESCRIZIONE DELLE SPECIE

AMMONITES TURGESCENS, Cat.

Tav. 1. fig. 2 *a*, *b*, *c*.

A. testa inflata, transversim costata, costis externe incrassatis, prope ortum bifidis, umbilico angustato; dorso convexo subcarinato, anfractibus subinvolutis, ultimo crassissimo; apertura rotundata; septis symmetricis, lateraliter trilobatis.

Conchiglia discoidea, turgida, ornata di coste larghe, che prima di attingere la metà superiore del giro si biforcano e vanno ad attraversare il dorso che è ampio, rotondato, e con indizio di chiglia o cresta nel mezzo. Spira presso che abbracciante composta di giri molto convessi, l'ultimo de' quali forma due terze parti del diametro interno della spira. Ombelico molto ristretto, escavato; con indizii del lobo ventrale e del laterale inferiore. Tramezze dividentisi sui lati in tre lobi digitati ed in un egual numero di selle. Diametro degl' individui giovani centim. 17; degli adulti centim. 38.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Io credeva da principio che questo politalamo fosse una forte varietà dell'*Ammonites inflatus* di Sowerby, già descritto e figurato da varii autori e per ultimo da Orbigny (*Terr. crét.* p. 304, planch. XC.); ma la circostanza di non avere osservato in nessuno de' molti individui che ho presenti la chiglia dorsale bene distinta, mi ha determinato a considerarlo una specie particolare. In alcuni esemplari si scorge però nel mezzo del dorso un sottile filetto, che seguita l'andamento del giro esterno fino all' apertura, il quale potrebbe essere un avanzo della chiglia, che si riconosce patente nell'*Amm. inflatus*, con cui il mio fossile mostra di conservare moltissima simiglianza. Dico tutto questo perchè se alcuno s' imbattesse in esemplari meglio conservati de' miei e li trovasse per questo titolo adeguabili alla specie di Sowerby, non per questo si potrà farmi il rim-

provero di avere io fatto a torto una specie nuova; imperciocchè ravvisai nel nostro fossile altre differenze che mi sembrano rendere poco naturale la sua associazione all'*Amm. inflatus.* Difatto le coste dorsali sono decurrenti, non già interrotte come si riconosce nell'altro, ed i lati della spira riescono convessi e non compressi quali appajono nell'*Amm. inflatus*, e tali si mantengono costanti negli individui di tutte le grandezze, lo che induce a credere che non sia una differenza dipendente dalla età.

LOCALITA'.

Il più voluminoso degli esemplari che custodisco mi fu presentato dall'esimio co: Calini di Brescia amatore delle Scienze Naturali. Tutti però provengono dalla calcarea rossa di Torri nel Veronese, che per essere alquanto modificata riceve una viva politura e corre nel commercio sotto il nome di marmo rosso di Torri, probabilmente riferibile alla calcaria epiolitica inferiore.

AMMONITES LINGUIFERUS ?, Orbigny.

Terr. jurass. pag. 402. planch. CXXXVI.

Tav. I. fig. 2 *a*, *b*.

Conchiglia discoidea, turgida, munita di anfratti costati col dorso molto convesso e rotondo. Le coste maggiori spiccano dalla sutura ombilicale, e giunte alla metà dell' altezza del giro s' ingrossano in una specie di tubercolo, poi si suddividono in fascetti di tre o quattro coste che attraversino il dorso per congiungersi ai tubercoli del lato opposto della spira. Bocca mutila: tramezze ignote. Diametro centim. 9 1/3.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Somiglia molto all' *Amm. linguiferus* di Orbigny e si accosta del pari all' *Amm. Humphriesianus* di Sowerby, ma lo stato di mutilazione degl' individui che ho raccolti finora nel Veronese impedisce di vedere l'appendice linguiforme, di cui è trasversalmente guarnita l'apertura negli esemplari descritti da Defrance e da Orbigny, il primo nel Dizionario di Scienze Naturali, il secondo nella Pa-

leontologia francese. Però i caratteri che ancora rimangono nel nostro fossile sono tanto conformi a quelli dell' esemplare figurato da Orbigny che sembrano essere stati entrambi gettati nella medesima stampa; ciò che giustifica il ravvicinamento che abbiamo creduto di fare dell' uno coll' altro.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica inferiore di Malcesine e di Lazise nel Veronese. La specie descritta da Orbigny proviene dalle Ooliti inferiori della Vandea e del dipartimento di Calvados.

AMMONITES DODERLEINIANUS, Cat.

Tav. I. fig. 3. *a, b, c, d, e.*

A. testa elliptica, compressa; laevi, anguste umbilicata; anfractibus pleniusculis, involutis; dorso rotundato; apertura compressa, antice rotundata; septis lateralibus decem lobatis? Magnitudine naturali.

Conchiglia ellittica, compressa, liscia quand' è provveduta del guscio; coi giri della spira coperti quasi per intero dall' ultimo anfratto, e coll' ombelico molto ristretto. Bocca ovale, compressa, superiormente rotondata, prolungantesi sopra i lati dell'anfratto che le soggiace per abbracciarlo. Tramezze divise in nove o dieci lobi laciniati sui margini con le selle ovali o, come si usa dire, a cucchiajo. Dorso rotondato: diametro da 3 a 10 centim.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questo fossile mi ha tenuto molto tempo sospeso a quale specie dovessi riferirlo, se all'*Amm. heterophyllus* di Sowerby, ovvero ad una specie non conosciuta. Di fatto gran somiglianza conserva coll'*Ammon. heterophyllus*, e come tale è stato considerato dal cav. Collegno e da tutti i geologi di Lombardia che lo hanno incontrato nella calcarea rossa del Comasco, ma la struttura del guscio riesce diversa. Nell' *Amm. heterophyllus* essa appare rigata da strie alquanto flessuose, laddove nel nostro si mostra affatto liscia. Oltre a ciò la specie che io reputo inedita, comparisce molto più compressa e la regione ombili-

cale non sembra costante nelle sue fattezze, ma soggiace a sensibili differenze, essendo talvolta assai ristretta, talvolta molto dilatata e coll'incavo circondato da linee concentriche, prodotte evidentemente dalla particolare conformazione delle tramezze le quali sono diverse se non per altro perchè hanno le lacinie meno lunghe di quelle dell'*Amm. heterophyllus.* La figura n.° 2 rappresenta un individuo di età giovanile munito in gran parte del guscio.

LOCALITA'.

Trovasi non di rado nella parte superiore della calcarea epiolitica di Caduna nell'alto Vicentino e più frequentemente nella calcarea rossa di Entratico nel Bergamasco. In tutti questi luoghi gl'individui dell'*Antinomia angulata* sono i satelliti più costanti dell'*Ammonites Doderleinianus.*

AMMONITES PERARMATUS, Sowerby.

Conch. min. pag. 380. Tab. CCCLII.

Tav. I. fig. 4. *a*, *b*.

Conchiglia compressa, provveduta di due serie concentriche di grossi tubercoli, una presso la sutura, l'altra ai lati del dorso. Questi tubercoli sono in comunicazione tra di loro mediante le coste trasversali rugose, che dal tubercolo vicino alla sutura arrivano fino a quello della periferia senza attraversare il dorso. Gli spazii tra costa e costa sono lisci: gli anfratti compressi ed in numero di cinque o sei a norma della maggiore o minore grandezza degl'individui. Apertura più alta che larga, forse in causa della forte compressione sofferta dalla spira. Nessun indizio di tramezze. Diametro de'più giovani centim. 11; dei più adulti centim. 19.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questo Ammonite, della famiglia degli Armati di de Buch, può attingere, a ciò che dice Sowerby, a considerabili dimensioni, laddove gli esemplari per noi raccolti nel Veronese non oltrepassano il diametro di due decimetri. Quelli che adocchiai nelle collezioni dei signori Canossa e Gazola di Verona, hanno i giri

interni della spira mutilati, e pochi sono gl' individui ch'io possiedo, i quali non abbiano la parte ombelicale o rotta o foracchiata. Non credo sia d' uopo di parole per far sentire il divario che passa fra il nostro fossile e l' *Ammonites armatus* di Sowerby, come notabile è la sua differenza coll' *Amm. atleta* di Philips al quale era tentato di conguagliarlo uno dei naturalisti Italiani intervenuto al Congresso degli scienziati in Venezia.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica inferiore rossa di Salazzaro nell'alto Veronese, nè mancano esempii nell' Inghilterra di averlo trovato nel *Coral-rag*, roccia che forma parte della prima zona del sistema oolitico dei geologi inglesi. Sowerby che fu il primo a descriverla le assegna per sede il *Coral-rag* di Malton (*Conchol. min. cura* Agassiz p. 361); Brongniart la fa derivare dalle marne Avriane di Dives (*Tab. des. terr.* p. 410); de Buch la rinvenne nell' altipiano che resta fra il Meno e la Svizzera (*Rathschausen*) e più particolarmente a Sciaffusa dove esiste accoppiata ad altre specie che potrebbero caratterizzare il gruppo oolitico dell'Alemagna (*Recueil de Planches de pétrifications remarquables.* Berlin 1831). Gli esemplari dell'*Amm. perarmatus* descritto dall'Orbigny provengono dalle argille di Oxford (*Terr. jurass.* Tab. CLXXXIV.)

AMMONITES FONTANA, Cat.

Tav. II. fig. 1. *a, b,*

A. testa discoidea, compressa, anfractibus subrotundatis transversim 30—35 *costatis; costis distantibus, quadrifurcatis in dorso non interruptis; apertura integra, subcompressa? septis?*

Conchiglia discoidea compressa con cinque anfratti forniti di 30 o 35 coste alquanto grosse, molto distanti fra loro presso l'apertura, i quali si suddividono in quattro rami prima di attingere la metà della larghezza dell'anfratto ed attraversano completamente il dorso ch' è rotondato. Apertura libera, non occupata dal giro che le soggiace, ma di forma non al tutto discernibile per essere detrita negl' individui che ho dinanzi. Diametro degli esemplari adulti centim. 14 1/2.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questa specie si può di leggieri confondere a prima vista coll'*Amm. Bakeriae* di Sowerby, quale lo ha disegnato Orbigny (*Terr. jurass.* pl. CXLVIII), giacchè le tre figure di Sowerby sono per più riguardi difettose (*Min. conch.* Tab. DLXX, fig. 1, 2, 3). Ad onta però della somiglianza fra li due Ammoniti, il nostro si distingue mediante due caratteri che non si trovano nell'altro, vale a dire per la disposizione dei rami costali che attraversano il dorso, i quali partono tutti e quattro dalle coste maggiori: laddove quelli dell'*Amm. Bakeriae* si elevano fra gli spazii che v'ha tra una costa e l'altra per prolungarsi sul dorso. A ciò si aggiunga quella specie di solco che si vede nel mezzo del dorso medesimo nell'individuo figurato da Orbigny, e che manca nella specie nostra. Le coste più vicine alla bocca s'ingrossano (presso la sutura) in una specie di nodo, non confondibile per la sua posizione coi tubercoli auriculari di cui parla Orbigny (p. 427).

LOCALITA'.

Fossile nel Veronese. Ai pochi esemplari malconcii e per ciò medesimo indeterminabili, che io custodisco di questa specie, due altri ho potuto ottenerne dall'egregio chimico sig. Fontana di Lazise, tolti dalla calcarea epiolitica inferiore di Malcesine, i quali tuttochè mutilati nell'apertura mi giovarono al riconoscimento degli altri raccolti in quelle montagne, e sempre nella stessa roccia.

AMMONITES TORNATILIS, Cat.

A. testa discoidea, compressa; anfractibus compressissimis, costatis; costis subobliquis 26 acutis, externe evanescentibus; dorso rotundato; laevigato; apertura subovali; septis?

Conchiglia discoidea, compressa, fornita di cinque o sei giri attraversati da coste semplici, incavate, leggermente inclinate verso il davanti della spira, che svaniscono prima di attingere il mezzo del dorso, che è liscio e rotondo. Apertura subovale. Tramezze ignote. Diametro centim. nove.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

La specie a cui più si assomiglia il nostro fossile è l'*Amm. varicostatus*

di Zieten, dal quale però si discosta per essere al tutto privo di carena; come differisce dall' *Amm. torus* di Orbigny per la forma dei giri interni che in questo appaiono convessi, mentre nel nostro sono quasi rigorosamente piani. Oltre a ciò le distanze fra una costa e l'altra non sono così regolari come nella specie di Orbigny, ma le più prossime all'apertura distanno quasi il doppio dalle altre poste nel medesimo giro.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea ammonitica rossa di Malcesine nel Veronese. Di questa conchiglia si darà la figura in una delle susseguenti puntate.

AMMONITES BENIANUS, Cat.

Tav. II. fig. 2, *a*, *b*.

A. testa discoidea; anfractibus, subcompressis lateribus complanatis, transversim 24 vel 26 costatis; costis subaequalibus, distantibus, rectis, externe tuberculatis; dorso rotundato; apertura rotundata? Septis lateraliter trilobatis.

Conchiglia discoidea, provveduta di cinque anfratti compressi sui lati, muniti di 24 e 26 coste dritte, distanti esteriormente, tubercolate, accavallantisi sopra il dorso ch' è rotondato. Apertura in parte mutilata, non però in modo da togliere il sospetto che in origine non fosse rotonda. Tramezze divise in tre lobi lievemente frastagliati sui margini, visibili soltanto in un lato del secondo anfratto. Giri della spira discoperti quasi affatto, meno quelli più prossimi all' ombelico che è rotto. Diametro centim. 7 1/2.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Un' occhiata alla forma del dorso ci fa subito accorti della differenza che corre tra il nostro esemplare e l' *Amm. Maugenesti* di Orbigny, sebbene conservi con questo molti tratti di somiglianza. Nel primo il dorso è rotondato, laddove nell' altro descritto e figurato da Orbigny appare fornito di una carena molto bene pronunciata (Orb., *Terr. jurass.* p. 254. pl. LXX.). Non si può giudicare con sicurezza della forma dell' apertura ch' è in parte guasta nell' indi-

viduo che ho dinanzi, ma da quanto appare sembra dovesse essere rotonda, non già oblunga e subquadrata come quella dell' *Amm. Maugenesti.*

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea ammonitica rossa di Salazzaro, ov'è stato rinvenuto dall' esimio letterato Benedetto Del Bene, già Direttore del Liceo - convitto di Verona.

AMMONITES ALBERTINUS, Cat.

Tav. II. fig. 3. *a*, *b*.

A. testa discoidea, compressa; anfractibus compressis, transversim costatis: costis elevatis, distantibus, externe bifurcatis; dorso convexo; apertura integra, antice subrotundata. Septis?

Conchiglia discoidea, compressa, munita di cinque o sei giri armati di coste trasversali elevate, alquanto distanti tra loro, che verso la metà superiore dei giri si biforcano, e ricevendo una forte inflessione verso il davanti della spira attraversano il dorso, ch'è tondato. Bocca non abbracciante, più lunga che larga. Tramezze sconosciute. Diametro centim. 7 1/2.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Conserva qualche attenenza coll' *Amm. Holandrei* di Orbigny, dal quale si discosta per più ragioni e principalmente per la forma e disposizione delle coste, e per avere la bocca intera, non già interrotta inferiormente dall'anfratto che le sta sotto; laddove nell' *Amm. Holandrei* questo anfratto viene lievemente abbracciato dall'apertura. Si assomiglia altresì all' *Amm. Dudressieri* di età giovanile esibito dall'Orbigny nella fig. 3, tav. CIII (*Terr. jurass.*); ma oltre la mancanza dei tubercoli nella parte più esterna dei giri che vi sono nella figura, differisce dal nostro nella forma della bocca, ch'è quadrata nella specie di Orbigny, qualunque sia l'età degl'individui.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea ammonitica rossa di Malcesine nel Veronese. A que-

sta stessa specie appartengono gli avanzi ammonitici distaccati dalla calcarea di Lazise, che mi furono presentati dal sig. Fontana.

AMMONITES TOBLINIANUS, Cat.

Tav. II. fig. 4. *a*, *b*.

A. testa compressa, discoidea, carinata; anfractibus compressis, interne excavatis, transversim costatis; costis flexuosis externe interneque evanescentibus; dorso angulato carinato; apertura compressa, oblonga; septis lateralibus 4 lobatis?

Conchiglia compressa, carinata, munita di sessanta coste ineguali flessuosissime; non discernibili nella parte interna della spira, ch'è un poco escavata. Dorso angolato avente nel mezzo una cresta ottusa nell'apice, fiancheggiata in ambi i lati da un solco piuttosto profondo. Apertura compressa oblunga. Tramezze divise in quattro lobi non bene distinti sopra ciaschedun lato del primo anfratto. Diametro centim. 6 1/3.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

A prima giunta lo si crederebbe affine all'*Amm. normanianus* di Orbigny, ma la forma diversa del dorso, e li due solchi fra i quali si eleva nel nostro esemplare la cresta dorsale ci fa subito persuasi della differenza che v'ha tra l'uno e l'altro. Negl' individui adulti della specie che descriviamo le coste hanno ricevuto una inflessione molto maggiore di quella che si ammira nella specie di Orbigny, come diversa del pari è la forma delle tramezze, confrontata che sia col disegno dato delle medesime dall'Orbigny (*Terr. jurass.* pl. LXXXVIII, fig. 3.) benchè nella nostra siano alquanto smarrite, e tali da non poterne rilevare il disegno.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea ammonitica grigia di Lavazzo nel Bellunese e di Malcesine nel Veronese. Riferisco a questa specie alquanti Ammoniti distaccati dalla calcarea rossa inferiore nel Bergamasco, i quali benchè siano alquanto mutilati, conservano tuttavia tali caratteri da poter instituire un certo confronto

coll' individuo che descriviamo. L'Ammonite di cui presento la descrizione è poco comune nelle Collezioni del Veneto, ed occorre trovarlo nella calcarea grigia ammonitica di altri luoghi del Bellunese.

AMMONITES CANOSSA, Cat.

A. testa compressa, non costata; anfractibus subinvolutis, tuberculatis; tuberculis biseriatis in utroque latere; umbilico angustato; apertura ovali; dorso rotundato; septis lateralibus quinque lobatis.

Conchiglia compressa, priva di coste con la spira formata di tre anfratti, l'ultimo de'quali larghissimo, abbracciante, munito di due serie concentriche di tubercoli, una alla metà della sua larghezza, l'altra vicino alla sutura. Quelli della prima serie appajono tanto più grossi e più distanti fra loro, quanto sono più vicini all'apertura. Dorso liscio rotondato, apertura più lunga che larga (*). Tramezze simmetriche divise da ciaschedun lato in cinque lobi. Le lacinie digitiformi delle selle appajono assai più manifeste di quelle dei lobi. Diametro centim. 9.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Non trovo nelle opere degli autori che ho per le mani nessuna figura cui possa competere questa conchiglia, quando non si volesse crederla affine ad un tristo disegno che vedesi nella tavola XXXIX n. 262 del Trattato sulle petrificazioni di Bourguet, il quale d'altronde mostra di avere i nodi interni dell'anfratto molto più grossi degli esterni, mentre nel nostro i primi sono di gran lunga più piccoli dei secondi. Per queste ragioni mi determinai a considerarlo una specie inedita, benchè l'individuo che tolsi a descrivere non presenti tutti i caratteri che pure sono necessarii per istabilire una esatta classificazione. Non ho potuto p. e. determinare con sicurezza la forma dell'apertura, perchè il solo esemplare che ho presente è mutilato nel labbro dritto e sinistro; come non giunsi a conoscere la figura de' giri più centrali della spira, per essere questa ricoperta dalla roccia.

(*) La lusinga di rinvenire esemplari meglio conservati di questa specie mi ha fatto per ora sospendere la pubblicazione della figura.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea rossa ammonitica del Veronese. Io non ho in verun altro luogo rinvenuto questo Ammonite se non nella Collezione di fossili del marchese Canossa di Verona, dal quale mi fu regalato in unione ad alcuni esemplari della *Fibularia discoidea* (*Echinocyamus*, Ag.) tanto frequente nella calcarea bianca ammonitica di Grezzana.

AMMONITES BENACENSIS, Cat.

Tav. III. fig. 1. *a*, *b*.

A. testa discoidea, compressa, transversim tenuissime striata; umbilico angustato; anfractibus subamplexantibus, compressis; apertura oblonga, antice rotundata; septis lateribus bilobatis?

Conchiglia discoidea, stiacciata, segnata trasversalmente di finissime strie quando è munita del guscio; anfratti larghi, compressi; dorso rotondato; ombelico angusto; bocca oblunga, superiormente arcuata, abbracciante quasi per intero il secondo anfratto. Tramezze laterali divise in lobi armati di sei digitazioni; selle più strette dei lobi fornite anch'esse ne' margini di un numero non discernibile di frastagliature. Diametro 8 centim.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Fra tutte le specie di questo genere figurate dagli autori, nessuna più si assomiglia alla nostra quanto quella applicata all'*Amm. Loscombi* di Sowerby, dal quale tuttavia si discosta, perchè alla regione dell'ombelico non lascia scorgere verun indizio di giri interni, e perchè l'apertura non si progetta nel nostro esemplare così innanzi come si osserva nella figura data da Orbigny (*Terr. jurass.* p. 262. pl. LXXV.). A ciò si aggiunga, che ove la spira manca del guscio si ravvisa un largo solco, che dalla parte interna dell'anfratto si dirige verso il dorso senza attraversarlo. L'apice dell'apertura è infranto, nè potendo dare il disegno completo, penso di supplire a ciò che manca con punteggiature, servendomi di un frammento della stessa specie in cui questa parte si mostra quasi intatta.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea rossa di Torri dove fu rinvenuta dall' egregio sig. Fontana di Lazise, in compagnia dell' *Amm. turgescens,* specie verosimilmente del terreno epiolitico inferiore, benchè si trovino talvolta mescolate ad un qualche fossile neocomiano (*Ananchytes cordata,* Lam.)

AMMONITES EXORNATUS, Cat.

Tav. III. fig. 2. *a, b.*

A. testa discoidea, subcompressa, costata; costis elevatis, acutis, trifurcatis, in dorso non interruptis; anfractibus subcompressis, 3 - sulcatis; apertura compressa? antice rotundata?

Conchiglia discoidea lievemente compressa sui lati, munita di coste elevate, dritte, piuttosto distanti fra loro, suddividentisi verso la metà dell' altezza del giro in tre o quattro rami che attraversano il dorso. Anfratti alquanto stiacciati, guasti nella regione ombelicale. Dorso convesso, segnato per traverso da solchi larghi e profondi, che partono dalla base del giro esterno e lo circondano completamente. Bocca di forma irreconoscibile per essere in gran parte detrita. Tramezze ignote. Diametro 9 centim.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Benchè fra li cinque esemplari, ch'io possedo di questa conchiglia, non ve ne sia nessuno d'intero, pure il complesso dei caratteri differenziali, che ancora conserva, mi sembrò sufficiente per crederla una specie distinta. Da principio la riputai una forte varietà dell' *Amm. Ambrosianus*, ma confrontata con esso, chiara mi risultò la differenza. Si assomiglia eziandio all'*Amm. polymorphus* in causa dei solchi profondi che attraversano a distanze diseguali la spira, ma in questo le coste riescono meno grosse e più vicine tra loro, e giunte ad un certo punto si arrestano lasciando nel bel mezzo del dorso una linea di separazione tra le coste dorsali di un lato, e quelle del lato opposto. Differenze consimili ho notate ne' confronti instituiti con le figure e le descrizioni di altre specie, che mi sembrarono più affini alla nostra.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica inferiore di Malcesine nel Veronese, ed il sig. Fontana ne trovò qualcuno nei monti più prossimi a Lazise, non lungi dal Lago. Frammenti di spira che si assomigliano a queste specie ho trovati io medesimo nel biancone di S. Ambrogio ed in quello di Lugo nella Valle Pantena, ma non saprei assicurare che siano parti di questa stessa conchiglia.

AMMONITES VENANTII, Cat.

Tav. III. fig. 3. *a*, *b*.

A. testa elliptica, inflata, carinata, transversim costata; costis brevibus, inaequalibus, intus subtuberculatis; dorso carinato, canaliculato; anfractibus subamplexantibus, convexis; apertura dilatata, antice rotundata; umbilico angustato; septis?

Conchiglia ellittica, turgida, munita di anfratti convessi, l'ultimo quasi abbracciante, guarnito trasversalmente di coste brevi, che non si manifestano se non nella parte interna del giro, poco essendo apparenti nelle parti più prossime al dorso mentre presso la sutura riescono grosse e vestono l'aspetto di tubercoli molto allungati. Nella regione ombelicale, ch'è assai ristretta, non si osserva orma alcuna di spira, ma soltanto un incavo pochissimo profondato, ostruito per intero dalla roccia. Apertura ampla, superiormente rotondata, ai margini della quale si scorgono delle rugosità di forme molto variabili, che potrebbero essere avanzi dei lobi laterali. Diametro trasversale cent. 5; diametro longitud. cent. 7, millim. 8.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Il nome di *ellipticus* converrebbe assai meglio al nostro *Ammonites* che non a quello cui Sowerby applicò questo epiteto, il quale, stando alla figura, è invece di forma orbiculare (*Conchol. miner*. p. 140, Tab. XCII, fig. 4.) Ignoro quale essenziale somiglianza possa avere questo *Ammonites* con taluna delle specie congeneri che non sono a mia conoscenza, ma so bene che nessuna delle figure e delle descrizioni che conosco le corrisponde, e per ciò solo mi determinai a crederla una specie distinta.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica superiore di Entratico, dove fu rinvenuta dal sig. dott. Venanzio di Bergamo, cultore esimio delle scienze naturali.

AMMONITES CONTIGUUS, Cat.

Tav. III. fig. 4. *a*, *b*.

A. testa discoidea, subcompressa, transversim sulcata; anfractibus depressis, costatis; costis 60 rectis, externe bi vel trisulcatis, in dorso contiguis; dorso convexo; apertura subrotundata. Septis?

Conchiglia discoidea, subcompressa; giri della spira depressi sui lati; dorso rotondato. Coste dell' anfratto esterno in numero di sessanta, biforcate, più spesso triforcate. Uno dei rami riesce più lungo degli altri, ed è sempre collocato anteriormente. Due o tre solchi intercostali mediocremente profondi, i quali in unione alle coste attraversano il dorso, ch'è rotondato. Apertura subrotondata; regione ombelicale coperta in gran parte dalla roccia. Tramezze ignote. Diametro 8 centim.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questa conchiglia sembra di primo aspetto analoga all'*Amm. Brongniartii* di Sowerby, ma in questo i giri sono più convessi, le coste primarie più distanti l'una dall' altra, e i rami di biforcazione di eguale lunghezza tra di loro, e non sempre attaccati alle coste. Nel nostro esemplare il ramo più lungo spicca dal terzo inferiore delle coste e guarda la parte anteriore della spira, mentre gli altri due rami partono da un punto molto più alto delle coste medesime. Oltre di che la spira appare segnata da due o tre solchi, uno presso la bocca, e due nella parte inferiore dell' ultimo anfratto.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica inferiore di Salazzaro nell' alto Veronese.

AMMONITES LIVIANUS, Cat.

Tav. III. fig. 5. *a*, *b*.

A. testa discoidea, compressa, transversim costata; costis integris vel bifurcatis, flexuosis; anfractibus compressis, sulcis quaternis oblique exaratis; umbilico angustato; apertura oblonga, depressa; septis lateribus ignotis.

Conchiglia discoidea, compressa, munita di giri alquanto stiacciati, l'ultimo de' quali abbraccia quasi per intero l'anfratto che s'interna nella bocca. Ombelico ristretto, da cui partono quattro solchi molto profondi che attraversano obliquamente l'anfratto esterno senza arrestarsi in verun punto del dorso. Le coste, situate fra un solco e l'altro, partono anch'esse dall'ombelico e sono numerosissime. Tutte s'incurvano da principio all'indietro, ed a misura che più si approssimano al dorso, si ripiegano verso la parte anteriore della spira, ove alcune si biforcano prima di attraversare il dorso. Le coste biforcate sono così fine che senza aguzzare lo sguardo sfuggirebbero facilmente all'attenzione dell'osservatore. L'apertura, in parte riempiuta dalla roccia, presenta un ovoide bislungo, ed è cinta tutto all'intorno a foggia di anello dal solco trasversale anteriore, ch'è sempre più profondo degli altri tre. Diametro centim. 4.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Combina a bastanza bene con gl'individui giovani dell'*Amm. polymorphus* del terreno jurese rappresentato dall'Orbigny nelle fig. 3, 4 della tavola CXXIV (*Paléont. Franç., Terr. jurass.* p. 379.); se non che in luogo di quattro solchi annunziati dall'autore nella frase specifica, se ne veggono cinque nella prima figura e sei nella seconda. Nella nostra specie i solchi sono costantemente quattro, e per questo titolo, più che alle citate figure, le compete la descrizione data dall'autore all'*Amm. polymorphus* di età giovanile. Però il dorso di quest'ultimo è munito di una linea che impedisce alle coste di un lato di congiungersi a quelle del lato opposto, il che non si verifica nel *Livianus*, il cui dorso è invece attraversato tutt'all'intorno dalle coste. La linea mediana dorsale esiste anco negl'individui giovani, avendola Orbigny espressa nel disegno n.º 2, che corrisponde al più piccolo degli esemplari per lui descritti di questa specie.

LOCALITA'.

Fossile nel biancone di Monte Vignole presso Teolo, patria di Livio.

AMMONITES PULCHELLUS? Orbigny, *Terr. crét.* T. I, pag. 133.

Planch. XL, fig, 1, 2.

Tav. III, fig. 6. *a*, *b*.

Conchiglia ovale, compressa, intagliata per traverso da solchi profondi che formano sul dorso altrettanti festoni regolari, convessi, diretti verso l'ombelico. Spira intieramente abbracciante, di cui l'ultimo giro involge tutti gli altri. Bocca stretta, allungata, molto depressa ai lati?

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Lo considero molto affine all'*Amm. pulchellus*, avendo comune con esso la singolare conformazione del dorso che a detta dell'Orbigny non si ravvisa in verun'altra specie di *Ammonites*. L'ultimo giro sembra formato di tanti anelli messi l'uno accanto all'altro, con questo però che i solchi fra un anello e l'altro appajono nel nostro alquanto più prolungati, e l'anfratto riesce più convesso; differenze che potrebbero dipendere dallo stato giovanile dell'individuo, che a norma dell'età doveva ingrandire il suo domicilio e portarlo ad un volume forse maggiore di quello cui attinge l'individuo illustrato dall'Orbigny. Nel mio esemplare non si veggono bene se non i festoni dell'anfratto esterno, mentre nella bocca e nell' ombelico è così poco caratterizzato che non si potrebbe per altro modo presumerlo analogo all' *Ammonites pulchellus* trovato da Emeric negli strati inferiori del terreno neocomiano della Francia.

Nel museo di Scheuchzer esisteva ai tempi di Bourguet un *Ammonites* molto simile al *pulchellus*, del quale vedesi la figura nella tavola XLII n. 302 del *Trattato sopra le petrificazioni*, qualificato da Bourguet con le seguenti frasi: *Corne d'Ammon à dos crénelé*, pag. 304.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica superiore di Cesio Maggiore dove fu trovato dall'incisore sig. Toller di Belluno.

AMMONITES SALINA, Cat.

Tav. III, fig. 7. *a*, *b*.

A. testa discoidea, compressa transversim costata: costis erectis prope dorsum bifurcatis: dorso rotundato, anfractibus compressiusculis; apertura ovali antice rotundata. Septis?

Conchiglia discoidea, compressa, munita di coste trasversali dritte, un poco inclinate verso il davanti della spira, che si attenuano e si biforcano prima di attraversare il dorso ch'è rotondato. Anfratti leggermente compressi, fra cui li più interni appajono in parte coperti. Apertura ovale, superiormente arcuata, interrotta inferiormente dall'anfratto che dentro vi passa. Diametro 2 centim. e 6 millimetri.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Sulle prime io lo supponeva un piccolo individuo dell'*Ammonit. interruptus* di Bruguière; specie che il sig. d'Orbigny ebbe la cura di studiare in tutte le differenti sue età (*Terr. crétac.* tom. I, pag. 231 Tav. XXXI e XXXII); ma visto poi che la rotondità del dorso negl'individui più giovani si accompagna ad altri caratteri che mancano nel nostro esemplare, dovetti convincermi della differenza che passa tra esso e le varietà della specie predetta. Per la forma del dorso si assomiglia quindi agl'individui più piccoli dell'*interruptus*, da' quali però si allontana in causa delle coste che mancano onninamente ne' primi; come del pari differisce dagl'individui di mezzana grandezza per l'assenza totale dell'incavo che in essi si osserva nel mezzo del dorso (Orbigny Tav. XXXII, fig. 6). Oltre a ciò le coste nell'*interruptus* partono dai contorni dell'ombelico, e dopo di essersi di poco innalzate sul lato della spira, s'ingrossano in una specie di tubercolo presso al quale si biforcano, laddove nella specie che ho rappresentata partono dritte dalla sutura, e giunte al terzo superiore dell'anfratto, si dividono in due e vanno a circondare il dorso.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea neocomiana di Montursi presso Romagnano, ove esiste selcificato in compagnia d'una Terebratula del genere antinomia (Zool. foss. p. 263).

AMMONITES QUINQUECOSTATUS, Cat.

Tav. IV. fig. 1.

A. testa discoidea, subcompressa, laevigata, transversim quinquecostata, costis aequaliter distantibus; anfractibus cylindricis, apertura circularis? septis obscuris.

Conchiglia discoidea, levigata, leggermente compressa ne' giri più interni della spira, col dorso rotondato, munita trasversalmente di cinque coste sottili pressochè egualmente distanti fra loro; anfratti cilindrici discoperti; bocca circolare quasi al tutto obliterata; tramezze impercettibili. Diametro centim. 5, mill. 4.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Ha tutta l'analogia con l'*Amm. quadrisulcatus*; se non che presenta cinque coste diritte invece dei quattro solchi che si osservano nella specie Orbigniana. Si discosta altresì dagli *Amm. Ophiurus* ed *Honoratianus* dello stesso Orbigny per avere cinque coste semplici in luogo di otto, che si veggono nel primo; e si allontana dal secondo per differenze ancora più cospicue. La spira dell'*Amm. Honoratianus* è molto compressa, e le coste più numerose ed alquanto incurvate, mentre nel nostro gli anfratti sono rotondati e le coste appajono diritte e lineari. Si distingue pur anco dall'*Amm. lepidus* di Orbigny, col quale mostra di avere qualche conformità; ma in questo le cinque coste maggiori si prolungano al di fuori dell'ultimo giro, e gl'interstizii fra costa e costa sono segnati da strie trasversali; caratteri che non si riscontrano nell'*Amm. quinquecostatus*.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea grigia ammonitica di Malcesine nel Veronese.

ANNOTAZIONI.

Debbo qui raddrizzare un mio giudizio intorno all'*Amm. quadrisulcatus*, comunissimo nella calcarea neocomiana del Veneto, rappresentato nella tavola VIII, fig. 2 del Prodromo. Alla pagina 142 io diceva, che la *presenza di cingoli invece di solchi poteva dipendere dallo stato di conservazione del guscio, e che ove la specie si trova sotto la forma di modelli interni, si ravvisano i quattro solchi avvertiti dall'Orbigny.* Esaminati più attentamente questi modelii mi avvidi che i cingoli sono invece rappresentati da linee piane, talvolta leggermente prominenti e non mai incavate; laonde ragion vuole che si debba risguardare questo *Ammonite* come specie diversa dal *quadrisulcatus*, al quale io l'aveva conguagliato. Di fatto, se gli ultimi due giri della spira sono nel nostro fossile corredati di quattro cingoli o coste lineari e non di un eguale numero di solchi come si ammira nell'*Amm. quadrisulcatus*, e se gl'indizii di coste sussistono anche nei modelli interni; io mi credo autorizzato di annunziarlo adesso come una specie non conosciuta. Perciò stesso propongo di applicargli il nome di *Amm. quadricostatus*, in sostituzione dell'altro con cui questa conchiglia fu contrassegnata nel Prodromo.

AMMONITES EMACIATUS, Cat.

Tav. IV, fig. 2. *a*, *b*.

A. testa discoidea, valde compressa, lateraliter costata, costis simplicibus, laeviter flexuosis; dorso medio subcarinato; apertura compressa, integra; spira complanata. Septis?

Conchiglia discoidea, molto compressa, ornata di coste leggermente flessuose nell'ultimo giro, quasi diritte nel resto della spira, le quali partono dalla sutura dell'anfratto e si elevano verso il dorso senza raggiungerlo. Il dorso n'è lievemente carenato scorgendosi nel mezzo di esso un risalto laminare abastanza pronunciato. Apertura molto allungata, compressa, non occupata inferiormente dall'anfratto che le sta sotto. Tramezze ignote. Diametro cent. 5, millim. 6.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Ha la sottigliezza quasi direi papiracea dell'*Amm. macilentus* d'Orbigny,

e attinge presso a poco le medesime dimensioni; ma ciò che da questo lo distingue, e ci porta a crederlo una specie particolare, sono le coste semplici, che mai si prolungano fino alla regione del dorso; laddove nell'*Amm. macilentus* esse circondano completamente l'ultimo anfratto, e ciascuna si raddoppia prima di attraversare il dorso. Oltre di che la specie nostra è corredata nel mezzo del dorso d'una cresta molto sottile, più o meno rilevata secondo lo stato di conservazione della cresta medesima. L'individuo meglio conservato che possedo aderisce in parte alla roccia da cui l'ho tratto.

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea epiolitica superiore di Cesio Maggiore, tra Feltre e Belluno.

AMMONITES ZIGNII, Cat.

Tav. IV, fig. 3, *a*, *b*.

A. testa discoidea, inflata, externe transversim costata; costis distantibus, interruptis, dorso rotundato, latissimo; anfractibus convexis, subinvolutis; apertura subrotundata, integra. Septis?

Conchiglia discoidea, turgida, liscia, con la parte esteriore della spira ornata di coste trasversali filiformi molto distanti tra loro, che non si prolungano su i lati, ma si arrestano su la convessità del dorso ch' è molto largo. Anfratti convessi, in parte ricoperti. Apertura ampla, leggermente compressa su i lati negl'individui giovani, più larga che alta negli adulti, appena interrotta inferiormente dall'anfratto. Tramezze ignote. Diametro 6 a 15 centim.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Differente affatto è questo Ammonite dal *latidorsatus* di Michelin, a cui io l'aveva dubitativamente riferito (*Prodromo di Geognosia paleozoica*, pag. 140). Le differenze consistono nelle coste del dorso, non mai decorrenti su i lati esterni del maggiore anfratto, quali si veggono nel *latidorsatus*; ma appajono solamente accavallate su 'l dorso sotto forma di cordoncini alquanto elevati e molto distanti l'uno dall'altro. Per la stessa ragione si discosta dal-

l'*Amm. Hommairei* di Orbigny, nel quale i cordoni attraversano completamente il giro esterno e si mostrano flessuosi (Orbigny, *Terr. jurass.* pl. CLXXIII). Tali coste che a buon dritto si potrebbero appellare dorsali, non s'incurvano verso la parte anteriore della spira, ma sono rigorosamente rettilineari e parallele fra loro. M'ebbi dal signore de Zigno un individuo malconcio di questo Ammonite, ch'è anche il più corpulento degli esemplari che finora m'è riuscito di mettere insieme. Secondo il mio costume, non ho voluto prescindere di dedicare questa specie a chi usò la cortesia di offerirmi in dono il primo esemplare, proveniente da non so quale località dei monti Roveretani (*Prodromo* Tav. 7, fig. 2, *a*, *b*, *c*.).

LOCALITA'.

Fossile nella calcarea ammonitica gialla di Torri nel Veronese. Il sig. Fontana, esperto chimico di Lazise, trovò esemplari di questa specie meno detriti di quelli ch'io conservava per lo innanzi. L'individuo giovane, che ho figurato sotto due aspetti, fu rinvenuto nella calcarea rossa di Malcesine; gli altri individui ben tre volte più grandi procedono dalla calcarea o marmo giallo di Torri, che contiene spoglie di altri testacei ed anche aculei di Echini.

OSSERVAZIONI.

Il politalamo che abbiamo descritto si avvicina all'*Amm. ptycoicus* illustrato da Quenstedt nell'opera *Petrefactenkunde Deutschlands* (pag. 219 Tab. 17, fig. 2, *a*, *b*), anzi ho motivo di sospettare ch'esso sia la medesima specie, già descritta fino dal 1845 nel Giornale di Brown (Jahrbuch, pag. 683), benchè gli esemplari fossili che ho sotto gli occhi non siano abbastanza conservati per crederli affatto identici alla specie di cui parliamo. Prima però di risolvere se convenga o meno di conguagliare all'*Amm. ptycoicus* la specie ch'io reputava inedita, attenderò che individui più netti o meglio determinabili, che li raccolti finora non sono, mi vengano alle mani, sia dalla calcaria del Roveretano, ove li ha trovati Quenstedt, sia da quella che si escava presso Malcesine ed a Torri nel Veronese. Le figure e le descrizioni di questa specie si leggono nella Memoria che ho pubblicata negli Atti della Società Italiana residente in Modena l'anno 1845, come lo dichiara l'indicazione posta in fronte della mia Memoria, le quali, essendo anteriori a quanto scrisse Quenstedt sullo stesso argomento,

mi assicurerebbero la priorità se realmente l'*Ammonites ptycoicus* e l'*Amm. Zignii* fossero una sola e medesima specie.

AMMONITES CAPITANEI, Cat.

Tav. IV. fig. 4. *a*, *b*, *c*.

A. testa nautiliformi, compressa, laevigata, omnino involuta, transversim sulcata; sulcis decem obliquis flexuosis inaequaliter distantibus; apertura ampla subelliptica; dorso rotundato septis lateraliter quinquelobatis.

Conchiglia compressa, nautiliforme, liscia, guarnita nei lati superiori dell'ultimo anfratto di sei solchi incurvati di lunghezza variabile, tre dei quali attraversano il dorso, e tre si ripiegano alquanto per prolungarsi fino ai margini laterali dell'apertura. Gli altri quattro solchi occupano la parte inferiore della spira, e ne attraversano il dorso ch'è rotondato. Apertura ampla, subellittica, co'i lati inferiormente rotondati, e abbracciante quasi per intiero il secondo anfratto. La sua lunghezza costituisce i due terzi dell'altezza della conchiglia. Setti laterali muniti di cinque o sei lobi profondamente digitati e di selle presso che regolari. Diametro trasversale cent. 6 1/2; diametro longitud. centim. 8.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Questa conchiglia ha molta conformità con l'*Amm. tatricus* di Pusch; ma la rotondità dei lati dell'apertura, ed i solchi profondi che dalla regione ombilicale vanno fino ai margini dell'apertura, sono caratteri più che mai sufficienti perchè s'abbia a considerare una specie distinta. Non posso riconoscere con precisione l'ampiezza trasversale della bocca, essendo l'unico esemplare che io possedo di questo Ammonite mancante del labbro sinistro; motivo per cui ho rappresentata questa parte co'i soli contorni, supponendo che il labbro perduto fosse eguale a quello che ancora sussiste.

Fu creduto che il solco più prossimo all'apertura non sia naturale ma fatto ad arte, supposizione a cui dava io stesso qualche peso prima che ad Entratico si scoprissero degli altri individui forniti dello stesso numero di solcature. Non saprei decidere se a questa specie appartenga un Ammonite

del quale possedo esemplari molto guasti, e la cui superficie esterna è munita di solchi flessuosi disposti nel modo medesimo di quelli che si osservano nell'*Amm. Capitanei;* quindi cade il sospetto di coloro che riputavano artificiali i solchi più vicini all'apertura.

Mi piace qui d'avvertire che siccome applicai ad alcune specie il nome di qualche benemerito Italiano che si occupa degli stessi miei studii così ho distinto la presente con quello dell'egregio *Ab. Capitanio* di Bergamo, dal quale mi fu regalata (*).

LOCALITA'.

Fossile nella calcaria epiolitica superiore di Entratico nel Bergamasco ove esiste in compagnia di varie specie di Aptici. Osservo che il luogo nel quale più abbondano gli Ammoniti è coperto di pascolo.

AMMONITES NODULOSUS, Cat.

Tav. IV, fig. 5. *a*, *b*.

A. testa discoidea, late umbilicata; laevigata, nodis crassiusculis longitudinaliter ornata; anfractibus amplexantibus; ultimo magis convexo; apertura rotundata. Septis?

Conchiglia discoidea, levigata, munita d'ombelico largo, profondo, circondato degli anfratti interni appena discernibili, per la più parte velati dal giro esterno o disparsi. Anfratto maggiore grosso, convesso, guarnito su i lati da una serie di tubercoli più tosto grandi, che si ripetono su la porzione visibile del secondo giro, non già su 'l terzo ch'è obliterato. Dorso largo, convesso, quasi circolare, occupata inferiormente da una piccola porzione della spira che in essa s'interna. Diametro da 6 a 18 centim.

DIFFERENZE ED OSSERVAZIONI.

Nelle figure date da molti autori nessuna ne ho trovato che rappresenti questo Ammonite. Esso manca affatto di coste, nè si vede sopra i lati della spi-

(*) Don Pietro Capitanio, perlustrando i monti del Circondario di Trescorre, potè radunare una serie di fossili di qualche entità. Un'altra ne allestì il Conte Vimercati-Sozzi, che fu anche in parte illustrata nell'Opuscolo anonimo che ho citato nel *Prodromo* alla pag. 118.

ra orma alcuna di tramezze. A questa specie non corrisponderebbe male un Ammonite ancora inedito della dolomia veneta (*Amm. binodosus*, Cat.) se invece di due serie di tubercoli ne avesse una soltanto, e se molto distinte non apparissero le frastagliature delle tramezze di cui è priva la specie cretacea. Forse potrebbe supporsi nella nostra conchiglia un qualche titolo per essere considerata analoga all'*Amm. granulatus* di Bruguière, ma le figure di Langius e di Borguet citate dall'autore sono così inesatte da non poterne fare verun uso (*Langius, Hist. lapidum*, pag. 93, Tab. *XXIII*, fig. 1. — *Bourguet, Traité des pétrifications*, pag. 229, Tab. XXXIX, fig. 254–256).

Fin da tempo lunghissimo mi sono procurato individui dell'*Amm. nodulosus*, perlustrando i monti della Valle Pantena nel Veronese, de' quali parlai più o meno distesamente in una Memoria stampata nel Bimestre VI del Giornale di Brugnatelli per l'anno 1820. Delle specie raccolte in quell'epoca ho ceduto le doppie al mio amico e collega prof. Ranzani; ed un individuo dell'*Amm. nodulosus* deve esistere nella Collezione dei fossili della Università di Bologna, accompagnato dalla seguente iscrizione: *Ammonites* . . . . *fornito d'una serie di tubercoli, con la spira priva di frastagliature, composta d'anfratti liscii e molto convessi. Ha tre pollici di diametro e proviene dalla calcarea di Grezzana in Valle Pantena.* V'ha dunque di questa specie individui di grandezze diverse in una stessa località, nè dee recare meraviglia se gli esemplari della specie medesima, che abbiamo raccolti nella calcarea cinerea dei monti Euganei, si mostrano alquanto più grandi di quello che ho figurato nella Tavola sopra indicata, il quale è anche meglio degli altri conservato. Alla pag. 96 (tomo I) della *Paleontologia* di Orbigny trovo indicato sotto lo stesso nome un Ammonite del Muschelkalk, ma ignoro se l'epiteto *nodulosus* sia stato adoperato prima del 1820.

LOCALITA'.

Fossile nel biancone di Valle Pantena nel Veronese e nella calcarea di Fontanafredda negli Euganei, ov' è accompagnato dal *Belemnites bipartitus*, dall'*Apticus lamellosus*, che sono specie decisamente neocomiane.

(*Letta il* 15 *luglio* 1850)

APPENDICE.

Non valsero le molte e concludenti ragioni allegate nella mia *Zoologia fossile* impressa l'anno 1827 a persuadere che prima di ogni altro io collocava la calcaria ammonitica rossa fra le rocce juresi, giacchè il celeberrimo cav. Murchison insiste tuttavia a credere, essere stato invece il Barone de Buch che insinuò ai geologi italiani congregati nel 1844 in Milano, di considerare quella roccia come uno de'membri della formazione del Jura (*Quarterly Journ.* 1851, dicembre 18, p. 66). È vero che per mettermi in accordo coi geologi italiani tolsi nel 1836 a considerare la calcaria rossa ammonitica come una continuazione non mai interrotta del sistema cretaceo (*Prodromo di Geognosia paleozoica* pag. 4 e seg.); ma non per questo doveva io chiudere gli occhi dell'evidenza, e ritenere che le specie organiche fossili di quella roccia fossero tutte cretacee, avendo già in diversi miei scritti posteriori dichiarato, che in unione agli Ammoniti juresi (*Amm. perarmatus*, *biplex*, *annulatus*, *linguiferus* ecc.) essa dava ricetto a specie riputate dall'Orbigny esclusivamente proprie della calcaria neocomiana. Fu questo accomunamento di specie cretacee e di specie juresi che mi obbligò a verificare se per avventura le prime di tali specie si mostrassero soltanto nella porzione più elevata della calcaria ammonitica rossa, ovvero si profondassero anche ne'piani inferiori; ed è appunto in queste mie investigazioni che avvisai tutte le differenze già registrate nella Memoria: *Sopra una nuova classificazione delle calcarie rosse*, cioè notai esservi nelle Alpi venete un estesissimo terreno epiolitico, od Oxfordiano che dir si voglia, li cui strati fossiliferi superiori differivano dai sottostanti, eccezione facendo di un qualche cefalopodo (*Ammonites tatricus*), comunissimo ne'piani ammonitici più recenti, e rarissimo ne'più antichi.

Ma se gli oltramontani che visitarono le nostre Alpi non misero a calcolo le osservazioni de'geologi locali, v'ha però fra questi ultimi qualch'uno, che ad onta del silenzio osservato dagli stranieri, dichiarò *essere giusto rammentare, come fino dal 1827 il Catullo avesse assegnato alla calcaria ammonitica il posto che ora gli si accorda, indicando tra i fossili che in essa si rinvengono varie specie che sono proprie de'banchi juresi* (*Atti dell'Accademia di Padova*, 1846, 4.°). Se non che nel 1850 lo stesso chiarissimo cavaliere de Zigno, autore delle suindicate osservazioni, pubblicava in altro suo scritto *esservi stato qualch'uno il quale classò fra le rocce del Jura superiore la calcaria ammonitica, senza avere a guida la presenza de'fossili inseritivi dentro*, obliando così ciò che il suo spirito di giusti-

zia consigliavalo ad accordarmi quattro anni prima (*Coup d'oeil sur les terrains stratifiés des Alpes vénitiennes*). Non prendo qui a difendere la priorità delle mie osservazioni sulla stratigrafia e paleontologia della calcaria ammonitica delle nostre Alpi, giacchè basta consultare la *Zoologia fossile*, pag. 143 e seg.) per chiarirsi del valore ch' io attribuiva ai fossili ben otto anni avanti la pubblicazione di quell'opera, impressa l'anno 1827. E nel vero le osservazioni sulla geognosia paleozoica delle Alpi venete sono state inserite nel *Giornale di storia naturale* di Pavia correndo gli anni 1819-1820 e susseguenti fino al 1826, e sono nel sostanziale quelle stesse che si leggono nella *Zoologia fossile*, se ne levi gli schiarimenti aggiunti dopo la comparsa delle opere paleontologiche di Schlotheim (1), di Bronn (2), di Brongniart (3), di Goldfuss (4), di cui io difettava negli anni che precedettero il 1827. Che se non fosse a portata di ogni straniero ricorrere al giornale impresso a Pavia negli anni sopra indicati, io propongo di prevalersi in quella vece del plauditissimo Bollettino di Ferussac, ove sono estratte con molta diligenza, per opera del sig. Boué, le osservazioni intese a dar ragione dei fatti che mi condussero a sceverare dal sistema cretaceo la *calcaria ammonitica*, non già con la scorta dei fenomeni puramente geognostici, ma con la face dei fossili che dentro vi annidano (5).

Maraschini e Pasini oppugnarono con ogni sforzo il distacco ch'io proponeva della calcaria ammonitica rossa dalla creta, ed altri geologi, seguendo lo stesso avviso, rilevarono il medesimo errore, e dissero che la da me proposta separazione è stata piuttosto immaginata dallo spirito di sistema, che contrassegnata dalla natura. Fu in quel torno di tempo che il Boué, il quale aveva nel 1824 visitate le Alpi venete, si oppose alle conclusioni de' miei censori, e dichiarò che « Maraschini et d'autres ont confondu improprement avec la véritable scaglia, ou craie, des calcaires jurassiques blancs et rouges et à ammonites, comme j'en ai moi-même la preuve » (*Bullettin des sciences nat.* Tom. IX pag. 282).

Dalle cose fin qui discorse ne consegue, che molti anni addietro io accordava alla calcaria ammonitica rossa del Veneto quel posto, che nella successione de' varii terreni di sedimento gli viene adesso assegnato dai geologi d'ogni nazione.

Ho già fatta menzione de' fossili cretacei misti ai fossili dell'era jurassica; miscela ch'io aveva intraveduta nel 1825, e che poscia tolsi a descrivere nella Zoologia fossile (pag. 149-363), individuando il nome delle specie che mi risultarono promiscue, ed indicando ad un tempo i luoghi in cui si trovano (V. tavole sinottiche poste in fine d'ogni paragrafo (pag. 259 e seg.). Ammessa la da noi proposta divisione del terreno epiolitico in superiore ed inferiore, svanisce in gran parte l'anomalia di fossili cretacei accumunati ai fossili juresi, giacchè tale promiscuità esiste solamente nella zona epiolitica superiore, non già nella calcaria soggiacente, imperciocchè, come ho detto e come meglio mostrerò in altro tempo, nessuna specie dell'ordine de' cefalopodi proprii del terreno neocomiano in essa si osserva, nè mi consta che mai sia stata osservata da nessuno.

(1) Petrefactenkunde 8.vo 1820. Nachträge zur Petrefactenkunde, 1822, 8.vo
(2) System der Urweltlichen ecc., 1824-25, fol.
(3) Annales des mines 4.me livraison 1821 e Memoire sur les terrains calcareo-trappéens du Vicentin, 1823, 4.to
(4) Petrefacta Germaniae, 1826, fol.
(5) Bulletin des sciences nat. et de géologie T. IV pag. 316 (1824), T. V pag 186 (1825), T. VIII pag. 420 (1826), T. X pag. 440 (1827), T. XII pag. 313 (1827).

Ho detto che formazioni sincrone a quelle del Veneto esistono in altri paesi della penisola, e citai per esempio le calcarie ammonitiche rosse della Lombardia, della Toscana, del Modenese e del Golfo della Spezia, mantenendomi in questo concetto anche adesso, ad onta dell'opinione contraria emessa dai chiarissimi professori Savi e Meneghini nell'eccellente opera da essi pubblicata sulla geognosia stratigrafica della Toscana, ritenendo eglino che la parte inferiore del terreno epiolitico de' monti Pisani, Apuani ecc. sia più antica di quella che gli corrisponde nell'Italia settentrionale, e che soltanto la parte superiore di esso terreno, cioè gli *schisti varicolori*, rappresenti la totalità delle calcarie ammonitiche rosse del suolo Lombardo-Veneto. Il poco che potei osservare io stesso nell'Emilia, e le molte osservazioni fatte negli Apennini dal mio amico dott. Doderlein professore di Geognosia a Modena; come anco le conclusioni alle quali è stato condotto il marchese Pareto nella sua Memoria sulla geologia della Liguria marittima, mi hanno confermato nel pensiero, che la zona estesissima della calcaria Oxfordiana dell'Italia, quale l'ha tracciata de Buch, costituisca ovunque nella serie geologica la parte superiore del terreno jurese, e venga caratterizzata da una speciale riunione di fossili. È chiaro che gli *schisti varicolori* de' chiarissimi Savi e Meneghini, raffigurano le calcarie scissili superiori del Veneto, e sono quasi al tutto privi di fossili, benchè in altre regioni ne sieno feraci, segnatamente alla Spezia, e nelle Alpi della Romagna, dove in più d'un luogo le rocce superiori Oxfordiane contengono specie juresi miste alle specie neocomiane. Ciò che qui dico con certa apparenza di autorità verrà documentato nell'opera che medito di pubblicare; ed intanto prego li professori di Pisa ad avermi per iscusato, se, in proposito della calcaria ammonitica rossa, io dissento dalla loro opinione, come non credo abbiano addotte prove sufficienti a convincere che la roccia, la quale soggiace al marmo salino della Toscana, spetti, piuttosto che al lias, al terreno carbonifero degli odierni geologisti. Di fatto, la roccia che dal luogo la Verruca è detta Verrucano, è per mio riverente avviso quella stessa che in istrati, spesso sconvolti da sotterranee ejezioni, si vede nel Cadorino, nella Carnia, ed in tutti li paesi che ho divisatamente descritti nella *Geognosia paleozoica delle Alpi venete* impressa in Modena nel 1846. La presenza di piante identiche a quelle del terreno carbonifero non basta a precisare l'età degli strati nei quali si trovano, quando sono disgiunte dai resti animali; come non bastarono al sommo geologo Elia de Beaumont le impressioni di piante carbonifere della Tarantasia e della Liguria per distaccare que' depositi fitolitici dal gruppo jurassico, ad onta dell'opinione contraria emessa dal prof. dott. Studer di Berna (*Bibl. universelle, Mai* 1851). Le piante, prive come sono di vita sensiva, non soggiacquero alle vicissitudini che tanto cooperarono alla distruzione degli animali, e per ciò medesimo le flore succedutesi l'una all'altra ne' diversi periodi geologici non sono da per tutto distinte fra di loro, come lo sono in generale le reliquie fossili degli animali, ma sorvissero a questi ultimi, e protrassero la loro esistenza fino alla comparsa del *jura inferiore*, attraversando così tutte le zone del sistema triassico (*Zool. fossile*, pag. 34 e seg.). Mortillet constatò non ha guari l'esistenza di cefalopodi juresi nel *lias inferiore di Petit Coeur*, il quale soggiace alla roccia con filliti del terreno carbonifero (*Bull. de la Société géol., Séance du* 8 *novembre* 1852).

E in proposito di piante del terreno carbonifero associate alle belenniti liassiche delle Alpi

Savojarde noi troviamo sciolta la questione dal Murchison nell'egregia opera sulla struttura delle Alpi, ove dichiara esplicitamente, doversi il geologo attenere ai soli avanzi animali, se i tipi di piante che li accompagnano spettano ad un'era diversa; dal quale consiglio emerge chiara la prevalenza che vuolsi accordare ai primi sopra le seconde. Valendomi di questa sentenza vieppiù avvalorata dalle ricerche fitolitologiche per me instituite sulle Alpi venete, io torrò a rilevare gli sconci che in fatto di geognosia stratigrafica si è lasciato sfuggire il Dott. Abramo Massalongo in parlando delle filliti del Vicentino, ben certo che questo giovane professore non darà sinistra interpretazione alla schiettezza delle mie osservazioni, perchè figlie della stima che nutro per lui, e di quella decente sincerità che scrivendo ho sempre osservata.

I. Il sig. Massalongo, studioso e assiduo indagatore di oggetti attinenti alla geognosia, fermò ultimamente la sua attenzione sopra le filliti esistenti in vicinanza al torrente Chiavon, al nord di Tiene e di Salcedo, all'est di Lugo, non che sopra quelle di Novale nel tenere di Valdagno, paese conosciutissimo per la copia di grossi e lunghi tronchi selcificati e di qualche ittiolito che ivi si trovano. Il terreno cui spettano le filliti di queste diverse località, è stato riferito dal Massalongo alla zona eocena o più antica del terreno terziario, dichiarando a chi mostrasse qualche diffidenza sull'esattezza della sua classificazione, essere dello stesso suo avviso il prof. sig. Heckel ed il geologo sig. Pasini (Massalongo, *Piante fossili de' terreni terziarii del Vicentino*, pag. 15). A questo giudizio parrebbe avesse dovuto servire di scorta l'esame di un terreno modello quale sarebbe il suolo di *Bolca*, e che li terreni di *Chiavon* e *Salcedo* in tanto si conformino all'eoceno in quanto che contengono la stessa flora e le stesse rocce, che a questa zona vengono da' geologisti assegnate. Niuna di queste vitali circostanze si prestano a corroborare l'opinione dell'autore, giacchè, quanto alla prima, confessa egli stesso *non esservi alcun rapporto tra la flora del Vicentino, e la flora effettivamente eocena di M. Bolca*; ed in quanto alla seconda non ci consta che a *Chiavon* ed a *Salcedo* vi esistano l'argilla plastica e le ligniti inferiori, che sono le rocce caratteristiche della zona eocena, e che pur si veggono copiose a *Bolca*, ed in più luoghi del Vicentino. Da' quali fatti adunque deduce il dott. Massalongo che le filliti in discorso spettano alla regione più bassa del terreno terziario? Egli, invece di trarre dalle proprie osservazioni più giuste conseguenze, volle mettersi in accordo con le dottrine più tardi abbandonate del prof. Unger, e per ciò stesso si duole alla pagina 13 di *dover dire che molte delle specie da esso riferite alla zona eocena sulla fede di Unger* (Gen. et spec. pl. foss.) *sieno state dal medesimo autore poste adesso nella flora miocena* (Synop. et Chlor.); *ambiguità*, ci soggiunge, *deplorabile, perchè ci è tolto in tal guisa di poter pronunziare con certezza sopra terreno veruno, e così è reso dubbio quel poco di vantaggio che apporta alla geologia la botanica fossile*. Se il dott. Massalongo avesse con minor fretta consultate le flore fossili di altri autori avrebbe veduto che il ch. Unger intese con quella sua riforma di raddrizzare l'errore in cui era caduto, assegnando alla zona inferiore terziaria le filliti di *Hoering* nel Tirolo, di *Radoboj* nella Croazia, di *Sotzka* ecc. per riporle in una zona più moderna che l'eocena non sia, e ciò per uniformarsi all'opinione di coloro che si occupano degli stessi suoi studj, e del sig. Brongniart particolarmente, la cui autorità in materia di piante fossili merita molta considerazione.

Non è già che il terreno di *Chiavon* e *Salcedo* dia soltanto ricetto alle filliti dell'epoca miocena, ma colà vi si trovano eziandio in assai scarso numero le filliti eocene congiunte alle filliti pliocene, circostanza che non impedisce di ascrivere que' depositi alla zona miocena, a meno che non si guardi più al rumore che al valor delle cose, nè si voglia avere riguardo alla quantità prevalente delle specie miocene, le quali sono le sole nel caso nostro che debbono regolare il criterio del paleontologo, quando mancano i fossili animali. Brongniart riferisce dubbiamente alla zona eocena la calcaria marnosa scissile di Salcedo fondandosi sopra due piante riportate dai paleontologi a questo periodo, cioè la *Zosterites tenioeformis*, Brog. e la *Zonarites flabellaris*, Sternb. specie ignorate dal sig. Massalongo, che le avrebbe descritte nel suo libro se conosciute le avesse, come si sarebbe astenuto dal negare qualunque analogia tra la flora di Salcedo e la Bolcese; ma il Brongniart, che in unione al padre suo vide le principali località del Veronese e del Vicentino, non visitò Salcedo, nè potè trarre le necessarie notizie onde con più di proposito asseverare in via assoluta che gli strati di Salcedo sono coetanei agli strati di Bolca, come erroneamente credeva Maraschini (1). Ma lasciamo in disparte sì fatte considerazioni e veniamo a ciò che più c' interessa, cioè alle questioni superiormente proposte sulla zona cui furono ascritte dal Massalongo le filliti, e sull' epoca geognostica della roccia in cui esse sono incluse.

II. Enumerando per primo le filliti attribuite alla zona eocena non parlerò di quelle annunciate come specie nuove (2), per non essersi l'autore data la cura di aggiungere alle descrizioni specifiche anco le relative figure, omissione per verità condannevole, e che tale tanto più ci riesce in quanto che nessuno potrebbe rivendicargli il titolo di scopritore, se altri per avventura volessero anticiparne la pubblicazione. (3)

Le forme *estraeuropee* delle filliti eocene della Francia, dell' Inghilterra, del bacino del Baltico, e di altre molte località sono li caratteri che a prima giunta debbono colpire l'attenzione del paleontologo e guidarlo nello studio delle flore fossili del periodo terziario, senza cui è impossibile di stabilire i giusti confronti tra le numerose formazioni locali dell'Italia, e le formazioni sincrone degli altri paesi. Ciò premesso egli è evidente che il prof. Massalongo non doveva lasciar passare inosservato il gran carattere delle forme quando tolse a fissare l'età relativa delle zone fitolitiche di Chiavon e Salcedo, e chi nol credesse o volesse iscusarlo legga prima l'elenco qui sotto riportato.

(1) Oltre le due accennate un'altra specie riputata eocena fu trovata a Salcedo, ed è questa la *Callitrites Brongniartii* di Endlicher, che pure si rinviene a Bolca, e nei contorni di Parigi. Questa conifera si ripete eziandio nel suolo miocene della Croazia e della Boemia.

(2) In proposito di specie nuove, mi permetterò qui di manifestare al Massalongo il mio grandissimo dubbio che la specie *Condrites Buellanus* non sia veramente nuova, imperciocchè chi conosce certi miei scritti inediti sopra Bolca e ne ha osservate le filliti ivi descritte, sa pure che mi sono occupato del medesimo argomento. Lo prego intanto a dirmi in che questa sua specie differisca dal *Condrites Buella* scoperto e descritto da me. Io non farò violenza alla coscienza sua forzandolo ad un tempo a dichiarare, se realmente si possa con una semplice modificazione della desinenza d' un nome specifico annunziarsi scopritore di una specie.

(3) Il sassologo vicentino Catalan, quello stesso che per conto del dottor Massalongo raccolse le filliti di cui parliamo, si avvisò di raddoppiarne gli esemplari, e di venderli ad altri amatori.

Filliti del terreno mioceno credute eocene dal dott. Massalongo.

Alghe.

Cystoseirites communis, Unger — Radoboj, dove trovasi in unione alla *C. gracilis* o *Helii* dello stesso Unger.

Corallinites, Ung. — Delle specie di questo genere non si conosce finora nel terreno eoceno che la *Cor. Pomelii*, Brongn. : tutte le altre sono miocene o pliocene.

Funghi.

Xylomites umbilicatus, Ung. — Di questo fungo, non ricordato tra le filliti di Chiavon si parlerà in un' altra occasione. Il *Xylomites maculatus* e *tuberculatus* di Ung. sono della zona pliocena di Parschlug.

Graminee.

Bambusium sepultum, Ung. — Radoboj.

Najadee.

Zosterites marina, Ung. — Radoboj. *Caulinites nodosus*, Ung. Radoboj. *Ruppia pannonica*, Ung. Radoboj.

Liliacee.

Smilacites grandifolia, Ung. ed *hastata*, Brongn.

Palme.

Flabellaria rapifolia, Sternb. Hoering.

Conifere.

Callitrites Brongniartii, Endlicher — È specie promiscua all'eoceno ed al mioceno.

Widdringtonites Ungeri, Endlich. Parschlug. — È specie pliocena.

Myricee.

Myrica longifolia, Ung. Carniola. *M. acuminata* Ung. Hoering, e *M. banksiaefolia*, Ung. Hoering. Altre quattro specie di Myricee noverava Brongniart nel mioceno di Europa.

Cupulifere.

Fagus atlantica, Ung. Radoboj.

Quercus lignitum, Ung. Parschlug. — È specie pliocena; laddove il *Quercus palaeococcus*, *furcinervis* e *cuspidata* di Unger sono specie miocene.

Betulinee.

Betula Dryadum, Brongn. — Promiscua alle due zone miocena e pliocena.

Platanee.

Platanus grandifolia, Ung. Radoboj. — Di questo genere altre specie appartengono alla zona miocena, cioè: *P. digitata, jatrophaefolia, Hercules* Ung. la quale ultima si ripete nelle marne miocene di Armissan presso Parigi.

Ericacee.

Vaccinium acheronticum Ung. — Manca fra le filliti eocene e miocene di Brongniart, che ne registra tre specie nel plioceno, e sono: *V. vitis japeti, icmadophilum*, e *myrsinites* di Ung.

Combretacee.

Getonia antholitus, Ung. — A questa specie miocena si può aggiungere la *G. petroeformis*, Ung.

Pomacee.

Pyrus minor, Ung. Parschlug. — Le specie *Pyrus Theobroma*, e *Euphemes* di Unger, annunziate come promiscue alle due flore eocena e miocena, sono invece pliocene.

Amygdalee.

Amygdalus pereger, Ung. — Così questa come l'*Amygd. querculas* di Unger sono specie pliocene.

Juglandee Br.

Juglans pristina, Ung. — Le altre specie indicate dall'Unger sono pliocene, e tali pur sono la *Juglans falcifolia* A. Braun, e la *Cinerea fossilis* Brongn. disseppellita nella Toscana.

Leguminacee.

Cytisus oeningensis, A. Braun e *Cytisus Dionysii*, Ung. sono filliti pliocene.

Phaseolithes orbicularis, Ung. — Spetta al plioceno di Parschl. unitamente alla specie *Phaseol. serrata, physelobium*, e *securidacea* di Unger.

Cassia hyperborea, Ung. — A questa specie miocena vengono dietro la *Cassia ambigena*, *petiolata* e *Memnonis* di Unger, tutte pliocene.

Rubinia hesperidum, Ung.

Acerinee.

Acer campylopterix. Ung. Radoboj. — Le specie *Acer eupterigium*, *pegasinum*, *megalopterix*, Ung. sono per Brongniart esclusivamente miocene : l'*Acer lignitum pseudomos*, *obtusilobus*, *pseudocampestre*, di Ung. e *trilobatum* di A. Braun sono specie pliocene.

Di altre specie miocene conosciute dai paleontologi e descritte con molta diligenza dal dott. Massalongo non fo qui parola, bastando il già detto per dimostrare, con la sola scorta de' fossili, che la cosa va precisamente all'opposto di quanto avrebbe creduto l'autore circa il posto occupato dal terreno fitolitico di Chiavon e di Salcedo, il quale, per le ragioni geognostiche che sarò per esporre si affà piuttosto co' gres superiori di Fontainebleau, co'gessi della Provenza, con le ligniti (miocene) de' margini del Reno presso Colonia, e di Meisner, presso Cassel, e con quelle di Altsattel e di Bilin nella Boemia, tanto feraci di piante marino-terrestri dell'epoca miocena, già descritte e figurate da Sternberg, da Rossmaester, e da Unger.

III. Quanto alle ragioni geognostiche opponentisi alle dottrine dell'autore è d'uopo ch'io premetta una digressione sullo sviluppo più o meno esteso di ciascuna delle zone del terreno terziario adagiato appiè delle Alpi venete, indicando ad un tempo i luoghi ne' quali codeste zone ora sole, ora insieme congiunte si mostrano all' occhio dell' osservatore. E per dire innanzi tutto della più antica appellata eocena, possiamo senza esitanza asserire, che assai volte essa apparisce più estesa e più *complessa* delle altre due che gli succedono, cioè della miocena o media, e della pliocena o superiore, (1) imperciocchè se ne levi pochi tratti, co-

(1) Io seguo l'individuazione di *eoceno*, *mioceno* e *plioceno* proposta da Lyell ad onta delle osservazioni in contrario fatte da Orbigny sulle inconvenienze che vi si trovano per entro, le quali, se sono giuste in quanto alle *proporzioni di specie fossili recenti* assegnate da Lyell a ciascuna delle sue zone, non si oppongono però alle distinzioni stratigrafiche, anzi

stituisce una cinta continuata che dall'alto del Friuli e della provincia Bellunese si distende nel Feltrino, nell'agro di Vicenza, e nelle altre regioni del Regno Veneto, non eccettuati li Monti Euganei, dove noi stessi col mezzo de' fossili, ne abbiamo dimostrata la esistenza (*Giorn. Da Rio* bim. di settembre e ottobre 1828 e *Giorn. di Treviso* N. XC. 1828).

Il mare sul cui fondo potè depositarsi li sedimenti eoceni doveva occupare un bacino estesissimo, imperocchè dall'est del Friuli (illirico) tali sedimenti si diramano in più distretti di quella vasta provincia, indi si prolungano nel Trivigiano (*Fratta*, *Tarso* ecc.), nel Bellunese, nel Feltrino ecc. per ricongiungersi ai depositi analoghi del Vicentino e del Veronese, seguendo presso a poco lo stesso ordine di *proporzione*, di *direzione*, e d'*isolamento* che in generale si è osservato nelle zone di sedimento eoceno della Germania, della Francia e dell' Inghilterra.

Le roccie della zona eocena, cominciando dalla più bassa, si succedono coll'ordine seguente: 1.° Argilla plastica, visibile in pochi luoghi, accompagnata talvolta da grossi banchi di lignite (*Arzignano*, *Bolca* ecc.); 2.° Arenaria glauconiana, che tiene il luogo della prima in parecchie provincie del Veneto, ricoprendo immediatamente or l'una or l'altra delle zone cretacee, e venendo essa stessa ricoperta dalla calcaria nummulitica (*Bellunese*, *Veronese* ecc.), incomparabilmente più estesa di tutte le roccie terziarie, con la quale si compie nel Veneto la parte inferiore de'terreni terziarj, non essendovene verun' altra cui possa competere il titolo di eocena. Io vidi questa calcaria a Cormons nell' Illirio, paese dal quale ho raccolto gran parte delle conchiglie e delle nummuliti per me descritte in una Memoria epistolare sopra li terreni di sedimento superiore del Friuli; poscia tornai a rivederla nel comune di Manzano all'est di Udine, ed a Ragogna nel tenere di S. Daniele sulla sinistra del Tagliamento, dove stassi adesso per utilizzare una miniera di lignite; ma in nessuno di questi luoghi seppi scorgere la roccia sopra cui è coricata; benchè dai pezzi vaganti di arenaria verde conchigliacea che osservai ne'torrenti che lambiscono quelle eminenze, sia tentato a credere essere la glauconia la roccia che gli serve di base. Nel Bellunese la zona eocena si può considerare come suddivisa in due lunghi rami, uno al nord- nord-ovest di Belluno rappresentato da un estesissimo deposito di arenaria glauconiana ferace di fossili eoceni, cui sopragiace un'arenaria grigia o molasse provveduta di fossili per la più parte miocenі: l'altro (*ramo*) posa appiè dell'Alpe meridionale (sud- sud-ovest di Belluno), incominciando poco sotto de'colli che restano al sud di Visome, e si mostra costituito di calcaria eocena più ricca di foraminifere che di nummuliti, la quale ripetendosi sotto la forma di pezzi erratici sul letto de'torrenti ch'è d'uopo attraversare per giungere a Mel (*Cicogna*, *Limana* ecc.) fa conoscere anco ai meno esperti, che le superiori eminenze di S. Isidoro, di S. Antonio Tortal, di Meste, di Nagher ecc., sono composte di questa calcaria, ch'è ordinariamente bianca, talvolta gialliccia, e rare volte con ciottoli di calcaria più antica. Con gli stessi caratteri, e più ferace di nummuliti che di foraminifere, essa ricomparisce al nord di Feltre ne'dintorni di Valerna, di Noreen ecc.; e numerosissimi sono sul letto dei Colmeda i pezzi

stanno in perfetto accordo con le dottrine generalmente adottate dagli odierni geologi. Non si può dire altrettanto della partizione del terreno terziario esibita dall'Orbigny, giacchè stando alle osservazioni di Raulin e di Delbos, sembra che l' indipendenza stratigrafica di alcune zone del suolo francese credute sincrone alle zone di altri paesi, sia dimostrata all'evidenza (*Bull. de la Soc. géol.* 1852 *pag.* 406).

di calcaria nummulitica condotti dall'acqua fin presso il luogo in cui si scarica nel Sona, altro torrente, che ne' contorni di *Sanzan* mette nel fiume Piave. Ho già avvertito negli anni addietro essere cosa molto probabile che la glauconia eocena, tanto copiosa a Pedevena, si appiatti sotto la zona nummulitica di Valerna, di Facen e di Norcen, stante la sua prossimità a questi paesi, e il mio sospetto è anche corroborato dalla presenza di pezzi ciottoliformi di glauconia trascinati dall'acqua sul fondo dei torrenti anzidetti.

Il mare che nell'epoca di cui si ragiona contribuì alla deposizione della calcaria nummulitica doveva occupare nel Vicentino e nel Veronese un vastissimo tratto di suolo (lasciando però allo scoperto le Alpi), giacchè ovunque si trovano indizj dell'antica sua insidenza, sì nei contorni di Vicenza e di Verona, sì in tutti gli alti piani di dette provincie; ovunque gli avanzi animali da esso lasciati compariscono simili fra di loro, astrazione facendo di alcune specie, che mentre abbondano in un luogo, scarseggiano o mancano del tutto in un altro, come avviene anco di osservare ne' sedimenti marini di un'era anteriore alla terziaria.

Io non prenderò a descrivere se non alcuni dei luoghi in cui la zona nummulitica si offre allo sguardo dell'osservatore; e trattandosi di rilevare il divario che v'ha tra la zona eocena e la zona miocena mi fermerò di preferenza intorno a que' depositi de' quali più distinta mi apparì la stratigrafia, onde raffrontarli poscia con li depositi mioceni, che in ordine di età gli vengono immediatamente dopo. Se non che degne di speciale menzione io reputo nel caso nostro le grandi squarciature sofferte dalla zona eocena in causa delle ejezioni basaltiche spinte su dai vulcani, per cui il naturalista che volesse investigare le relazioni stratigrafiche de' terreni terziarj del Veneto e confrontarle con quelle di altre regioni, e del bacino anglo-parigino particolarmente, si avvede ben tosto che gli effetti sono da per tutto gli stessi, e che alle grandi oscillazioni indotte nel suolo da sì fatte vicende telluriche, noi dobbiamo attribuire le discordanze e le interruzioni che osserviamo negli strati, non che le alternative di piante marino-terrestri e di reliquie animali marino-lacustri, tanto copiose ne' terreni di sedimento superiore della nostra penisola.

Con li precedenti e li susseguenti cenni sull'estensione geografica della zona terziaria inferiore io non fò che sfoggiare l'argomento preso a trattare, benchè sotto un così largo aspetto che per lo innanzi non fosse da verun altro tracciato. Non cito quindi se non di transito la serie o fuga che vogliam dirla di colli, che da Vicenza si prolunga, formando per un verso le brevi eminenze di Rotonda, di Arcugnano, di monte Diavolo (*Fimon*), di Brendola, di Grancona, Nanto, Costoza ecc.; e dall'altro i monti di Montecchio, Castelgomberto, Valle di Lonte, Priabona, Arzignano, Montecchia (sull'Alpone), Roncà, Monteforte, Soave ecc., per diffondersi in più paesi dell'agro Veronese, e dentro Verona stessa dove, grazia gli scavi e le demolizioni eseguite per innalzarvi la fortezza, rinvenni nel 1840, avendo a compagno il sig. A. Manganotti, alquante specie di Radiali echinodermi da me non avvertite per lo innanzi, ad onta delle quasi giornaliere peregrinazioni ivi fatte quando io tenea domicilio in Verona, e che in quell'anno vidi abbondanti ad ogni torcer di spalle.

Se ne' paesi che ho nominati ci è dato di scorgere la calcaria nummulitica, non però in tutti la si vede adagiata sull'argilla plastica (1), ovvero sulla peperite che la rappresenta, es-

(1) Nel mio Trattato sopra li terreni alluviali (§ *III pag.* 63 *ediz.* 2.*da*) io non ammetteva nel Veneto l'argilla plastica

sendovi de' luoghi ne' quali la sola calcaria forma la massa totale dell'eminenza; ma questa mancanza non impedisce di riconoscerla per eocena, giacchè l'uniformità de' fossili inclusi nella calcaria visibilmente sorretta dall'una o dall'altra di dette rocce, con li fossili della calcaria che si profonda al di sotto del suolo, ci consiglia a considerarle entrambe come il prodotto di deposizioni accadute nel medesimo periodo geologico.

La zona di cui parliamo si mostra in qualche luogo *complessa* o fornita di quel numero di rocce che meglio si presta a caratterizzarla, laddove in moltissimi luoghi essa manca del zoccolo o arenaceo o argilloso di cui testè ho fatto parola. A Brendola la calcaria nummulitica ha sotto di se la peperite di tinta ordinariamente cerulea, gli strati della quale alternano in diversi luoghi con gli strati della calcaria grossolana e sono sì fattamente pieni di fossili eoceni da poter essi soli occupare per più anni l'attenzione e la pazienza del paleontologo (1) (*Monte de' Martiri*, *S. Vito*, *Chiusura del Lupo* ecc.) La stessa peperite o *brecciola*, come piacque al Brongniart di chiamarla, ricomparisce nei monti posti al nord-ovest, cioè a Sangonini, Valle di Lonte, Castelgomberto, ove i fossili che racchiude sono per la più parte simili a quelli della calcaria che gli sopragiace, non però a Sangonini nè a Roncà, conciossiachè in queste ultime contrade contiene in grandissima copia gl' individui del *Flabellum appendiculatum*, dell'*Orbitulites Pratii* e di altre specie di polipai, che mai si trovano nella sovrapposta calcaria, e de' quali darò la descrizione con le relative figure nell'opera sopra i polipai fossili del Vicentino.

L'argilla plastica, così definita da Brongniart nell' eccellente sua opera sopra i terreni calcareo-trappici del Vicentino (pag. 15), malamente appellata *argilla smetica* dal conte Lazise (*Combustibili fossili* ecc., pag. 30) soggiace alla lignite di Bolca, e sopporta del pari la lignite di Arzignano, dentro la quale il Bertrand Geslin rinvenne varie filliti eocene e fra queste la *Taeniopteris Bertrandi* Brong (2). Nel monte Pugnello tra Arzignano e Chiampo, la stessa argilla posta che sia al contatto della lignite diventa nera e bituminosa, come da per tutto altrove. Anche a S. Floriano presso Marostica, ed ai Puli tra Valdagno e Recoaro, l'argilla plastica appare modificata in una specie di gres nerastro, scissile, stracarico di conchiglie eocene, che per essere perfettamente bianche, danno alla roccia un aspetto singolare. In ambo questi luoghi l'argilla arenacea soggiace alla lignite, la quale sorregge essa stessa la calcaria nummulitica egualmenta ricca di fossili. Nella Biblioteca italiana (Milano 1842)

quale era stata in quel tempo definita dai geologi di Francia, e ciò per non avervi trovato in quella de' nostri monti i caratteri chimici che gli vennero assegnati; ma veggo adesso che tali differenze chimiche non si vogliono più ammettere in geognosia se non per dimostrare l' influenza delle rocce ignee sopra le rocce di sedimento, che preesistevano alle ejezioni.

(1) Nel 1829 ebbi il buon pensiero di separare dalla roccia cerulea più migliaja di foraminifere e di piccolissimi polipai coll' intendimento di occuparmi nell'anno successivo della loro descrizione, se non che il mio traslato dalla cattedra di Vicenza alla cattedra di Storia naturale in Padova avvenuto in quell'anno, e le cure che seco adduceva il gravissimo carico ch'era per assumere, mi distolsero di dar mano a quella interessante *micrografia* animale, al quale uopo mi aveva altresì provveduto dell' opera di Soldani e di qualche memoria, oltre quella di *Moll impressa in Vienna nel* 1803, 4.to. L'anno successivo (1830) io affidava all'allora studente in medicina sig. Giuseppe Meneghini di Padova l' incarico di trascegliere i fossili più minuti e di distribuirli in appositi caltini a seconda delle differenze che ammettevano fra di loro, la quale operazione fu da lui eseguita con tanta maestria, e con tanto amore ed intelligenza che fin d'allora io presagiva i grandi progressi che fece dappoi ne' diversi rami della storia naturale.

(2) Questa fillite figurò sempre fra le eocene di Brongniart non già tra le piante *miocene*, come asserisce Massalongo nella sua enumerazione delle piante fossili miocene dell'Italia, pag. 5. Veggasi il Tom. XI Ann. des Sciences nat. pag. 325, 1849, e l'articolo *Végétaux fossiles* nel Dizionario di Orbigny, pag. 164.

diedi una circostanziata notizia sulla condizione stratigrafica de' Puli non che delle spoglie di animali ivi raccolte, e tornerò sullo stesso tema nell' opera sopra i polipai fossili del Vicentino, di cui mi onoro di porre sotto gli occhi dell' Imp. R. Istituto le tavole. In essa fò menzione anco delle rocce e fossili di S. Floriano i quali unitamente ai primi figurano adesso nel gabinetto di storia naturale dell' Università di Padova.

Con le stesse norme seguite fin quì prenderò a divisare le località del Veneto nelle quali ho creduto di scoprire la zona media del terreno terziario; se non che mancando in talun sito la soggiacente zona inferiore mi sono attenuto dietro i dettami della geognosia paleozoica alla presenza de' fossili, e in mancanza di questi ricorsi all' analogia, partendo dalla posizione stratigrafica della zona media fornita di conchiglie miocene, e posante immediatamente sulla zona eocena, per istabilire che tanto la zona fossilifera quanto quella destituita di fossili appartengono alla medesima epoca di formazione. Per esemplificare quanto dico citerò le colline di molasse poste al nord di Belluno (*Valle dell' Ardo*, *Libano*, *Tisoi*, ecc.) sulle quali non può cader dubbio circa l' età della zona cui appartengono, sia pei fossili, de'quali sono doviziosamente provvedute, sia per la glauconia che loro corre sottovia; mentre nella valle di Piss a sinistra della parocchiale di Alpago (*undici miglia all'Est di Belluno*), e nel circondario di Frégona nel Cenedese lo stesso molasse scarseggia od è privo al tutto di fossili. Simili soppressioni si potrebbero per mio avviso spiegare ammettendo la *discordanza d' isolamento*, come fu praticato dall' Orbigny quando manca or l'una or l' altra delle rocce cretacee su cui è coricato il terreno terziario, ed invece di limitare lo studio di tali lacune al solo terreno della creta si debba estenderlo anche sulle discordanze che incontriamo ne' terreni di sedimento superiore (1).

Dopo le premesse osservazioni sulla zona inferiore terziaria delle Provincie Venete, e dietro i cenni che sono per fare sulla zona media delle stesse Provincie sarà facile al geologo di professione di giudicare se alla prima di dette zone ossivero alla seconda spettino li depositi fitolitici di Salcedo e di Chiavon tante volte nominati.

Pochi staranno dubbiosi sull'epoca miocena del deposito di marne cerulescenti che vidi a Malevana nel comune di Castelnuovo (Friuli), quando si saprà che i suoi fossili hanno i loro simili fra quelli che m'ebbi in dono dal fu professore Bonelli di Torino che li trasse dalle marne del Tortonese (2), deposito ch'io riferiva negli anni addietro alla zona pliocena, perciò appunto che il march. Pareto ed il cav. Collegno riportarono essi stessi al pliocene le marne analoghe del Piemonte, e che ora per consenso di Savi, di A. Sismonda, di Adolfo Brongniart, e di altri valenti naturalisti si risguardano come miocene (Sismonda *Antologia Italiana*, giugno 1847 8.°. *Ann. des sciences nat.* tom. VI 1849 pag. 325).

Le medesime marne e le stesse specie di conchiglie ho adocchiate nei contorni di Cavasso nelle pertinenze di Maniago, delle quali è necessario ch'io faccia particolare menzione

(1) Orbigny, Cours élémentaire de Paléontologie et de Géologie pag. 719, 8.° Paris 1852.

(2) Annestai questi fossili tortonesi alla collezione di conchiglie fossili subapennine di cui ho arricchito il Gabinetto di storia naturale dell'Imp. R. Università correndo l'anno 1830, ciascuno de' quali porta seco un'etichetta scritta di pugno del donatore. Io continuerei tuttavia nell'errore di credere plioceni i fossili delle marne piemontesi, e conseguentemente quelli eziandio delle marne friulane, se la lettura della Memoria di Sismonda non mi avesse ravviato sul dritto sentiero. Sono pregati di raddrizzare questo mio errore tutti coloro che affisseranno gli occhi sulla *Memoria epistolare indiritta al cav. Salina*, impressa negli Annali di scienze naturali di Bologna per l'anno 1843.

riputandole veri equivalenti della zona miocena, e per ciò stesso meritevoli di figurare nella carta geologica delle Venete Provincie. Non posso per ora offerire osservazioni proprie intorno alle marne di due altre contrade del Friuli probabilmente riferibili allo stesso periodo di formazione, quella cioè di Travesio e quella di Fagagna ambe gremite di fossili (Zannoni, *Della marna e di alcuni altri fossili.* Venezia 1768, 4.º).

Ho detto altrove che il molasse fossilifero, tanto diffuso nella Svizzera e nel Piemonte, occupa un'estensione significante nelle valli che si aprono al nord di Belluno, da cui ho raccolto quel maggior numero di conchiglie miocene che per me si poteva, accompagnate talvolta da impronte irreconoscibili di piante bituminizzate, non che da efflorescenze di solfato doppio di magnesia e soda, che ricoprono la superficie della roccia arenacea, e del quale il collega nostro sig. Zanon ci diede un'interessante relazione. Lasciando a dritta le valli anzidette e progredendo verso il nord-ovest, si arriva in un punto (*Ponte del Gresal*) in cui il molasse si cangia in una roccia di grana finissima (1), che spiccandosi dai fianchi di un colle di glauconia a cui è appoggiata, si prolunga ai lati del torrente Gresal, e si distende nella valle di Bandola, senza perdere la sua correlazione coi depositi di molasse, benchè sia posta ad un assai più basso livello. Qui il molasse non è visibilmente sostenuto dalla glauconia, nè può per conseguenza elevarsi dal suolo se non tanto quanto il può comportare l'altezza cui d'ordinario attingono li depositi di altri paesi che gli sono contemporanei.

Se alla zona media di talun luogo del Veneto io diedi il nome di pliocena, quale ad esempio di quello del Cenedese tra Mas e Pradal, e di quelli dell'Asolano (2), ora trovo doversi considerare miocena, imperocchè nessuno di quei depositi presenta caratteri tali da poterli credere coevi alla zona subapennina superiore, la quale per le recenti osservazioni del professore sig. Doderlein di Modena, è coricata sopra sedimenti mioceni ricchi di spoglie marine. Io eccito il professore Doderlein a ripetere le sue indagini onde vieppiù assicurarsi delle circostanze del fatto ; ed intanto mi limito ad osservare, che le specie fossili delle marne asolane sono per la maggior parte miocene, non già pliocene, come piacque al chiariss. cav. Murchison di qualificarle nella Memoria inserita nel *Magazzino filosofico* del 1829, poscia nel classico suo lavoro sulla struttura generale delle Alpi, pubblicato vent'anni dopo (*Quarterly Journal* 1849, *pag.* 104) (3).

Raccogliendo impertanto le sparse fila del mio ragionamento, intorno al quale ho forse immorato più di quanto lo importava il piano di questo scritto, concluderò che la zona eocena per la sua estensione, per la natura diversa delle rocce che la compongono, per la cospicua grossezza de' suoi banchi, e per la grande elevazione cui può attingere sopra il livello del mare, differisce sostanzialmente dalla zona miocena, composta talvolta di molasse,

(1) In questa marna o molasse a grani fini, vi ho trovato reliquie di corpi marini i quali conservano ancora lo splendore perlacco, e con esso talvolta il colore (Valle di Bandola presso le Roe).

(2) Delle marne di Ceneda e di Asolo, libere più che altrove da interruzioni di rocce eruttive, parlo alla distesa in uno scritto intitolato — *Escursione sui Colli Cenedesi e Vicentini* — impresso negli Annali delle scienze naturali di Bologna, fascicolo di maggio 1844, 8.o.

(3) Fra le ventiotto specie fossili accennate nella Memoria del cav. Murchison, una sola mi parve appartenere esclusivamente alla zona pliocena ed è questa il *Pecten pleuronectes,* del quale ho raccolti più individui nel luogo detto la Cengia presso Lonigo, che poscia presentai alla Sezione di geologia del Congresso scientifico di Milano (Vedi il *Diario delle Adunanze* sotto la data 20 settembre 1844).

talvolta di strati sottili di marna, o di calcaria marnosa, interposti di straterelli di rocce sabbiose, spesso incoerenti, assai poco estese, che mai si erigono ad altezze di qualche considerazione, a meno che non sieno state depositate sopra eminenze già preesistenti, quali sono quelle che ricoprono a guisa di mantello la glauconia del Bellunese e quelle dei contorni di Ceneda.

Dopo tutto questo dirò, che la zona cui spettano le marne del collicello isolato di Salcedo, non che di Chiavon, è miocena, entro la quale non si sono mai trovate nummuliti nè altre specie marine le quali abbiano un significato più preciso delle piante e degli scheletri d'ittioliti d'acqua dolce, che sono le sole reliquie trovate finora nelle marne delle indicate località. Che se le marne di Salcedo fossero adagiate sopra una brecciola eocena, come si vorrebbe adesso far credere, ciò non toglie che sieno miocene, e sarà facile a molti vederne la ragione (1).

Per tutte le quali considerazioni io credo di poter ragionevolmente sostenere, che se mal fondato è stato il giudizio del professore Massalongo nell'attribuire al periodo eoceno le filliti che il Brongniart assegnava alla zona miocena, meno ancora si affà coll'assunto suo la condizione geognostica del terreno dal quale dichiara di averle distaccate.

(1) Dalle marne di Salcedo raccolsi, anni sono, gran copia di filliti e di avanzi ittiolitici coll'intendimento di soddisfare alle inchieste del ch. professore Ranzani, che pur voleva possedere alcuni de' fossili più speciosi delle Alpi venete. Veggo adesso con mia soddisfazione che i molti oggetti di geognosia paleozoica inviati al fu mio collega ed amico di Bologna sono stati per cura del chiarissimo professore Bianconi distribuiti nel Gabinetto di storia naturale di quella pontificia Università (Bianconi, *Discorso per l'apertura del nuovo Museo di storia naturale di Bologna* 1853, 8.vo).

ANNOTAZIONI.

(1) È certa cosa, dice La Bêche, che se i caratteri mineralogici e geognostici delle Alpi Lombarde sono stati svisati dall'opera degli agenti sotterranei, e dei sollevamenti che ne furono la conseguenza, anche la presenza dei fossili organici può indurre nell'inganno, stante la mescolanza tante volte avverata di specie riferibili a rocce di più formazioni, la quale si oppone al riconoscimento dei limiti inferiori e superiori dei terreni sedimentarii. (*Manuel géol.*, 2.e *édition* p. 399). Questa verità fu combattuta da un naturalista italiano sul riflesso come egli asserisce, *che tutti i Geologi dell'era nostra negano l'esistenza di anomalie, ed hanno invece stanziato, che i fossili di una singola formazione mai possono ripetersi nelle formazioni che le sono più o meno contigue.* Per dimostrare quanto sia prematura sì fatta asserzione, basta dare un'occhiata alla storia delle osservazioni paleontologiche fatte in questi ultimi tempi, da cui ognuno può apprendere che la *mescolanza* di fossili antichi coi fossili di moderne formazioni è un fatto che non ammette controversie, non solamente per gli avanzi organici animali, ma eziandio per le piante. Le rocce del periodo Permiano contengono flore differenti o riferibili a diverse formazioni (*Institut.*, octobr. 1849, 4.o) e la flora del Keuper è così altra dalla flora del *grés bigarré* da non presentare nessuna analogia paleontologica con le zone del terreno del trias, cui è stato associato (ivi). Anomalie di simil genere noi avremo occasione di citarne parecchie in questa stessa Memoria.

(2) È questo il caso dell'*Ammonites fascicularis* di Orbigny, e di poche altre specie cretacee, che trovai racchiuse in quella parte della calcaria ammonitica rossa, che ora propongo di distinguere col nome di Calcaria epiolitica superiore. Anche Baylle assicura che l'*Am. heterophyllus* può esistere nel Lias, nell'Oxfordino, nel Neocomiano e nel Gault, benchè alcuni degl'individui di detta specie abbiano ricevuto nomi diversi (*Am. Thetys*, *Am. Velledae*, ecc.) e che l'*Am. infundibulum*, e *triplicatus* offrono le stesse anomalie di stazione, trovandosi entrambi dentro rocce spettanti a diverse formazioni (*Bull. de la Société géol.*, 5 mars 1849).

(3) Le ragioni principali che vietano di unire la calcaria dell'Alpago alla creta cloritica, e che fanno conoscere ad un tempo di quanti errori sia fonte il conchiudere per via di analogia, sono in parte pubblicate nella mia epistola al sig. Villa di Milano (Padova 1843) ed in parte nella Geognosia Paleozoica delle Alpi Venete impressa nel volume XXIV degli Atti della Società Italiana delle scienze residente in Modena, 4.o 1846. E qui non istà il tut-

to; nella mia operetta sulle Caverne, inserita nel II volume delle Memorie dell'Istituto Veneto dichiarai « che le rocce ippuritiche dell'Italia spettano alla parte inferiore del sistema cretaceo, non già alla parte più alta come si vede in altri paesi. » Quest'anomalia non toglie però ai caratteri paleontologici quell'importanza che loro venne attribuita, purchè si voglia ammettere che il mare abbia deposto in una medesima epoca geologica, e sopra fondi posti a livelli geognostici differenti, le stesse specie di animali. Chi ha voluto generalizzare il principio, che in qualunque parte dell'Europa la formazione della creta contiene le stesse specie di petrefatti, non avea certo in suffragio tutti gli elementi che pur sono necessarii per sostenerlo con plausibile riuscita. Egli è un fatto che nel Friuli (M. Medea), nel Bellunese (Alpago), nel Trivigiano (Monfenera), nella Dalmazia (Simoskoi, Cargolo), e forse anche nella Lombardia (Masuaga) le faune omonime del sistema cretaceo non istanno in armonia colle faune fossili divisate dal d'Orbigny nel sistema cretaceo della Francia, ma occupano un orizzonte geognostico diverso. Non ancora il d'Orbigny pubblicò nell'interessante sua opera le osservazioni per lui fatte sopra le Rudiste (*), ma ne' cenni da esso consegnati nel Bullettino della Società geologica di Parigi egli asserisce che nella Francia, nell'Italia ed in altri molti paesi la parte superiore della formazione cretacea racchiude tutte le zone entro cui sono comprese le Rudiste (*Bull. de la Soc. géol.* Janv. 1842). Niuno al certo vorrà contraddire che nella Francia la posizione delle Rudiste non sia quale l'ha verificata il cel. d'Orbigny; ma nell'Italia e particolarmente nelle Alpi Venete le specie degl'Ippuriti e delle Sferuliti esistono copiose in una roccia, ch'è un vero rappresentante della calcaria neocomiana degli odierni geologisti, e ciò conduce ragionevolmente a supporre che nell'epoca, in cui il mare conduceva a compimento il terreno cretaceo della Francia, quello delle Alpi Venete era appena cominciato. « Non essendo questo il luogo di divisare per filo e per segno tutte le osservazioni che ho fatte ne'luoghi più sopra citati, sto contento infrattanto a quelle già riferite sull'Alpago, da cui ognuno può apprendere, che le rocce con rudiste, quantunque parallele alla calcaria neocomiana della Francia, contengono la stessa fauna fossile, che d'Orbigny annunziò come caratteristica delle zone più culminanti del terreno cretaceo; lo che dimostra, come ho detto, il sincronismo di due rocce calcaree geognosticamente dissimili. » (*Su le Caverne delle Alpi Venete.* Memoria del Prof. T. A. Catullo, pag. 16).

(4) Nelle Alpi Lombardo-Venete i fossili indicati dal barone de Buch esistono sempre incorporati nella calcaria rossa superiore, e mai nella calcaria inferiore, ad eccezione degli Aptici, che compariscono non solamente in quest'ultima roccia, ma ben anche negli strati più alti dell'era neocomiana, che che ne dica in contrario il sig. Coquand.

(5) Gl'Inocerami, posti da un celebre paleontologo entro i limiti della formazione cretacea, possono figurare non solamente tra i fossili del Jura, ma ben anche fra le specie dell'era triasica. L'*Inoceramus amygdaloides*, che per uno sbaglio corso a Goldfuss nella citazione delle figure, io chiamai stortamente *Gervillia angusta*, ne offre l'esempio (*Prodromo di Geognosia Paleozoica delle Alpi Venete*, p. 55).

(6) Questa specie si rinviene anche nel marmo giallo di Torri nel Veronese.

(7) Non saprei decidere in questo momento se gl'individui di questa specie che ho

(*) *Queste osservazioni sono testè uscite in luce.*

trovati nella calcaria ammonitica presso la Chiusa (Lungadige) appartengano alla più antica, ovvero alla più moderna delle due rocce epiolitiche di cui si ragiona.

(8) Questa calcaria bianca al tutto priva di focaja si escava per conformarla in tubi di varia lunghezza e del diametro di mezzo piede, onde sostituirli ai tubi di larice fino adesso adoperati per condurre l'acqua delle sorgenti di Fistere a Belluno.

(9) *Si le calcaire rouge à ammonites représente en Italie le lias inférieur, on doit regarder comme dévonien ou silurien le calcaire crystallin de Carrara et de Campiglia, tandis que les schistes également crystallins qui les supportent, appartiennent au terrain cambrien.* (Bull. de la Soc. géol. 2. Série T. II. pag. 165 et suiv.)

(10) Questa specie, ch'è assai frequente nella calcaria epiolitica superiore, ebbi a trovarla una sol volta nella calcaria epiolitica inferiore di *Campo rotondo* posto sul confine del territorio Feltrino; lo che farebbe eccezione alla regola che abbiamo ammessa come principio generale circa il divario che v'ha tra le specie di Ammoniti incluse in dette calcarie.

DESCRIZIONE DELLA TAVOLA I.ª

Fig: 1. a. b. c. **Ammonites turgescens** *pag. 201. Marmo rosso di Torri nel Veronese.*

Fig: 2. a. b. **Ammonites linguiferus** ? *pag. 202. Calcaria epiolitica inferiore di Malcesine e di Lazise Veronese.*

Fig: 3. a. b. c. d. e. **Ammonites Doderleinianus** *pag. 203. Calcaria epiolitica superiore di Caduna nel Vicentino e di Entratico nel Bergamasco, contenente individui dell'* **Antinomia angulata**.

Fig: 4. a. b. **Ammonites perarmatus** *pag. 204. Calcaria epiolitica inferiore di Salazzaro nel Veronese*

1.c. 1.b. 1.a.

2.b.

2.a.

3.d. 3.c.

4.b. 3.e.

4.a.

3.b.

3.a.

G. Agostini dis. Aprile 1853 Pr. Lit Kier

DESCRIZIONE DELLA TAVOLA II.ª

Fig: 1. a. b. Ammonites Fontana *pag. 205. Calcaria epiolitica inferiore di Malcesine nel Veronese.*

Fig: 2. a. b. Ammonites Benianus *pag. 207. Calcaria epiolitica inferiore di Salazzaro nel Veronese.*

Fig: 3. a. b. Ammonites Albertinus *pag. 208. Calcaria epiolitica inferiore di Malcesine e di Lazise nel Veronese.*

Fig: 4. a. b. Ammonites Toblinianus *pag. 209. Calcaria epiolitica inferiore di Lavazzo nel Bellunese, e di Malcesine nel Veronese.*

1.a

1.b

2.a

2.b

3.a

4.a

4.b

3.b

G Agostini dis.

Aprile 1853

Pr. Lit. Kier.

DESCRIZIONE DELLA TAVOLA III.ª

Fig: 1. a b. Ammonites Benacensis *pag. 211. Calcaria epiolitica inferiore di Torri nel Veronese.*

Fig: 2. a. b. Ammonites exornatus *pag. 212 Calcaria epiolitica inferiore di Malcesine nel Veronese.*

Fig: 3. a. b. Ammonites Venantii *pag. 213. Calcaria epiolitica superiore di Entratico nel Bergamasco.*

Fig: 4. a. b. Ammonites contiguus *pag. 214 Calcaria epiolitica inferiore di Salazzaro nel Veronese.*

Fig: 5. a. b. Ammonites Livianus *pag. 215. Calcaria neocomiana di Monte Vignola presso Teolo nel Padovano.*

Fig: 6 a b. Ammonites pulchellus ? *pag. 216. Calcaria epiolitica superiore di Cesio maggiore nel Bellunese.*

Fig: 7. a. b. Ammonites Salina *pag. 217 Calcaria neocomiana di Monturse presso Romagnano nel Veronese.*

Fig. 1. a b

Fig. 2. a b

Fig. 3. a b

Fig. 4. a b

Fig. 5. a b

Fig. 6

Fig. 7. a b

G. Prosdocimi dis.

Pr. Lit. Kier

DESCRIZIONE DELLA TAVOLA IVª

Fig: 1. Ammonites quinquecostatus *pag. 218. Calcaria oolitica inferiore di Malcesine nel Veronese.*

Fig: 2. a. b. Ammonites emaciatus *pag. 219. Calcaria oolitica superiore di Cesio tra Feltre e Belluno*

Fig: 3. a. b. Ammonites Zignii *pag. 220. Calcaria oolitica di Torri e di Malcesine nel Veronese.*

Fig: 4. a. b. c. Ammonites Capitanei *pag. 222. Calcaria oolitica superiore di Entratico nel Bergamasco*

Fig: 5. a. b. Ammonites nodulosus *pag. 223. Calcaria neocomiana del Veronese, e del Padovano.*

Tav. IV

Fig. 1.

Fig. 2.

a

b

Fig. 3.

a

b

Fig. 4

a

b

Fig. 5.

a

b

c

c

Agostini dis.

Venezia pr. lit. Kier

SUNTO

DI ALCUNE OSSERVAZIONI[1] ANATOMICHE

SULL' INTIMA STRUTTURA

DELLA CUTE DE' PESCI COMPARATIVAMENTE CONSIDERATA

E SULLE CAUSE FISIOLOGICHE E FISICO-CHIMICHE

DELLA LORO COLORAZIONE E DECOLORAZIONE

DEL M. E. DOTT. GIO. DOMENICO NARDO.

Passarono ormai diecisette anni, dacchè pubblicava le prime mie idee sull' intima struttura della cute de' pesci. Quelle idee però, che successivamente io confermava in varie Memorie ittiologiche (2), pare non sieno venute a

(1) Tali osservazioni, lette nella seduta del dì 24 giugno 1844 e rimaste inedite per nove anni, dovrebbero essere presentemente ampliate e rischiarate in alcuni punti con osservazioni posteriori. A tanto supplirò con altra Memoria.

(2) Ciò fu in una Nota aggiunta alla descrizione della cute del mio Prottostego (*Luvarus*, Raffinesque) stampata in Padova l'anno 1827, ed in un estratto della Memoria anatomica risguardante questo pesce singolarissimo, inserita nel *Poligrafo*, mese di marzo 1831. Tornai su tale argomento nella mia Memoria *de Skeponopodo* (*Tetrapturus*, Raffinesque), letta all'Assemblea dei Naturalisti tedeschi tenutasi in Vienna in settembre del 1832, e pubblicata nell'Isis 1833, fasc. VII, pag. 418, indi nelle mie Considerazioni sulla famiglia dei pesci Mola, e sui caratteri che la distinguono, e nelle Nuove osservazioni sul sistema cutaneo del Prottostego, Memorie entrambi lette alla prima Assemblea degli Scienziati Italiani, e pubblicate negli *Annali di fisica* del Fusinieri Bim. III, IV, V, VI, 1840. Dettagliato compendio de' miei lavori

cognizione di que' pochi i quali parlarono dopo di me sul sistema cutaneo di quegli animali.

Mi è mestieri pertanto ripetere anche presentemente ciò che rispetto all'imperfezione delle Opere anche più moderne su tale argomento, io asseriva dinanzi alla seconda Assemblea degli Scienziati Italiani.

Vediamo infatti Blainville, Cuvier, Valencienne, Mekel, Carus ed altri ritenere per analogia, esser la cute de'pesci composta, come negli altri vertebrati, di derma, di reticolo malpighiano e di epidermide; e se taluno ravvisò esser questa cute di una struttura più complicata di quello sia nelle altre classi, ciò dedusse non dall'osservazione dell'intima sua contestura, e dalla disposizione e composizione elementare degli strati che in essa distinguonsi, ma dalla forma e disposizione delle sue appendici, o di altri suoi prodotti, quali sono le squamme, i tubercoli, gli aculei, ecc.

Per la qual cosa i tipi finora offerti onde mostrarne la differenza nei varii gruppi, si distinguono dall'essere la cute viscosa, nuda, liscia, squammosa, squammoso-ossea, ossea semplicemente, e rude. Poche altre differenze si notano relative alla sua colorazione, secondo le diverse regioni del corpo e le varie epoche della vita, ed all'influenza che esercita nel variare lo stato della pelle, il luogo d'abitazione od altro. Non riscontrandosi poi sempre la dovuta esattezza nell'applicazione degli esempj relativi ai tipi indicati, è d'uopo conchiudere, che assai poco profondamente si occuparono gli autori di questo studio e che resta quindi ancora molto a desiderarsi.

Dispareri vi hanno infatti fra gli anatomici sulla natura e struttura degli strati componenti la cute de'pesci. Il Blainville asserisce, che l'epidermide propriamente detta è assai sottile e forse nulla ne' pesci, e poi chiama erroneamente con tal nome il derma degli *sgombri* e di altri pesci, il quale, per essere trasparente, lascia vedere l'indumento argentino sottoposto. Il Carus crede che consista nello stesso reticolo mucoso consolidato alla superficie e coperto da uno strato di muco albuminoso.

inediti su tale argomento leggeva al secondo Congresso italiano, tenutosi in Torino l'anno 1840, e pubblicavasi per estratto negli Atti. In seguito entrava in speciali dettagli sulla struttura della cute dei *Xiphias*, in un lavoro letto all'Assemblea degli scienziati in Firenze nel 1841; quindi al Congresso di Padova nel 1842, accennava le differenze essenziali esistenti fra il sistema cutaneo delle famiglie dei Syngnatidi e degli Hippocampidi, de' Balistidi e degli Ostraciontidi.

Breschet (*Nouvelles Recherches sur la structure de la peau*, pag. 82) si limita ad asserire in generale, e senza esattezza, ciò che appena parzialmente potrebbe dirsi, cioè che il tessuto epidermico de' pesci è molle e come polposo, nato dalla base delle squamme, che copre alla metà della loro estensione; aggiunge che è seminato di punti neri e dipinti di colori assai varj, e che l'acqua in cui viene agitato copresi ben tosto di pagliette brillanti, le quali sono le squamme colorate che si distaccano! Vi ha finalmente qualche autore che ritiene non trovarsi epidermide ne' pesci, e far le funzioni di essa quella viscida mucosità della quale veggonsi inverniciati.

Anche il tessuto mucoso, ossia il muco malpighiano, come lo chiama taluno, o reticolo vascolare, come altri lo appella, viene dagli autori differentemente considerato nei pesci. Il Carus dice esser sovente il reticolo mucoso, la sede di colori assai vivi; il Blainville invece sembra volerlo distinguere dal pigmento, il quale, a suo dire, sarebbe un deposito di materia colorante fatta alla superficie del tessuto vascolare medesimo. Tanto Blainville poi, come Cuvier e Valencienne confondono la secrezione colorante o pigmentosa coll' argentina, la quale, come vedremo in seguito, è per diversità di caratteri affatto distinta.

Per quello che riguarda il derma, convengono tutti gli autori esser d' ordinario, molto aderente alla massa muscolare, e così sottile (Carus) da non potersi in generale distaccare che a brani. Nei pesci, scrive anche il Breschet, l. c., il derma è sottile ed unito, assai aderente ai muscoli, e non si eleva in coni inclinati come nei serpenti; il tessuto epidermico disegna in qualche specie i contorni di un parallelogrammo o di un cubo, da dove sortono le squamme propriamente dette ed il muco colorato. Il Blainville lo giudica più mucoso e gelatinoso che fibroso, e di un tessuto poco compatto (*serré*), mentre altri asseriscono essere assai tenace, specialmente negli *squali*, nelle *razze* e negli *storioni*. Alle suesposte riduconsi adunque, per quanto io sappia, le cognizioni che si hanno finora relativamente alla disposizione ed alla natura degli strati costituenti il sistema cutaneo de' pesci. Che siano esse conformi ad una osservazione veritiera ed accuratamente estesa a sufficiente numero di specie, potrà dedursi da quanto in seguito sarò per esporre.

Se parlar vogliamo di quelle parti del sistema cutaneo de' pesci, le quali, perchè possono mancare, si considerano come accessorie, vale a dire tutte quelle che costituiscono il dermoscheletro, secondo Carus, queste ven-

nero meglio studiate dall' Heusinger (1), dal Kuntzmann (2), dall'Agassiz (3), dal Mandl (4) e dal Peters (5), e sono preziosissime le osservazioni di quegli illustri scrittori, benchè non molto estese, a dir vero, quanto ai rapporti delle parti indicate colla cute propriamente detta. (6)

Ma io non m' intrattenirò, più di quanto feci nella parte critica, degli studi fatti finora sulla struttura del sistema cutaneo dei pesci. Ne riservo la più dettagliata trattazione per quel più esteso lavoro, promesso da circa diciotto anni, il quale non vide ancora la pubblica luce, poichè, versando sopra argomento assai laborioso e difficile, specialmente nell' attuale progresso dell' anatomica microscopia, stimai meglio correggere il manoscritto di esso, di quello sia rettificar lo stampato, e poichè dovea credere che dietro i cenni da

(1) *Histologie* Vol. 1. Eisenach 1822.

(2) *Verhandlung der Gesellschaft naturforschender Freunde in Berlin.* Berlino 1824, pag. 269 ; 1829 pag. 369.

(3) *Recherches sur les poissons fossiles,* 2 livr. Neuchatel 1834 Vol. I, pag. 26 e seg.

(4) *Sur les écailles des Poissons.* Annal des Scienc. nat. 2 serie V. II. p. 337, 1839.

(5) Müller, *Archiv für Anatomie* etc. Jahrg. 1841 p. CCIX.

(6) In conseguenza delle osservazioni del Mandl e di quelle del Peters, ampliò l'Agassiz e modificò in molte parti il proprio lavoro sulla dermatologia ed in particolare sulle squamme dei pesci, sicchè quanto sostituì nel 1843 al suo scritto del 1834 è molto più conforme alla verità.

Abbenchè però un tale lavoro non stia sempre in relazione di quelle viste anatomiche sulla intima struttura della cute e delle appendici cutanee de' pesci, che io credo le più proprie a meglio indicare la vera dermogenesi di questi animali ed a spiegare i singolari fenomeni che l'accompagnano in alcune specie, tuttavia le osservazioni dell'Agassiz devono stimarsi preziosissime, specialmente per quanto riguarda la struttura intima e la svariata conformazione e disposizione delle squamme. Peccato che non abbia potuto estendere le proprie osservazioni anatomiche sulla struttura della cute dei pesci oltre alla famiglia dei Salmonidi. Egli sarebbe senza dubbio arrivato alle mie medesime conclusioni, giacchè quanto scrive sulla cute del *Caregonus Pelaea* è quasi affatto conforme alla verità, avendo riconosciuti in essa, come io aveva fatto in molte altre famiglie, oltre al derma, due strati, l'uno superiore e l'altro inferiore, i quali corrispondono agli indumenti da me distinti fino dall' anno 1827 col nome di esterno ed interno, ossia epidermico ed ipodermico.

L'analisi completa dei lavori del sig. Agassiz, messi di confronto colle mie osservazioni, formerà un capitolo speciale della mia opera. Quando scrissi il presente sunto di essa non potevano ancora essermi giunte a notizia le ultime conclusioni di così stimabile autore, poichè pubblicate quasi contemporaneamente. Mi è di sommo conforto veder finalmente che altri pure, benchè non a cognizione de' miei lavori, siasi posto a mietere in campo così ubertoso, e specialmente chi è al caso di farlo con vero profitto della scienza.

me pubblicati, qualche diligente osservatore sarebbe stato per giovarmi coll'esame di quelle moltissime specie, le quali non avea potuto sottomettere ad anatomica indagine perchè appartenenti a mari stranieri. L'oggetto quindi pel quale ora di nuovo faccio sommariamente conoscere le deduzioni più generali de' miei studj sul sistema cutaneo de'pesci comparativamente considerato, è per interessare gli anatomici a rivolgere lo sguardo loro anche su questa importantissima parte di zootomia.

I.

La cute esterna de'pesci è composta di derma, il quale deve considerarsi la trama e la base di tutte le altre parti essenziali di essa, e di due indumenti (1), uno esterno, che chiamo epidermico, e l'altro interno, cioè situato fra

(1) Per consenso di tutti gli autori il derma è sempre immediatamente sovrapposto alla tonaca muscolare. Al di sopra del derma, come è noto, si ammettono in generale tre strati, cioè la membranella intermedia, sede del pigmento, il così detto reticolo malpighiano e l'epidermide propriamente detta.

Alcuni autori, come Cruihshank, Gualtier, Dutrochet, Wendt, Breschet, Valentin, Henle, ecc. emisero diverse opinioni su tal argomento; nessuno per altro parlò mai di alcuno strato sottoposto al derma e paragonabile a quelli che gli sono sovrapposti; egli è per ciò che ho preferito dare il nome d'indumenti agli strati epidermico ed ipodermico da me distinti nella cute de' pesci, non avendo d'altronde potuto ancora rinvenire in questi animali uno strato cutaneo analogo in uffizio e simile in contestura al reticolo malpighiano propriamente detto ed alla membranella mucosa ad esso contigua, ch'è la sede del pigmento in alcune specie di vertebrati.

Se, secondo il pensamento di alcuni, dovesse considerarsi come epidermide l'intonaco mucoso albuminoso che riveste l'indumento epidermico dell'anguilla e di altri pesci, un tale indumento rappresenterebbe il così detto reticolo o muco malpighiano, e ciò corrisponderebbe al fatto trovarsi esso sempre imbevuto di sostanza pigmentosa. Siccome poi il reticolo malpighiano non esprime che il primo anello di transizione della materia mucoso-cornea alla forma solida, avressimo nel caso nostro un'operazione inversa, cioè il reticolo malpighiano da uno stato concreto passerebbe ad uno stato più molle e fluente, locchè forse verrebbe spiegato da alcuno, dal trovarsi la superficie del corpo de' pesci al contatto d'un fluido acqueo invecchè aeriforme. Dovrebbe meglio provarsi d'altronde, che sì nell'uno come nell'altro di tali tessuti ne sia eguale, come pure apparisce al microscopio, l'intima tessitura, cioè consista in una aggregazione di corpuscoli liberi ovvero contenuti in cellule piane di varia forma, disgiunte o talvolta disposte l'una dietro l'altra in modo da formare dei filamenti, e che il solo grado di coerenza fra le cellule ed i corpicciuoli esistente costituisca la loro distinzione.

la superficie interna del derma e la massa muscolare, che dico ipodermico, i quali coprono le due superficie del derma stesso. L'indumento interno talvolta manca, o non è apparente, l'esterno invece osservasi quasi sempre. Hanno poi origine in questo organo produzioni di cornea o di ossea natura, differenti di forma, grandezza e modo di collocazione, per cui l'apparenza di esso in questi animali mostrasi molto variabile e soggetta ad anomalie, le quali hanno pochissimo rapporto colle nostre abituali osservazioni sul cutaneo sistema.

La cute de' pesci s'introflette non solo per la bocca e per l'ano, come negli altri animali modificata nella sua struttura, ma anche per l'apertura delle branchie, convertendosi in quelle membrane che investono le cavità branchiale, toracica ed addominale. Meno perde in tal caso della propria struttura, e tanto più s'approssima alla cute esterna, quanto è più vicina al punto d'introflessione. Essa si estende anche a formare la membrana inter-radiale delle pinne dei pesci e di altre appendici del loro corpo, delle quali parleremo altrove (1). Ciò avviene dal prolungamento del derma attenuato dei due lati del pesce, fattosi insieme aderente. In alcune specie è talmente modificato da apparire una sola membrana sottile, come p. e. in alcune specie di *sgombri*, mentre in altre, come nelle *sogliole*, tale modificazione è minore, e manifesta se ne vede l'origine, facilmente separandosi i due strati cutanei che la compongono. Al derma di tali appendici mancano sovente gl' indumenti, od è molto difficile il riconoscerli; in buon numero di casi però, vedesi non solo provveduto di essi, ma anche di pigmenti (2) e di squamme. In alcune specie che hanno l'indumento argentino situato fra la superficie interna del derma e la

Manchiamo di osservazioni comparative, micrografiche e chimiche sul muco fornito dalle differenti specie de' pesci e sui suoi rapporti cogl' indumenti e colle secrezioni pigmentose di essi. Molto gioverebbe alla scienza chi imprendesse a trattare coll'accuratezza dovuta un così importante argomento.

(1) Tali appendici cutanee diconsi dal Blainville *Lophioderme*. Vedasi intanto ciò che scrisse su di esse tal autore. *Principes d' Anat. comp.* V. I, pag. 158 e seg.

(2) Gli autori chiamano pigmento negli animali vertebrati quello strato della membranella malpighiana che risguardano come causa del colorito della cute specialmente nei negri, e dicono pigmento argentino quella sostanza di natura ben diversa che, come abbiam detto, costituisce ora l'interno ed ora l'esterno indumento della cute de' pesci. Noi usiamo invece la voce pigmento per indicare il prodotto di quella secrezione dermica, il quale esteso sopra uno o più punti degli indumenti accennati, modifica la loro esterna apparenza in colorito diverso più o meno permanente, secondo è desso libero o fisso.

massa muscolare, come p. e. nella *Dorata* (*Chrisophrys aurata*, C.) è mirabile vedere nei siti sassosi del mare ed all'epoca della frega, talmente abbondante la sostanza argentea, costituente l'interno indumento, da protrarsi fra le due lamine che formano la membrana inter-radiale della pinna, quasi fino all'apice dei raggi, dando al pesce la più splendida venustà.

II.

Consiste il derma in una tela cellulare fibrosa, più o meno grossa e densa, secondo le specie, l'età dell'individuo e le varie parti del corpo che copre, le cui fibre inviluppano e proteggono vasi capillari sanguigni e linfatici, ed in qualche sito alcuni nervi sottilissimi, nonchè il parenchima d'organi particolari che forniscono i pigmenti, il muco e gli altri materiali, ossia le cellule elementari, dalla cui varia proporzione, mistione, fusione e metamorfosi, risultano gl'indumenti e le loro differenze, ed hanno origine quelle altre produzioni cutanee che riguardansi come accessorie, quali sono le squamme, gli scudi, i tubercoli, gli aculei ed i denti.

Tali fibre sono diversamente intrecciate secondo che le specie sono provviste o mancano degli accennati prodotti, ed a seconda della forma e disposizione loro. Ne' pesci squammosi vedonsi d'ordinario disposte a parallelogrammo ed a rombo, e se le squamme sono embricate, formano prolungandosi ed espandendosi in sottile membrana alla superficie del derma, alcune borse, in ciascuna delle quali è contenuta una squamma. Le membranelle costituenti tali borse inguainano le squamme e le investono fino alla loro estremità, prestando loro materiali di accrescimento. La membranella superiore, che può dirsi episquammica, sovente così sottile da non potersi disgiungere dall'indumento epidermico, distinguesi per lo più da'suoi minutissimi punteggiamenti di oscuro colore, ed è per ordinario più aderente dell'inferiore od iposquammica, che più di frequente apparisce di colore perlaceo, abbondando in essa la sostanza argentina. Entrambe contribuiscono alla formazione della squamma stessa in modo speciale, che altrove spiegheremo, considerandone la genesi nelle varie epoche della vita, e bilanciando le osservazioni nostre con quelle dell'Agassiz, del Mandl e del Peters (V. art. IV).

La superiore membranella imprime que'solchi e quei varii modi di scannellature che osservansi d'ordinario nella superior superficie delle squamme,

mentre la inferiore non produce solchi, e viene spalmata di argentino indumento la superficie inferiore della squamma medesima. Così contribuiscono tali due membranelle, oltrechè alla nutrizione delle squamme, ad imprimere le differenze d'intima struttura che rilevansi fra i due strati inferiore e superiore che per ordinario le compongono.

È dalla membranella episquammica, modificata nella parte posteriore alla sua estremità, in surculazioni, cilii o lacinie, che hanno origine que'dentelli aculeiformi a base semplice o bifida, sovente decidui e che si riproducono, i quali osservansi in serie più o meno numerosa, nella parte terminale delle squamme di alcune specie di pesci. Tali prodotti non sono gran fatto paragonabili nel loro sviluppo e struttura ai denti, propriamente detti, ma la genesi elementare di essi è analoga a quella delle squamme, di cui devonsi considerare come appendice, cioè per aggregazione e fusione di cellule piane. In modo presso poco consimile hanno origine que' scudi appuntiti che appariscono in primavera sulle squamme di alcuna specie di pesci, tra cui va celebre il *Leuciscus Pigus* fin dai tempi di Plinio, e cadono cessata l'epoca della frega. In questa specie, come nota il de Filippi (1), sono sparsi in linee regolari lungo i lati del corpo, sui raggi maggiori delle pinne, e più riccamente sul capo. Non tutte le squamme ne sono ornate, ma alcune ne hanno due; somigliano alla conchiglia dell'*Ancylus*, acuti all'apice, larghi ed ellittici alla base, ma sul capo circolari. L'alcoole ne altera il colore e diventano bruno-ferruginei.

Il derma è ordinariamente trasparente, e deve per lo più agl'indumenti ed ai pigmenti, di cui è imbevuto, il colorito che mostra. In alcune specie però è nerastro o di un azzurro nereggiante, secondo i luoghi e l'età indipendentemente dagl'indumenti suoi.

III.

I due indumenti, benchè all'esterna apparenza presentino fra essi rimarchevoli differenze, pure, avuto riguardo alla loro contestura elementare, devono riguardarsi come prodotto di un'identica formazione primitiva, dipendendo tali differenze da particolare metamorfosi o modificazione della secrezione cistoblastica o cellulare primordiale, per cui ora vedesi una sostanza indumentale mu-

(1) Pesci d'acqua dolce della Lombardia.

cosa-cornea più o meno trasparente, ed ora una sostanza semi-opaca, biancolattea, perlacea, ovvero argentina. La prima di tali sostanze forma più di frequente l'indumento epidermico, la seconda l'ipodermico, e questa più spesso dell'altra si presenta all'esterna superficie cutanea de' pesci quasi identica affatto a quelle in cui si muta quando costituisce, come avviene nel maggior numero di specie, l'interno indumento. La contestura di tali indumenti, osservata allo stato di disseccamento, qualunque ne sia la differenza, apparisce, sotto un ingrandimento di 600 a 900 diametri, un aggregato di minimi corpicciuoli trasparenti a margine oscuro, più o meno brevi, ma prolungantisi alcuni talvolta in sottilissimi filamenti, uniti fra loro in fascicoli e stipati in sottile membranella.

Osservando invece tanto l'indumento ipodermico quanto l'epidermico di modificazione argentina, allo stato di freschezza, disciolto nell'acqua, nell'ammoniaca, o nell'acido acetico, osservansi minimi frammenti di laminette sottilissime, trasparenti, di forma svariata, talvolta bacillare, non mai però propriamente cristallina, benchè presentante non di rado una qualche regolarità, che può credersi accidentale. Pure il Reaumur, l'Heusinger, l'Erhenberg ed il Mandl chiamano cristalli questi frammenti; non combinano però fra loro le forme accennate da questi scrittori.

Talvolta appariscono tali laminette formate dell'unione di sottili fibre fra esse congiunte, le quali possono dividersi le une dalle altre; ciò osservasi esaminando la sostanza argentina componente la vescica natatoria dell'*Argentina Sphyraena*.

Lo splendore di tale sostanza di natura cornea, che resiste senza alterarsi fino a certo punto all'ebullizione, agli alcali, agli acidi deboli e così pure alla putrefazione, come notò Reaumur e l'esperienza conferma (1), sembra esser fenomeno ottico proprio di certe sottilissime laminette, fibrose, trasparenti, sovrapposte, analogo a quanto osservasi nella mica argentina, nel solfato di calce argentino, nelle sottili laminette argentine che staccansi dalla super-

(1) Non solo ne' pesci osservammo tale modificazione indumentale dermica, ma benanche in una donna da noi curata per malattia cutanea, la quale presentava in più punti della superficie del corpo una sfogliazione epidermica in sottili lamine sovrapposte, più o meno estese, di splendore argentino prossimo a quello de' pesci. La storia di tal malattia, da me comunicata al dott. M. Asson, venne pubblicata nelle Annotazioni chirurgiche del medesimo. Venezia 1842, Vol. I. pag. 58.

ficie di alcuni vetri rimasti a lungo sotterra, nelle laminette madreperlacee dei testacei, ecc. (1), le quali tutte guardate col microscopio presentano contestura presso a poco simile a quella da me osservata nella sostanza argentina de' pesci. È probabile che la composizione delle lamine della sostanza argentina de' pesci risulti dall' unione di fibre longitudinali, locchè può giudicarsi dall' effetto ottico delle lamine stesse sottoposte alla luce polarizzata; que' bastoncelli però parallelamente disposti che si vedono al microscopio non polarizzante, sembrerebbe fossero piuttosto indizj del senso della sfaldatura (*clivage*) delle lamine. Il solfato di calce presenta una simile apparenza. Tal è l' opinione del chiariss. cav. Amici, da me consultato in proposito.

Quando l' indumento non è argentino, mostrasi egli allora allo stato di freschezza, sotto il microscopio, invecechè laminare, composto di minimi corpicciuoli granulari misti a qualche filamento proprio o staccatosi forse dal derma, a cui aderiva. Questi corpicciuoli sono di forma e grandezza pressochè eguale, più aderenti fra loro e formanti una membranella maggiormente stipata e più resistente all' attrito, di quello sia quando la sostanza è intieramente argentina. Può dirsi quindi, le due forme primordiali, corneo-granulare e corneo-fibrosa laminare, venir rappresentate dalle due forme d' indumento accennate, cioè mucoso-cornea trasparente, ed opaca argentina, e segnar questa ultima lo stato di passaggio alla forma squammica propriamente detta; godere inoltre gl' indumenti vitalità speciale in dipendenza del derma, e poter essi passare dall'una all'altra forma per l' assorbimento delle vecchie cellule, e per la sostituzione di nuove altrimenti modificate.

Gl' indumenti fanno le veci di muco malpighiano, rapporto alla colorazione, servendo essi di base a varj pigmenti, i quali vi aderiscono o liberi o fissi, dando origine a' colori variatissimi e brillanti unitamente ad altre cause che in seguito saranno notate. Nella cute investiente la cavità del torace e dell'abdome esiste quasi sempre ed è abbondevole in alcune specie l' interno indu-

(1) Il ch. Mandl scrive al contrario, riferendo l'asserzione di Reaumur; cioè non essere stata confermata dalle proprie ricerche una tale osservazione. Io non posso sottoscrivere a tale sentenza, convenendo invece col Reaumur, provenire dalle altre parti animali, aderenti alla sostanza argentea, i fenomeni di putrefazione che essa presenta nella calda stagione. Privata una volta delle sostanze putrescibili, può conservarsi senza alterazione nell'acqua semplice, per tempo assai lungo, come è proprio dei capelli e di altre sostanze di cornea natura.

mento perlaceo argentino, e quasi manca l' esterno, ed è così sottile da non potersi riconoscere che assai difficilmente. Talvolta, benchè di rado, sembra il derma mancante di entrambi gl' indumenti, od averli in quantità così scarsa da mostrarsi diafano o pellucido. In tal caso lascia trasparire attraverso di esso le parti sottoposte, cioè i muscoli, come osservasi negli *Ofidii*, nella *Cepola rubescens*, ed in molti altri pesci. Questo avviene, se prevale negl' indumenti la modificazione mucoso-cornea, e vedesi invece al contrario, quando la modificazione sia di preferenza argentina, ovvero quando l'indumento mucoso-corneo sia imbevuto di qualche opaco pigmento. L' aderenza della cute de' pesci alla massa muscolare è discreta e poco variabile, quando il derma è provveduto d' interno indumento; mostrasi invece variabilissima in quelle specie che mancano di esso. Alcuni *cani marini* ed alcune *razze* hanno il derma molto aderente al sistema muscolare, mediante fibre tendinose stipate, mentre nella *torpedine*, nel *lofio* o *pesce rospo*, ed in altri l' aderenza è assai lieve, facendosi mediante cellulare. Alcune specie hanno muscoli cutanei proprj.

L' indumento esterno, che fa le veci di epidermide, è talvolta così sottile che sembra mancante; in altri casi invece è grossissimo, ed, abbenchè più di rado, apparisce diviso in due lamine facilmente staccantisi, come nel *prottostego*, l' interna delle quali è argentina ed assai sottile, l' esterna più grossa mucoso-cornea e trasparente. In qualche altro caso, come nel *tonno*, è pure composto, benchè non in tutte le parti del corpo, di due laminette la cui interna è mucoso-cornea, alquanto stipata, più grossa, trasparente, mentre la laminetta esterna è come vernice argentina, non mai staccantesi intiera, ma solo mediante raschiatura. La superficie dell' indumento esterno è per ordinario semplice, liscia. In qualche raro caso, come nel *prottostego*, osservasi invece tutta coperta da minute produzioni per la maggior parte fungiformi, quali ebbi a meglio descriverle nella succitata Memoria, letta all'Assemblea di Pisa nel 1839.

L' aderenza dell' indumento esterno al derma, specialmente quando tal indumento sia argentino, è assai poca in alcune specie, per cui facilmente staccasi, come nei *gimnetri*, nelle *mole*, nel *lepisosteo*, e così osservasi anche in altri casi, come nel *tonno* e nel *prottostego*. Nelle *torpedini* invece, nelle *pastinache*, nell' *anguilla* ed in altri pesci mostrasi grandissima, sicchè non può staccarsi se non mediante macerazione. Benchè d' apparenza mucoso-cornea stipata nella parte superiore o dorsale, sovente l'esterno indumento si modifica nella parte opposta od inferiore, acquistando apparenza argentina.

IV.

L' indumento esterno trovasi spesso in diretto contatto colla superficie del derma, come nella *torpedine*, nel *pesce rospo* ed in altre specie; altre volte invece sta aderentissimo presso la superficie del derma uno strato di squamme, più o meno contigue e sottili, composte di cellule disposte in serie concentricamente. Questo sistema di squamme osservasi nell' anguilla, e presso a poco eguale negli *ofididi*, nei *gadidi*, nei *trachinidi* ed in altre famiglie, con differenze relative al genere, alla specie, all' età ed alla situazione del corpo, tanto rispetto alla forma, come al modo di collocazione. La cute dell' anguilla nell' età prima, ha le squamme in istato embrionale, difficilmente riconoscibili anche mediante forti ingrandimenti microscopici, e confondonsi colle cellule numerosissime di ugual forma, componenti l' esterno indumento. Quando queste cominciano a svilupparsi, discopronsi sparsi, a distanze presso a poco eguali, per la superficie cutanea, indizj di cellule ovali, minime, ma un poco maggiori, che vanno stabilendosi prima in serie semplici, p. e. di 5 o 6, indi ad ogni serie se ne aggiunge altra di eguale, e così ha cominciamento il centro di una squamma, sicchè sviluppandosi all' intorno di questo centro nuove serie successive di cellule, la squamma stessa va ingrandendo nella sua forma oblunga, dimodochè, da disgiunte che erano tali squamme, arrivano a toccarsi coi loro margini, ossia a farsi contigue. Le cellule di tali differenti serie col progredire della squamma, invece di presentare la forma ovale, diventano più o meno quadrate, ed ogni serie distinguesi nella squamma per una specie di linea longitudinale saliente. Tali squamme sono ovato-bislunghe in tutte le situazioni del corpo e presso a poco eguali. L' indumento epidermico copre per intiero e distesamente la loro superficie superiore, aderendovi con forza, come con pari forza aderiscono esse al derma colla superficie inferiore, sicchè l' epidermide, lo strato delle squamme ed il derma non possono ottenersi isolati se non dietro speciali industrie zootomiche.

Nei *gadidi*, le squamme si formano in modo analogo a quanto osservammo nell' Anguilla; esse però variano per forma, per particolari caratteri, che noteremo altrove, e per esser subembricatamente disposte e meno aderenti al derma ed all' esterno indumento, dimodochè possono più facilmente staccarsi.

Nei *trachinidi*, le sottilissime squamme di forma speciale, sono disposte ai lati del corpo in serie parallele equidistanti, rivolte obliquamente dalla testa alla coda, mentre nella regione caudale cessa la disposizione in serie oblique, e subentra la subembricata, presso a poco alla maniera ordinaria. Sembra che alla regione del ventre in alcune specie di *trachinidi*, come p. e. nell'*Uranoscopus scaber*, manchino tali squamme o trovinsi esse allo stato rudimentale.

Nei *tetrapturidi*, fra l'indumento epidermico ed il derma, vi hanno squamme lunghe, strette e lanceolate, per lo più anteriormente tricuspidi, più o meno contigue ancor esse a seconda dell' età.

In luogo delle squamme accennate vedesi talvolta uno strato di corpetti ossei congiunti a mosaico, con superficie liscia e piana, quale apparisce negli *ortragorischi*, od invece producentesi in scabrosità, come si osserva nei *Mola*.

Molto singolare ed istruttiva è relativamente a tali prodotti la struttura della cute del Tonno, e quindi meritevole di esser fatta conoscere.

Mentre infatto la cute di questo pesce mostrasi nell' età giovanile di esso, come nello *sgombro*, quasi sprovveduta di esterno indumento e di squamme, arriva, mano a mano che va crescendo, ad una metamorfosi meravigliosa e ad uno sviluppo dermoscheletrico tale, da recar molta luce sulla squammogenesi de'pesci in generale. Ai lati del di lui corpo, e maggiormente al torace producesi più solida una specie di corazza formata di grossi scudi, a guisa di squamme sovrapposte in doppia, tripla e persin quadrupla serie, in modo particolare ed intieramente connessi fra loro ed al derma, d' altronde sottile in proporzione della mole del pesce, mediante tessuto cellulare alquanto stipato e tenace. Tali scudi, de' quali parlerò altrove più estesamente, si fanno minori quanto più si allontanano dalla regione indicata. Sono essi formati da due lamine ossee, nel cui intervallo trovansi vasellini sanguigni e linfatici, anche ad occhio nudo apparenti, e midolla di color giallo. Le due lamine, fra loro perfettamente riunite ai bordi dello scudo o squamma che sia, in modo da confondersi intimamente, mostransi tanto più disgiunte quanto più si arriva al loro centro, il cui spazio, occupato come fu detto, da sostanza midollare e da vasellini, viene interrotto da produzioni della loro stessa natura, le quali irregolarmente lo congiungono nel modo stesso che osservasi nelle ossa laminari diploiche degli altri animali. Sarebbero forse tali punti d' irregolare congiunzione

delle lamine alla loro interna superficie, che osservansi tanto ad occhio nudo nel centro delle squamme assai sviluppate, quanto sotto gl'ingrandimenti microscopici, in quelle di grandezza minore, que' corpicciuoli solidi, di figura svariata, di cui fa cenno Mandl nel suo lavoro sulle squamme de'pesci?

Sopra questi scudi sta, non molto aderente, l'indumento esterno quale fu più sopra accennato. È mirabile il passaggio di tale indumento in individui giunti ad età superiore, nelle regioni ove non si estendono gli scudi sopraccennati, dalla condizione semplice ed omogenea suindicata, alla condizione squammigena. Vedesi in fatto per un grado di sopraeccitamento di tale tessuto formarsi entro le maglie di esso, ossia nello spessore di sua compattezza, alla rinfusa e senza regolarità uno al di sopra dell'altro, prodotti squammosi di varie grandezze, e decomporsi tale indumento in sottili strati inguainanti le squamme stesse, con alternativa di apparenza mucoso-cornea e mucoso-argentina, sicchè può dirsi un impasto di tali dermici prodotti, facilmente separantesi l'uno dall'altro mediante la cima d'un coltellino. In altre situazioni, come, ad esempio, nel ventre, l'indumento esterno vedesi totalmente convertito in isquamme di eguale forma e grandezza, unite quasi embricatamente ed aderenti fra loro mediante una specie di sottile membranella intersquammea, modificazione anch'essa dell'indumento medesimo. Tale crosta squammosa staccasi con molta facilità dal derma sottoposto, e fra essa ed il derma stesso vedesi altro tessuto indumentale, ora puramente biancastro, ora argentino, il quale può distaccarsi esso pure senza molta difficoltà. Eguale indumento mostrasi anche all'esterna superficie di tal crosta squammosa, quando non siasi perduto in causa di sfregamento.

Guardate con microscopio le squamme in discorso, hanno la struttura medesima degli scudi laterali sopraccennati, osservati ne' loro primordii prima di passare alla condizione ossea, e devono considerarsi come lo stato rudimentale di essi, consistendo la sola differenza nel grado maggiore di sviluppo e nell'impregnamento loro di ossea sostanza. Tali squamme, in qualche situazione del corpo del pesce, mostrano l'estremità esterna lievemente solcata per lungo in modo da simulare una specie di frangia o fimbria; in altri siti ciò maggiormente apparisce, e queste squamme si presentano veramente cigliate.

Tali fatti sembrerebbero decidere la questione sulla squammo-genesi, ossia sulla fisiologia delle squamme de'pesci, e sul loro passaggio dallo stato corneo-lamellare allo stato laminare-osseo; resterebbe soltanto a che dirsi sul

vario modo nel quale si compie un tale passaggio, assumendo tante forme svariate, che in ultima analisi non sono che metamorfosi di una forma sola, la cellulare primitiva piana, la quale con progrediente sviluppo passa dalla condizione semplice alla maggiormente composta.

Lo studio dello sviluppo geometrico di tali prodotti dermoscheletrici, comparativamente allo sviluppo del nervoscheletro, promosso dal Carus, merita di essere portato a maggior avanzamento.

In alcuni pesci squammosi a squamme smaltate, come ad esempio nel *Polittero,* l'indumento esterno mostrasi sovente, od almeno in alcune epoche della vita, quasi nullo, e la superficie esterna di tali squamme è in tal caso così scevra di esso, nei punti specialmente sporgenti, come sono scevre di epidermide le unghie degli animali.

Oltre le squamme propriamente dette, la cui intima struttura, forma, superficie e bordi, variano molto secondo la specie e la parte del corpo che occupano, abbenchè la genesi siane fondata su di un solo principio, sono appendici del sistema cutaneo anche certi scudi, o placche ossee, di varia forma e grandezza, per lo più coperte di smalto, che mostrano, guardate al microscopio, i corpuscoli ossei-radiati, e trovansi variamente situate in alcuni punti o coprono talvolta l'intiera superficie del pesce; e così pure certi tubercoli ruvidi e spinosi di forma svariata, i quali nascono fra la spessezza del derma ed hanno radice piana o tuberosa, a più lobi, od in altra maniera conformata, e colle loro parti sporgenti all'esterno rendono aspra la superficie cutanea. Tali prodotti ed altri analoghi, di cui parlerò altrove per esteso, osservansi più o meno sviluppati, in tutte le epoche della vita, o sviluppansi soltanto in tempi determinati, p. e. allo svolgersi degli organi genitali, indicando l'epoca della pubertà, come accennai avvenire in alcune specie di *Razza* (1). Talvolta cadono, terminata la frega, per poi riprodursi a nuova stagione. In alcune specie si osservano solo nella prima età, in altre nell' ultima.

Meritano particolare menzione quei prodotti cutanei che rendono in tutte le epoche della loro vita aspra al toccarsi la superficie degli *Squali.*

Alcune delle differenze di forma che in essi riscontransi possono vedersi figurate nell' opera sui *Plagiostomi* di Müller ed Henle (Berlino, 1841),

(1) Vedi l'estratto di una Memoria sulla trapiantagione dei capelli da una regione all'altra del corpo ecc., letta all'I. R. Accademia di Padova li 5 settembre 1826, pubblicato nel Giornale dell'Italiana Letteratura del co. da Rio, *C.* 1, 1828.

ed in quella dell'Agassiz intitolata *Ricerche sui Pesci fossili.* Dovendo far altrove più estesamente parola anche sopra di questi, mi limito ad accennare aver essi nutrimento presso a poco alla guisa stessa delle squamme, ed essere provveduti di canalicoli che diramansi dalla base alla loro cima. Non sono piantati con radice nel derma, ma posti sopra di esso ed aderenti al modo stesso dei corpetti ossei proprj dei *Molidi;* non vengono però come questi, coperti dall'indumento in tutta la loro estensione, ma ciascuno ha invece come una vernice di smalto superiormente, e l'indumento sta limitato alla base loro e li mantiene meglio riuniti. Protrandosi per lo più colle loro estremità verso la coda, sembrano posti embricatamente; alla cima del muso però ed in altri luoghi ove non sono appuntiti, mostransi come tanti tubercoletti rotondati; in altre specie sono a più punte; raramente hanno grande sviluppo a guisa di squamme (*Centrophorus squamosus*, M. H.). D'ordinario mantengonsi presso a poco di eguale grandezza, anche se l'individuo abbia raggiunte, per età, dimensioni smisurate. Il colorito loro non dipende da un indumento come nelle squamme degli altri pesci, che sono trasparenti e vengono dall'indumento episquammeo coperte, ma è per lo più inerente al loro tessuto medesimo. Per ordinario sono biancastri, cinerei od oscuri, e mandano talvolta uno splendore metallico plumbeo od argenteo, che forse non devesi a secrezione argentina di cui sieno vestiti, ma a riflessione di luce causata dalla loro intima struttura. L'indumento che li unisce alla lor base, ossia su cui sono piantati, è per lo più del loro stesso colore, cioè dove tale indumento è macchiato essi lo sono pure. Nell'*Echinorhinus spinosus*, Schn. l'intiera superficie, comprese le pinne, è sparsa di tubercoli isolati, bianco sudicii, duri, aguzzi, disuguali, collocati senz'ordine, con base larghetta conformata a foggia di disco, solcata a raggi, con la punta centrale eretta, dritta o curvata all'indietro. Tubercoli analoghi osservansi nella cute dell'*Anacanthus asperrimus*, M. H. e nella coda dei grandi individui del *Trigon Pastinaca*, Adans.

La cute ripiegata, che veste le pareti delle cavità branchiali, del torace e dell'addome, si modifica sempre in un tipo pressochè eguale, e perde, quanto più s'allontana dal punto di ripiegatura, i suoi prodotti dermoscheletrici. Nelle alette della maggior parte de' pesci, ed in altre esterne loro appendici dermiche, tentacolari o destinate ad altro uso, vi hanno pure particolari modificazioni a seconda delle specie e dell'età. Lo stesso dicasi relativamente

alle membrane di spettanza cutanea che vestono la cavità della bocca e delle fauci.

Sarebbe molto importante far ora conoscere comparativamente con qualche dettaglio, la condizione dei tegumenti de' pesci allo stato d'embrione; ma poche osservazioni abbiamo in proposito, e solo può dirsi, generalmente parlando, che a quest'epoca quasi nulla rilevasi di apparentemente distinto coi mezzi d'osservazione di cui siamo finora in possesso. La cute presenta una massa omogenea, trasparente, biancastra, seminata di granellazioni o punteggiamenti oscuri, simili a quelli che osservansi allo stato adulto. L'indumento argentino in alcune specie soprabbonda; i prodotti dermoscheletrici vi mancano affatto. La grossezza di tal organo è piuttosto considerevole, spezialmente in alcune regioni del corpo, in confronto dello stato adulto.

V.

Dissi più sopra servire gl' indumenti di base alle secrezioni pigmentose ed aver origine per esse una serie svariata di tinte, che possono esser modificate anche da altre cagioni. Tralasciando di esporre quanto notai nel mio lavoro, sulle cause della colorazione de' pesci, che considerai come fisiologiche, chimiche e fisiche, dalle quali hanno origine i colori primarj, secondarj e fittizj, che presentano nel loro insieme differenze tanto svariate, dirò che se la cute sia senza colore e trasparente, il pesce sembra di tinta carnea, in causa della massa muscolare sottoposta; se fra la massa muscolare ed il derma, vi abbia l' indumento argenteo, ed il derma stesso sia trasparente, la cute sembra di colore argentino; se l' indumento argentino è imbevuto di altri pigmenti, si hanno allora colori metallici svariatissimi a seconda del colorito proprio del pigmento, o di quello risultante dalla commistione di più pigmenti. Il pigmento giallo, ad esempio, produce colore d'oro; il rosso color di rame, ecc. ecc. (1)

(1) Il Reaumur è l' unico che siasi accorto (1766, Mem. citata *Sur la matière qui colore les perles fausses*, ecc.) di un tal modo di generarsi le tinte metalliche svariate, che osservansi nella cute de' pesci. Egli però attribuiva, invecechè a particolari pigmenti, allo spargersi del sangue sortito da'vasellini sulla sostanza argentea il colore d'oro, ed alla maggior o minor spessezza delle pareti de'vasellini contenenti il sangue e sovrapposti alla sostanza argentina i colori bleù e verde. Chiede poi se per avventura fosse una sostanza, simile a quella de' pesci, la materia argentina di cui vedesi coperto il corpo di una specie

Nella guisa stessa hanno origine il verde smeraldo, il color zaffiro, il rubino, il porporino, il giacinto, e tanti altri che vedonsi brillare come gemme sulla superficie cutanea de' pesci, specialmente al tempo dei loro amori, e nelle calde regioni, o per altre cause eccitanti il cutaneo sistema di questi animali. L'indumento esterno poi, sia egli argentino o mucoso-corneo, trasparente od imbevuto di pigmenti, può mostrare di preferenza particolari modificazioni nel colorito in causa dell'esser sparso, in certe situazioni, di un numero immenso di punti minutissimi, rotondi, angolari o stelleformi, per lo più nerastri o di altro oscuro colore, sovente aggruppati in macchie di varia forma. Della genesi e natura di tali punti sarà fatta altrove parola. Se l'indumento esterno sia fisso ed opaco, sono tali macchie che particolarmente ne modificano la colorazione; se invece sia trasparente macchiato, è laddove mancano le macchie, che comparisce il color sottoposto. Quando il colore di questo indumento è tale da non togliere la pellucidità, in tal caso le parti sottoposte traspariscono, e tanto il colore dell' indumento quanto quello di tali parti si modificano reciprocamente. Anche le squamme a seconda della loro forma, grossezza e trasparenza modificano i colori degl' indumenti. Fanno esse talvolta l'uffizio di lenti o di prisma, per cui davanti la luce compariscono mille colori fittizj.

Alcuni tubercoli, detti da altri *punti gemmati*, riflettono in qualche specie dalla lor superficie, come specchio, un colore argentino assai vivo, od altro d'interferenza, ornando mirabilmente di punti metallici splendenti, posti in serie, alcune parti del loro corpo, come osservasi in certe specie dei generi *Scopelus*, *Maurolicus*, *Gonostoma*, ecc.

Oltre le secrezioni mucose fluenti su tutta la superficie del pesce, e le oleoso-adipose, di cui sono imbevuti i tessuti dermici, sovente si presta molto ad accrescere la venustà delle tinte quel viscido muco albuminoso che spalma, a guisa di membranella molle, trasparente e lucida come vernice, la superficie cutanea di alcuni pesci, il quale sorte per mezzo di forellini, che si

d'insetto che mi sembra essere il *Lepisma Saccharina*, Latr. chiamato volgarmente fra noi *Sardellina*.

Le mie osservazioni in proposito mi fecero conoscere che la polvere argentina di cui è coperto il corpo di quest'insetto è ben differente, cioè formata da minime squamme, simili a quelle che coprono le ali de' Lepidotteri, faccettate in maniera da presentare al lume di candela, i più bei colori d'interferenza, locchè non ottiensi dalla sostanza argentina de'pesci, che di tali faccette è mancante.

vedono in maggior o minor quantità secondo la specie, dappertutto od in luoghi determinati del corpo, ed appartengono ad un particolare sistema secernente mucosità, che merita esser comparativamente studiato e più profondamente conosciuto. Fra i pesci il cui derma è maggiormente pertugiato da forellini spettanti a tale sistema secretorio, va singolarmente distinto il *Pompilo* che ne conta uno al sito di ogni squamma, visibile ad occhio nudo; la cute dello *Spadone* ne è parimenti fornita a dovizia; e pure tali pesci secernono muco in quantità assai discreta in confronto di altre specie meno abbondanti di tali pertugi, nè si distinguono per ispeciale inverniciatura, quando ciò non fosse in certe stagioni dell'anno. (1)

I pigmenti possono essere semplici o composti. I primi hanno origine da una sola secrezione, i secondi dalla commistione di due o più secrezioni. Osservata al microscopio la sostanza pigmentosa, mostrasi anche ne'pesci composta di corpuscoli granellosi, liberi o contenuti talvolta in piccole vescichette (2) o cellule per lo più sferiche, analoghe a quelle che riscontransi ne' pigmenti

(1) Il Lacepede nel suo discorso sulla natura de'pesci, parla alla lunga sulle cagioni delle svariate e mirabili tinte di cui vanno adorni questi animali. Non partendo però da osservazioni speciali sull'intima struttura della cute de' pesci, e sulle cause fisico-chimiche di tale fenomeno, si abbandona, benchè ingegnosamente, alla propria fantasia ed a supposizioni e spiegazioni ottiche generali, non sempre conformi alla verità.

Anche i signori Breschet e Roussel de Vauzème tentano dar spiegazione del come si opera il coloramento negli esseri organizzati, e vedono un'analogia fra il modo di colorazione dei fiori, e le tinte variate degli inviluppi tegumentarii degli animali. Indicano come probabile che la forma della squamma e dell'utricolo abbiano influenza nella formazione di questo fenomeno, e suppongono che v'abbia nella cute umana delle differenze nella forma delle squamme, come vedesi, dicono essi, in quelle dei pesci e dei rettili. Ammettono inoltre la secrezione mediante particolare apparecchio, da essi detto *Cromatoforo*, di una sostanza colorata, la quale alimenterebbe le squamme suaccennate, e tali squamme sarebbero organi agenti in maniera speciale sul fluido che trovasi a contatto del loro pedicello, mediante la trama areolare su cui sono piantati. Io ammetto l'esistenza d'apparecchi cromatofori ne'pesci, ma spiego in altro modo il fenomeno di svariata colorazione in tali animali, come si vedrà altrove, non potendo entrare presentemente in maggiori dettagli.

(2) Il prof. Presciani avvertì fino dal 1797, che il color rosso di cui sono macchiati i pesci della China, non è proprio delle squamme, ma unicamente dipende da una materia di apparenza glutinosa che perfettamente le ricopre. Leggermente stropicciata o fregata con coltello (sono sue parole), vidde che sotto un sottile strato di materia glutinosa non rossa comparivano coll'uso della lente infinite piccolissime vescicole di color rosso vivissimo. Tali

di altri animali; meritano però tali corpuscoli di essere comparativamente studiati nelle loro chimiche proprietà, e nelle differenze di forma e di dimensione che presentano a seconda del loro colore, e delle differenti specie e parti del corpo nelle quali si mostrano.

I colori dei pigmenti semplici sono più durevoli, dopo morte, di quelli dei pigmenti composti, e formano talvolta delle tinte permanenti, mentre fugaci sono quelle degli altri. Il color verde, per esempio, quando sia composto di pigmento bleù e di pigmento giallo, diventa bleù dopo morte in alcune specie, in causa della decomposizione del pigmento giallo, e vi rimane il solo colore bleù, il quale si mantiene più a lungo e passa in colore nerastro. Le macchie permanenti della cute dei pesci provengono per lo più dai pigmenti semplici commisti all'esterno indumento; anche le derivanti dall' indumento interno sono quasi sempre causate da una congerie di minutissime punteggiature, eguali a quelle che accennai trovarsi in alcune situazioni dell'indumento esterno. Un pigmento che si scolora dopo morte, in causa di disseccamento, ritorna spesso in gran parte, posto che sia allo stato d'idratazione od imbevuto di altro liquido trasparente. Ma l'azione della luce e del fluido, in cui s'immerge la spoglia, promuove più o meno rapidamente lo scoloramento completo, secondo la qualità o forza di questo fluido e la durata dell'immersione. Impossibile riuscirà dunque al tassidermista il conservare dopo morte la vivacità delle tinte che la vita sola mantiene; e se anche arrivasse ad ottenere la fissazione del colorito di alcuni pigmenti, mediante qualche particolare provvedimento, appariranno sempre le impronte di uno stato cadaverico.

Non porterò più oltre il mio dire sulla struttura della cute dei pesci, e sulla genesi del loro colorito; mi basterà aggiungere che le numerosissime differenze le quali s'incontrano in alcune famiglie di pesci, ed in certe regioni del corpo od appendici di esso, sono molte volte dovute all'influenza del sesso, dell'età, dello stato di salute, del clima, delle abitudini, del luogo d'abitazione, della pastura, e specialmente dello sviluppo ed eccitamento dell'organo generatore, per cui, come gli uccelli, vestono i pesci al tempo dei loro sponsali colori

vescicole sono le cellule contenenti i granellini pigmentosi. Pensava però il Presciani che potessero essere animali del genere delle idatidi. Il Prof. Dobereiner crede che il color rosso dorato che prendono le Trotte in certi stagni sia causato dal trovarsi l'aria disciolta nelle lor acque, meno ossigenata cioè dal contener essa l'azoto nel rapporto dell'aria atmosferica. (*Annal. des Scienc. physiq.*).

tanto svariati e brillanti, da imitare, come dissi più sopra, i metalli forbiti e le gemme più pure.

Il valore di tali cause venne da me considerato sotto ogni punto di vista, fisico, chimico, anatomico, fisiologico, patologico, nel mio sopraccennato lavoro. Quanto esposi finora non è che un saggio assai compendioso di esso, nel quale ommisi molti dettagli anatomici relativi alla differente struttura di quegli organi speciali, da cui sembrano aver origine gl' indumenti e le secrezioni pigmentose, o lubricanti la superficie cutanea, come pure altre particolarità di anatomia microscopica, rischiaranti tale argomento, le quali saranno rese maggiormente evidenti mediante relative figure.

VI.

Ora volendo riassumere in poche note quanto sul sistema cutaneo dei pesci fu superiormente indicato, e segnare i limiti entro i quali può variare la condizione di un tale apparecchio organico in questi animali, possiamo venire alle conclusioni seguenti:

1. La cute de' pesci in generale, è costituita di derma e di due indumenti, l' uno epidermico e l' altro ipodermico, e può in varie epoche della vita fornir materiali, mediante particolari apparecchi, alla formazione di altri prodotti di natura mucoso-cornea e corneo-ossosa, ed alla secrezione di pigmenti e di sostanza mucoso-albuminosa.

Essa s' introflette, modificandosi più o meno per le aperture delle branchie, e va a vestire le pareti delle cavità branchiali, toraciche ed addominali.

2. Il derma separatamente considerato, che sembra non differire essenzialmente da quello degli altri animali, può variare ne' pesci per grossezza, spessezza e tenacità, per la direzione ed incrocicchiamento delle fibre che lo compongono, pel grado di adesione mediata od immediata alla massa muscolare, per aver muscoli proprj o per mancare di essi, per le appendici a cui può dar formazione e pel suo scheletro, per esser mancante di tali appendici, di dermoscheletro e di uno degli accennati suoi indumenti, per esser infine trasparente ed opaco, imbevuto dei suoi pigmenti, o scevro da essi. Tali variazioni possono dipendere da cause fisiologiche od interne, e da cause fisiche od esterne.

3. Gl' indumenti sono costituiti da un aggregato di minime cellule più o meno sviluppate, la cui forma primordiale, in entrambi identica, può modificar-

si in varie maniere, cioè l'aggregato di tali cellule può passare dalla forma di pellicola mucoso-cornea, granulare, trasparente, alla forma lamellare, trasparente od opaca, bianco-perlacea od argentina, e presentare parimenti delle rimarchevoli differenze nella maggiore o minor forza di aggregazione od adesione delle particelle che tale aggregato costituiscono, sia l'indumento epidermico od ipodermico. Queste particelle indumentali possono pure, per particolare metamorfosi, assumere anche la forma di squamme, e passare dall'una all'altra delle forme accennate, in varie epoche delle vita, a causa di un certo sopraeccitamento vitale che ne altera la compage e ne trasforma l'impasto, e dar origine in siffatta guisa ad un dermoscheletro.

4. Il demoscheletro ha origine da particolare metamorfosi delle cellule primitive indumentali, conseguente ad un aumento di vita evolutiva nel derma, e da particolare sviluppo di queste cellule all'interno ed all'esterno della superficie cutanea, ovvero fra lo spessore del derma stesso, per cui i prodotti dermoscheletrici, possono distinguersi in prodotti dermici propriamente detti, ed in prodotti indumentali.

La squammogenesi è poggiata a questo solo principio, col quale si spiegano tutte le possibili forme e tutti i gradi di sviluppo di tali prodotti cutanei, cominciando dalla forma granulare delle cellule costituenti l'indumento più semplice, alla lamellare che scopresi nell'indumento argentino, e giungendo così alla squamma più semplice, e da questa alla più composta, indi ai prodotti dermoscheletrici di più elevata struttura, in cui non più risale una semplice vita evolutiva, ma un grado speciale di vegetazione, mediante vascolarità propria. Nella struttura de' prodotti dermoscheletrici è d'uopo quindi non confondere certi vasellini di nutrizione, dei quali vengono forniti, giunti che sieno a certo grado di sviluppo, con certi canalini di evoluzione, risultanti dal modo di accrescimento della squamma, ossia dalle interruzioni che si ripetono nella aggregazione delle particelle che la compongono, o delle varie loro serie aggregate.

I prodotti dermoscheletrici hanno sovente un rapporto geometrico col nervoscheletro, come notò Carus; in alcuni casi un tal rapporto decresce per lunga serie di gradazioni, fino a perdersi totalmente.

5. Gl'indumenti, che, come fu detto, si presentano ora trasparenti ed ora opachi, di colore bianco-perlaceo od argentino, servono di base alle secrezioni pigmentose; di queste imbevendosi in vario modo, possono offrire tutte le com-

binazioni e gradazioni distinte possibili, e riflessi metallici assai svariati e brillanti, specialmente se una tal base sia argentina, ossia se l'indumento sia argentino ed il pigmento trasparente. Oltre di ciò, concorrono alla colorazione del pesce le macchie permanenti degli indumenti stessi, formate per lo più da minutissime punteggiature di varia forma e di tinta sempre opaca ed oscura, disposte in congerie più o men numerose ed estese, e vi si aggiungono tante altre cause relative alla maggiore o minor trasparenza del derma e de'suoi indumenti, alla forma e modo di disposizione delle squamme, alla struttura di esse, ecc.; dimodochè la colorazione de' pesci riesce un fenomeno assai complesso, prodotto di cause fisiologiche e fisico-chimiche, esterne ed interne, agenti contemporaneamente, per cui ne avviene quel contrasto mirabile di tinte vivaci, così facilmente evanescenti, che tanto si ammirano in questa classe di animali.

VII.

Da quanto ebbi ad esporre sulla struttura della cute de'pesci può facilmente dedursi fino a qual punto sieno da valutarsi, le differenze che essa presenta, come caratteri naturali di classificazione. (1)

Osserviamo la cute d'un medesimo tipo nell'ordine Salachi ed in quello degli Olocefali, in quanto all'esser sprovveduta d'interno indumento. Relativamente all'indumento esterno mostrasi esso fornito nella famiglia *Squalidi*, di prodotti dermoscheletrici indumentali, presso a poco di analoga forma e disposizione, coperti di smalto, mentre nella famiglia *Raiidi*, alcune sottofamiglie come i *Torpedinini*, i *Trigonini*, ecc. hanno le specie con indumento semplice, ossia nude, ed in altre come nelle sottofamiglie *Raiini*, sono solo parzialmente

(1) Quando scriveva questo articolo i chiariss. Giovanni Müller e principe Carlo Luciano Bonaparte, non avevano ancora pubblicate le loro nuove classificazioni dei pesci, (Vedansi *Memoire sur les Ganoïdes et sur la classification naturelle des poissons*, par. M. I. Müller. *Annales des Sciences naturelles*, Zool. T. 4, 1845, e *Catalogo metodico dei pesci Europei*, di Carlo L. Princ. Bonaparte, Napoli 1846) ; mi era quindi appoggiato nell'estendere tale rivista alla seconda edizione del Prodromo del sistema Ittiologico Bonapartiano, pubblicata nel 1841. Ora devo dichiarare trovar nelle nuove accennate classificazioni meglio rispettati i rapporti naturali delle singole famiglie, anche relativamente alla parziale conformazione del dermico loro sistema. Accennerò altrove alcune modificazioni che crederei ancora fossero da introdursi, onde rendere maggiormente esatto, per quanto lo comporta lo stato attuale di cognizioni, l'ordinamento naturale di così importantissima classe di esseri organici.

provvedute di prodotti aculeiformi, di forma e disposizione svariata, i quali prodotti piuttostochè indumentali posson chiamarsi dermici, perchè aventi propriamente radice fra le fibre del derma.

Osservansi poi molti anelli di passaggio fra le differenze della cute nell' una e l'altra delle accennate famiglie. I *Rinobatini* ed i *Pristidini* più si avvicinano, sotto tale rapporto, agli *Squalidi.*

La cute delle *Chimere* merita d'essere studiata per meglio riconoscere se, anche per quanto è relativo al sistema dermico, ben si distinguono gli *Olocefali* dai *Plagiostomi.*

Nell' ordine Osteodermi vi ha uguaglianza tipica cutanea rapporto al derma, all'esterno indumento, ed alla mancanza dell' indumento interno; vedesi però differenza somma nello sviluppo del dermoscheletro nella famiglia *Ippocampidi* in confronto di quella detta *Singnattidi,* come feci conoscere alla quarta Assemblea de'Naturalisti Italiani, parlando della classificazione di tali animali, allorchè proposi la separazione di essi in due famiglie distinte.

L' ordine Sclerodermi è sotto tale riguardo, nel caso medesimo degli Osteodermi; le specie mancano quasi affatto d'interno indumento, ed un indumento esterno, mucoso-corneo od argentino copre, più o meno copiosamente, la superficie del loro dermoscheletro. Vi hanno però differenze rimarchevoli nel dermoscheletro della famiglia de' *Balistidi,* in confronto di quella detta *Ostraciontidi;* nei primi è costituito da squamme romboidali subossee, subembricate, a superficie scabra od a prominenze appuntite che coprono l' intiera superficie del corpo; vi hanno per aggiunta alcune serie di speciali produzioni aculeiformi ai lati della coda, nei secondi invece il dermoscheletro non s'estende a tutta la superficie del corpo, ed è composto di scudi ossei smaltati, contigui, di forma regolare geometrica, congiunti come a mosaico, e talvolta producentisi a guisa di spine e formanti una specie di corazza inflessibile.

Nell' ordine Ginnodonti la cute è pure quasi priva d'interno indumento; varia però nella composizione del dermoscheletro e nella qualità dell'indumento esterno.

Nella famiglia *Tetraodontidi* il dermoscheletro consiste in aculei sparsi pel derma e piantati in esso con radice semplice od a più lobi divergenti, l'esterno indumento si protrae quasi fino alla cima di tali aculei, la qual cima è coperta di smalto; tale indumento ora è mucoso-corneo ed ora modificato in sostanza argentina.

Nella famiglia *Molaidi* il dermoscheletro consiste invece in tubercoli ossei, contigui, coprenti come a mosaico l'intiera superficie del corpo e spalmati di un esterno indumento argentino, che facilmente si stacca. Nella sotto famiglia da me distinta col nome *Chondromori*, perchè a scheletro fibroso cartilagineo, adottata dal principe di Canino col nome *Orthragoriscini*, la superficie esterna di siffatti tubercoli s'innalza in punte disuguali, sicchè dalla loro riunione risulta assai scabra l'intiera superficie del pesce; una tal veste dermoscheletrica copre anche intieramente le pinne di questo pesce.

Nella sottofamiglia da me chiamata *Osteomori*, perchè a scheletro subosseo, adottata dal principe di Canino col nome *Molini*, i tubercoli sono invece piani, sicchè mostrasi liscia la superficie del pesce; una tal veste però non ricopre anche le pinne, come nella prima sottofamiglia.

Nell'ordine Storioni v' hanno due famiglie, in entrambe delle quali l'indumento interno trovasi in piccola quantità o manca affatto, e l'esterno è manifesto abbastanza ed al derma aderentissimo.

Nella famiglia *Poliodontidi*, le *Spatolarie* sono nude affatto, mentre negli *Acipenseridi* la cute è sparsa di tubercoletti e provveduta di scudi ossei seriali, smaltati nel loro centro e coperti, solo in parte, dell'indumento epidermico.

Negli ordini Ganoidei, Ctenoidei e Cycloidei, proposti dall' Agassiz, ammessi con qualche utile modificazione dal principe di Canino, e da entrambi distinti con note caratteristiche prese dalle squamme, vi hanno differenze tante, relative al cutaneo sistema, da doversi riguardare tali ordini come sommamente artifiziali, anche sotto questo punto di vista, se non lo fossero per molti altri caratteri di maggiore entità, per cui fa d'uopo sieno sottomessi a nuove e grandi modificazioni.

In quasi tutte le famiglie de'Ganoidei l'interno indumento è poco abbondante od affatto nullo, ma i prodotti dermoscheletrici, quando esistono, sono validi assai, di natura subossea, con superficie smaltacea, coperti d'indumento epidermico argentino, sovente deciduo come ne' *Lepidosteidi*.

Nella famiglia *Siluridi* il corpo può dirsi nudo; ma nelle sottofamiglie di esse *Callictini* e *Pinnetodini*, si trovano ai lati di esso delle serie di lamine, le quali sono di natura differente da quella delle altre famiglie di questo ordine. Vi hanno poi differenze rimarchevoli nel dermoscheletro delle famiglie *Loricaridi*, *Tetragonuridi* e *Macrouridi*.

Nell'ordine Ctenoidi, la famiglia *Pleuronetidi,* che pure appartiene ad uno stesso tipo, per quello riguarda la mancanza d'indumento ipodermico, ossia per la presenza del solo epidermico non argentino, mostra nella sottofamiglia *Soleini* molto cospicuo il carattere delle squamme, assegnato a distinzione dell'ordine, ed all'incontro in alcune specie della sottofamiglia *Pleuronetini,* trovansi squamme coperte per intiero dall'esterno indumento e tali che crederebbersi di Cycloidei; vi ha poi eccezione ben rilevante nel *Rombo,* il quale invece di squamme, ha placche ossee la cui punta è vestita di smalto, sparse nella cute ed in essa piantate con grossa base.

Nella famiglia *Chetodontidi* vi hanno specie mancanti o poco fornite di interno indumento, nel che si approssimano ai *Pleuronitidi,* come pure ai *Soleini,* per le pinne coperte in parte di squamme. Si distinguono però molto per l'abbondanza, vivacità e varietà dei loro pigmenti.

Gli *Anabantidi* e gli *Acanturidi* hanno di comune ancor essi la poca quantità o mancanza d'interno indumento, si distinguono però per le squamme più grandi e solide negli uni, estremamente piccole negli altri e particolarmente conformate e disposte. Gli *Amfacanti* hanno squamme piuttosto cicloidee, e gli *Acanturi* ed i *Naseus,* presentano anch'essi particolarità che meritano di essere meglio studiate e fatte conoscere.

Lo stesso dicasi della famiglia *Fistolaridi,* nella quale si trovano differenze rimarchevoli ne'pochi generi che la compongono.

I *Cromididi* sono rapporto al sistema cutaneo alquanto prossimi agli *Sparidi.*

Le famiglie *Menidi, Sparidi, Scienidi* e *Percidi* differiscono dalle altre di questo ordine, per esser più o meno abbondantemente provvedute di interno indumento, per la maggior parte, argentino. Meno poche eccezioni conservano il tipo Ctenoideo e molta regolarità di conformazione; hanno tuttavia fra loro bastevoli differenze caratteristiche. Gli *Sparidi* ed i *Menidi,* presentano un tipo solo.

La famiglia *Triglidi,* oltre che pegli accennati caratteri, distinguesi anche per la significante anomalia che ammirasi nel dermoscheletro della *Dactyloptera* ed in quello del *Peristedion.* Quali rimarchevoli differenze non trovansi inoltre nella condizione dermica di una tale famiglia, in confronto della sottofamiglia de' *Cottini,* in cui la maggior parte delle specie son nude?

Nella famiglia *Gobidi* l'interno indumento è per lo più mancante od assai

scarso; ma poche eccezioni si osservano fra essi, nella forma e struttura intima delle squamme.

Anche nell'ordine Cicloidei non sono men rilevanti le differenze che presentansi nel cutaneo sistema.

Il maggior numero dei generi delle famiglie in esso comprese è provveduto d'indumento ipodermico, in maggior o minor quantità, esteso a tutto il corpo, o limitato ad una parte di esso; altri però ne sono totalmente mancanti. L'indumento epidermico esiste in tutti, ma in alcune specie è talmente sottile da credersi nullo; in altre è molto grosso e stipato, capace di metamorfosarsi in tessuto squammoso; spesse volte è mucoso-corneo, trasparente, ovvero opaco, latteo, perlaceo od argentino, più o meno molle. Più di rado è composto di due strati, argentino l'interno od aderente al derma, l'esterno o soprappostovi di natura cornea, metamorfosato in particolari prodotti fungiformi. In qualche specie lo strato esterno è argentino e l'interno mucoso corneo. Alcune famiglie son fornite di squamme, propriamente dette, di tubercoli; altre ne mancano affatto o le hanno rudimentarie.

Nelle famiglie *Ciclopteridi* e *Lophidi*, in cui l'interno indumento può credersi nullo, mentre molte specie sono nude, ossia sprovvedute di prodotti dermoscheletrici, altre ne mostrano in maggior o minor quantità sparsi per la cute in forma di tubercoli ed anche di spini.

Le specie delle famiglie *Blennidi* e *Callionimidi*, quasi prive parimenti d'indumento ipodermico, sembrano a cute nuda in tutte le epoche della lor vita.

Nella famiglia *Gadidi* comparisce l'interno indumento più o meno abbondante, e le squamme sono sempre cellulari, circolari, oblunghe, sottili, minute, più o meno contigue, intieramente coperte dall'esterno indumento.

Nella famiglia *Ciprinidi* v'ha interno indumento, e le squamme sono embricate ed a quattro campi molto distinti, e l'indumento esterno copre intieramente la squamma.

Nella famiglia *Poecilidi* osservasi presso a poco lo stesso.

Nella famiglia *Labridi* vi hanno pure squamme embricate, manca però sovente l'interno indumento, almeno in alcune parti del corpo; l'esterno v'ha sempre, ed i pigmenti di cui questo viene imbevuto, sono spesso di tinta assai svariata e vivace, per lo più facilmente evanescente; quando il colore del corpo è uniforme, ossia d'una sola tinta, riesce per ordinario più durevole, anche dopo disseccazione della cute.

Nella famiglia *Mugillidi* vi ha indumento interno ed esterno e tali indumenti sono quasi sempre di colore argentino; le squamme si mostrano embricate, piuttosto lunghe, talvolta poligonari, specialmente nel capo.

Nella famiglia *Atterinidi* la cute manca dell'interno indumento argentino nella parte dorsale, e tale indumento è più intenso e vivace ai lati del corpo, ove forma una fascia argentina splendidissima. Dove manca l'indumento argentino, anche le squamme appariscono nulle, ovvero trovansi in istato erudimentario, e la cute è trasparente.

Nella famiglia degli *Offiocefalidi* non so se trovisi interno indumento; il corpo è coperto di scudi poligoni, coperti d'indumento epidermico. Negli *Amidi* v' ha un sistema cutaneo che ha qualche rapporto con quello de' Ganoidei, e la testa è loricata.

Nella famiglia dei *Clupeidi* le cui specie sono ben provvedute di squamme embricate e di entrambi gl' indumenti, fa eccezione il genere *Engraulis*, ove le squamme sono nulle od erudimentarie, e l'esterno indumento è quasi impercettibile.

Nei *Salmonidi* v'hanno entrambi gl' indumenti; le squamme sono grandi, embricate, più o meno aderenti; farebbero però eccezione all'ordine alcuni *Aulopedini*, in cui si presentano tali squamme, come ciliate. Anche tale famiglia vuol esser meglio studiata, rapporto alle differenze che presenta nel suo cutaneo sistema e specialmente in alcuni generi fatti conoscere per la maggior parte dal Cocco, le specie de' quali presentano ai lati del loro corpo serie più o meno numerose di scudetti di splendore argentino o policromatici.

Gli *Esocidi* hanno interno ed esterno indumento, e son provveduti di squamme che hanno il carattere dell' ordine. Nel dorso dei *Belononi* però sono quasi nulle o facilmente decidue, e così pure in tal situazione manca l' interno indumento argentino.

Nella famiglia *Sfirenidi* la qualità del derma forma nell' *Argentina Sphyraena* grande eccezione all' ordine, poichè desso, estremamente sottile, sembra sprovveduto affatto di prodotti squammosi.

Nei *Trachinidi* l'interno indumento è in piccola quantità o nullo, e le squamme in questa famiglia hanno forma e disposizione speciale, come venne accennato.

Gli *Echeneididi* hanno parimenti sistema speciale cutaneo meritevole di studio; le squamme sono contigue e tutte coperte da indumento epidermico

alquanto grosso; la loro forma particolare può vedersi descritta e figurata dal Costa nella sua Fauna.

Nei *Gasterosteidi* abbonda l'interno indumento argentino, l'esterno è quasi nullo, mancano le squamme, e v' ha solo qualche parziale dermoscheletrico prodotto.

Fra gli *Scomberidi* vi hanno maggiori eccezioni, e può dirsi aver quasi ogni sottofamiglia una speciale modificazione nel cutaneo sistema.

Le più singolari fra queste eccezioni son quelle che riguardano i *Xiphias*, il *Luvarus*, il *Zeus*, i *Tonni*, gli *Scombri* propriamente detti, ed i *Centrolophi*, su di che può intanto vedersi quanto scrissi nel corso di questa Memoria.

La famiglia *Cepolidi* è pure singolare eccezione dell'ordine. Nei *Trichiuri*, nei *Lepidopi* e nei *Trachitteri* l'indumento interno manca quasi affatto, l'esterno è tutto argentino, abbondante, facilmente staccantesi dal derma (1); mancano anche le squamme, o se vi hanno, sono decidue, ed appariscono ai lati del corpo, e forse solo all'epoca della frega, membranose, contigue, come ebbi ad osservare in grandi esemplari del *Lepidopus ensiformis* Bonap. (L. argenteus, Nardo) osservati nel Museo di Torino. Prodotti dermoscheletrici stabili sono in questa famiglia la placca ventrale squammosa, che trovasi nella specie accennata, e la serie di scudi oblunghi, appuntiti nel mezzo, costituente nei *Trachitteri* la linea laterale.

Il *Lophotus Cepedianus* di Giorna ha cute prossima a quella dei *Trachitteri*, che apparisce come divisa a rombi, mostranti nel mezzo squamme erudimentarie, contigue. Merita esser meglio studiata.

Le *Cepole* propriamente dette s'allontanano dal tipo della famiglia; hanno squamme subembricate, assai minute, però visibili ad occhio nudo; il derma è trasparente e l'indumento interno è argentino in alcune parti del corpo soltanto.

Negli *Ofilidi* il sistema cutaneo è molto prossimo a quello di *Trachinidi* e de' *Murenidi*, ai quali sembra come anello intermedio.

I *Murenidi* non hanno però tutti un medesimo tipo, giacchè mentre l'*Anguilla* ha entrambi gl'indumenti e le squamme contigue di forma speciale, collocate sotto l'indumento epidermico, a questo ed al derma aderentissime, nei

(1) Fino dall'anno 1823 distingueva dal pigmento e sottometteva a microscopica indagine l'indumento argentino de' pesci, parlando dell' *Epidesmus maculatus*. Ranzani, (*Trachypterus taenia*, Schn.) V. Giorn. di Fisica. Pavia, Bim. II. 1824.

Conger invece tali squamme mancano affatto, locchè è anche proprio delle *Murene* e di altri generi affini.

Il tipo dermico nella sottoclasse di Marsipobranchi, cioè nei generi costituenti la famiglia *Petromyzonidi,* sembra essere molto prossimo a quello delle *Murene,* dei *Congri* e di altri pesci privi di squamma.

Con rivista tanto superficiale intendo aver esaurito, solo in minima parte, argomento meritevole d'indagini ben più profonde, e sono sicuro che differenze importantissime si scopriranno nel fare esame parziale di gran numero di pesci stranieri e dello stesso Mediterraneo, la cute de' quali non poteva io sottoporre ad anatomica indagine.

Basta però quanto ho detto a mostrar chiaramente, entro quali limiti, nello stato attuale di cognizioni in proposito, possa valersi l' Ittiologo de' caratteri tratti dalla struttura del dermico apparato, e quanto importi, prima di venire a generali conclusioni, conoscere con ogni esattezza possibile tutti i dettagli relativi alle singole specie.

(*Letta il giorno* 23 *giugno* 1844).

ELENCO CRONOLOGICO

de' principali Autori che scrissero sulla cute de' pesci, sulle produzioni ed appendici di essa, e sulle cause della sua colorazione.

1554. **Rondeletii** *Guliel.* Libri de piscibus marinis, etc. *Lugduni,* apud M. Bonhomme. 1554. Caput XIII. *De piscium differentia ex colore.*

1656. **Borellus** *Petrus.* Observat. microscopicarum centuria. *Hag. Com.* (*Obs.* 37).

1667. **Hooke** *Rob.* Micrographia, or some physiological descriptions of minute bodies made by magnifying glasses, with observations and inquiries thereupon. With 38. pl. in fol. *Lond.* 1665. Allestry. *Vedi a p.* 162.

» **Stenonis** *Nicolai.* Elemen. Myologiae specimen, cui accedunt Canis Carchariae dissectum caput et dissectus piscis ex Rayarum genere. *Florentiae,* 1667. fig.

1678. **Lorenzini** *Stefano.* Osservazioni intorno alle Torpedini. *Firenze,* 1678. 4. fig. *p.* 7. *e seg. e p.* 20. *e seg.*

1683. **Stenonis** *Nicolai.* De musculis et glandulis, Observ. specimen, cum epistolis duobus anatom. *Lugd. Batav.* 1683. (*Epist. de Anatom. Rayae p.* 64 *ad* 93).

1685. **Leeuwenhoek** *Ant.* Opera omnia. *Lugd. Bat.* 1722. *Arc. nat.* (T. 1. *p.* 105 e *p.* 48. e *Cont. Arc. nat.* Epist. 107. *p.* 191 (1696) ed *Epist. phys. Delphys* (1719) Ep. 24. *p.* 213).

1687. **Observationes anatom.** circa poros in piscium cute notandos. *Acta Erudit. Lips.* 1687. *p.* 160. et Opuscula omnia actis Erud. Lips. inserta, T. I. *p.* 499. fig.

1691. **Bonanni** *Pet. Philippus.* Observ. circa viventia quae in rebus non viventibus reperiuntur, cum micrographia curiosa, etc. *Romae,* tipys D. A. Herculis 1791. fig. *Vedi p.* 99. § X. fig. 126 — 128.

1716. **Réaumur** *Réné Ant.* Observations sur la matière qui colore les perles fausses et sur quelques autres matières animales d' une semblable couleur ; à l'occasion de quoi on essaye d'expliquer la formation des écailles des poissons: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Ann.* 1716. Paris, 1718, *p.* 229.

1717. **Roberg** *Laurent.* Dissert. de Piscibus. 4. cum fig, lign. inc. *Upsaliae,* 1717.

1733. **Petit.** Mémoir. de l'Académie. *Paris,* 1755, *p.* 193. *Sur la Carpe.*

1759 — 1765. **Barster** *Seb.* Opuscula subseciva. *Harlemi,* Lib. III. 1761, *p.* 127. *De squammis piscium.*

1761. **Schaeffer** *Jac. Christoph.* Piscium Bavarico-Ratisbonensium Pentas. *Ratisbonae* 1761. Montagii, cum Tab. IV. aer. incisi, *p.* 28—43.

1764. **Ledermüller** *Mart. Frobene,* Mikroskop. Gemüths und Augen-Ergötzung. Mit 100. illum. Kupfertf. *Nürnberg,* 1764.

1770. **Goüan** *Ant.* Hist. Piscium, etc. *Argentorati.* 1770, fig. — Philos. Ichthyol. *p.* 42 *Squammae* e *p.* 45 *Addatimenta.*

1781. **Fontana** *Félix.* Sur le Venin de la vipère. *Florence,* 1781. Vol. 2, *p.* 254.

1785. **Monro** *Alex.* The structure and physiology of Fishes explained and compared with those of Man and other animals. With 44. pl. in fol. *Edinbourg* 1785.

1787. **Broussonet** *P. M. August.* Observ. sur les écailles de plusieurs espèces de poissons qu'on croit communément dépourvues de ces parties. *Journ. de Physiq.* 1787. T. XXXI, *pag.* 12.

1797. **Presciani.** Osservazioni sui pesci. *Annal. di Ch. e St. Nat. del citt. Brugnatelli. Pavia,* 1797, Vol. 13, *p.* 298.

1798. **Lacepède** *Bern. Germ.* Hist. nat. des Poissons. *Paris,* 1798—1803. Vol. 5. *Discours sur les Poissons.*

1800. **Cuvier** *Georg.* Leçons d'Anatomie comparée. *Paris,* An. VIII. T. II. Leç. XIV. *Du toucher* Art. II. *De la peau,* et Art. VII *Des parties insensibles,* 5. *des Écailles.*

1818. **Mascagni** *Paolo.* Prodromo della Grande Anatomia, Op. post. 2.a Ediz. *Milano,* 1821 fig. Tav. 40. fig. 1—4.

1822. **Heusinger** *Joh. Chr. C. Friedr.* Histologie. *Eisenach,* 1822. Vol. I. *Histographie.*

» **Blainville** (de) *H. M. Ducrotay.* De l'organisation des animaux ou Principes d'Anatomie comparée. T. I, *Paris,* 1822, p. 144 à 167. *De la peau dans les Poissons.*

1823. **Nardo** *G. D.* Descrizione di un Pesce raro dell'Adriatico (*Trachypterus*), nel Giornale di Fisica di *Pavia,* Bim. II. 1824. (*Parlasi della struttura laminare dell'indumento argentino microscopicamente osservato*).

1824. **Kuntzmann** *S. E.* Verhandlung der Gesellschaft naturforschender Freunde in *Berlin.* 1824, *p.* 269; 1829, *p.* 369. *Osserv. sulle squamme de'pesci,* ecc.

1827. **Nardo** dott. *G. D.* De Proctostego novo piscium genere, specimen ichthyologicum anatomicum. *Patav.* 1827. 4.° fig.

1827 — 1832. **Brand** *Joh. Friedr.* et **Ratzeburg** *J. T. C.*, Darstellung und Beschreibung arzneilicher Thiere, *Berlin*, 1827—1834 in 4. t. II. Fasc. I. Tav. III.

1828. **Cuvier** *G.* et **Valenciennes** *A.* Hist. des poissons etc. *Paris,* 1828. T. I.

1832. **Nardo** dott. *G. D.* De Skeponopodo novo piscium genere et de Guecubu Margravii specie illi cognata etc. *nel Giornale* Isis, 1833, *p.* 416.

1833. **Ehrenberg** *Chsf. Gtfr.* Ueber normale Krystallbildung in lebenden Thierkörper. *Ann. der Physik und Chemie,* von Poggendorf. Vol. XXXVIII. 1833. N. 7, *pag.* 468-471.

1834. **Carus** C. G. Lehrbuch der Zootomie 2. Edit., *Leipzig,* 1834. 2. vol. in 8. fig.

» **Agassiz** L. Recherches sur les poissons fossiles, *Neuchat.* 1834. 2. livr., *p.* 62 *e seg.*

1834. **G. Breschet** et **Roussel de Vauzème.** Nouvell. recherches sur la struct. de la peau. *Ann. des Scienc. nat.* Septembre 1834. fig.

1839. **Mandl** *doct.* L. Recherches sur la structure intime des écailles des poissons. *Annal. des Scienc. nat.* Seconde Série, T. XI. Zoolog. *p.* 337-371. Tav. 9.

» **Nardo** *dott.* G. D. Nuove osservazioni anatomiche sul sistema cutaneo e sullo scheletro del Prottostego. Lette alla prima Assemblea degli Scienziati Italiani li 14 ottobre 1839 ed inserite negli *Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto,* Bim. V-VI, 1840.

» **Nardo** *dott.* G. D. Considerazioni sulla famiglia dei pesci *Mola* e sui caratteri che li distinguono. Lette alla prima Assemblea degli Scienz. Ital. li 9 ottobre 1839. Inserite negli *Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto,* 1840. Bim. III-IV, *p.* 105-112.

1840-43. **Costa** *prof. Oronzio.* Fauna del Regno di Napoli. Napoli, 1840, 1844. (*Parlando del genere* Echeneis, *entra in dettagli sul sistema dermico delle differenti specie ed offre qualche osservazione comparativa*).

1840. **Nardo** *dott.* G. D. Osservazioni anatomiche sull' intima struttura della cute dei pesci comparativamente considerata e sulle cause fisiologiche e fisico-chimiche della loro colorazione e decolorazione. Lette alla seconda Assemblea degli Scienziati Italiani il giorno 17 settembre 1840. Vedi gli *Atti relativi. Torino,* 1841.

» **Nardo** *dott.*. G. D. Rapporto sopra un pesce esistente nel Museo di Pavia, determinatosi come il *Lepidopus Argireus.* Cuv., e considerazioni sui caratteri di questa specie. Letto alla sessione di Zoologia della seconda Assemblea degli Scienziati italiani nel settembre 1840, e pubblicato per estratto negli *Atti dell' Assemblea stessa. Torino,* 1841.

» **Agassiz** L. Remarques sur la structure des écailles des poissons; extr. d'une lettre de M. Agassiz, adressée à l'Acad. des Sciences dans sa Séance du 3 Février 1840. Inserito negli *Annal. des Scien. nat.,* 2. Série T. III. Zoologie 1840. *p.* 58-61.

» **Mandl** *Louis.* Nouvelles observations sur la structure des écailles des poissons; extr. d' un lettre de M. Mandl à l'Academie des Sciences, Séance 24 février 1840, à l'occasion des Remarques de M. Agassiz. *Annal. des Scien. nat.,* 2. Série T. III. Zoológ. 1840, *p.* 62 63.

1841. **Nardo** *dott.* G. D. Osservazioni intorno alla struttura della cute dei Xiphias,

e proposta per essi di una nuova famiglia distinta. Lette alla III. Assemblea degli Scienziati Italiani in Firenze il giorno 23 settembre 1841. — Pubblicate per estratto negli *Atti dell'Assemblea di Firenze,* 1842.

1841. **Müller** J. und **Henle** J. Sistematische Beschreibung der Plagiostomen. *Berlin*, 1841.

» **Peters**. Rapporto sulla quistione insorta fra i sigg. Mandl ed Agassiz sulla struttura delle squamme de'pesci. Müller, *Archiv für Anatomie etc.*, Jahrg. 1841, *p.* CCIX.

1842. **Nardo** *dott.* G. D. Considerazioni sopra alcune nuove famiglie de' Syngnathi e de' Plectognathi, e sui caratteri anatomici che le distinguono. Lette alla sessione di Zoologia della quarta Assemblea degli Scienziati Italiani tenutasi in Padova il giorno 28 settembre 1842. e inserite per estratto negli *Atti* a *p.* 244 e 245.

» **De Quatrefages** *Armand.* Sur les embrions des Syngnathes. *Annal. des Scienc. nat.* T. XVIII., 2. Série. Zoologie 1842, *p.* 193.

1843. **Müller** J. Beiträge zur Kenntniss der natürlichen Familien der Fische. *Archiv. für Naturgeschichte,* von Wiegmann 1843. *Heft.* 3. 4. 5.

» **Agassiz** *L.* Recherches sur le Poissons fossiles, *Neuchatel,* 1843. Chap. IV. *Dermatologie et en particulier des écailles des poissons, p.* 61-90 fig.

1845. **Müller** J. Mémoire sur les Ganoïdes et sur la classification des poissons. *Annal. des Scien. nat.,* 3. Série. Tom. IV. 1845, *p.* 5.

» **Vogt** C. Quelques observations sur les caractères qui servent à la classification des poissons Ganoïdes. *Annal. des Scienc. nat.,* 3. Série. T. IV. 1845, *p.* 53.

INTORNO ALL' USO

DEI COMPARTIMENTI DISEGUALI

NELLA RICERCA

DEL VALORE NUMERICO DI UN DATO INTEGRALE.

NOTA

DEL M. E. PROF. DOMENICO TURAZZA.

La determinazione del valore numerico di un dato integrale definito fra limiti pur dati, è problema del maggiore interesse in tutte le parti della Matematica, specialmente allora, ch' essa prende a particolare subbietto delle sue ricerche le pratiche applicazioni. Per giungere alla conoscenza del detto valore, così che l' errore che si commette possa attenuarsi comunque, e condursi a quel grado di picciolezza che domanda il caso pratico che si considera, vennero fino dal principio dell' invenzione del calcolo suggeriti varj e diversi metodi, di più o men facile applicazione, di maggiore o minore lunghezza di calcolo numerico, e fra questi tiene certamente luogo non ultimo quello che condusse il Cotes alle formole che portano tuttora il suo nome.

È noto ad ognuno, che anche in questa ricerca, i primi passi vennero messi dal Newton. Dalla soluzione del problema di condurre una curva parabolica a passare per un certo numero di punti dati, egli dedusse, come applicazione, il metodo di assegnare approssimativamente l' area compresa fra date ordinate ed una curva pur data, facendo appunto passare una curva parabolica pei punti corrispondenti alle ordinate già calcolate di quella curva che si deve quadrare. Il metodo originale del Newton assume di eguale grandezza gli inter-

valli delle ordinate; ma sarebbe falso il credere, ch' esso metodo sia limitato a questo solo caso, imperocchè stendesi anche facilmente a quello in cui gli intervalli sieno intieramente arbitrarii. Egli è nel suo libro dei Principii che trovasi il detto metodo; e là pure sono abbozzate le tavole, che vennero poscia estese dal Cotes nella sua *Harmonia mensurarum*.

E perchè il problema delle quadrature non è in ultima analisi che la ricerca del valore numerico di un dato integrale definito fra dati limiti, così il metodo del Newton e del Cotes riducesi a spartire la differenza dei limiti dell' integrale in un certo numero di parti eguali, e il cercato valore si desume con data regola dai valori che prende la funzione sotto il segno integrale pei valori della variabile corrispondenti a ciascuno dei detti punti di divisione.

Fu il chiarissimo Gauss il primo, il quale ebbe l'idea di spartire quella differenza in parti diseguali, e regolare quei compartimenti per modo, che l' approssimazione si facesse notabilmente maggiore di quella, che, a compartimenti eguali, ottiensi dal calcolo di un egual numero di valori della data funzione: imperocchè così operando il grado dell' approssimazione fassi generalmente il doppio di prima. La soluzione di questo problema, condotta fino agli ultimi dettagli dalla mano maestra di quel celeberrimo, trovasi consegnata nel volume terzo per l'anno 1815 dei Nuovi commentarj della Società di Gottinga col titolo « Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. »

Se non che ed egli, e tutti quelli che presero a commentare il detto metodo, almeno per quanto io mi sappia, non tennero in conto alcuno i valori della funzione corrispondenti ai due limiti; imperocchè l'introduzione di quei valori non può che far crescere l' approssimazione di due soli gradi, laddove l' uso di due nuove ordinate, che non corrispondano ai limiti, porta questa approssimazione di quattro gradi più elevata. Però, quando si pensa che in un gran numero di casi il calcolo numerico dei detti valori è per sè semplice e speditissimo, sorge naturalmente il desiderio di mettere a profitto eziandio quei due valori estremi, potendosi con leggerissimo aumento di calcolo numerico attenuare di molto l' errore.

La ricerca delle formole che nascono allora, quando nel metodo dei compartimenti diseguali tiensi conto dei valori corrispondenti ai limiti della funzione, ossia dei valori delle ordinate estreme, forma lo scopo di questa mia brevissima Nota, che oso in oggi di sottoporre, o dottissimi colleghi, al vostro saggio esame e giudizio. Stabilite le formole generali che menano alla risoluzione del

proposto problema, dimostro che i compartimenti sono simmetrici da una parte e dall' altra del punto di mezzo, ed eguali i coefficienti numerici delle due ordinate estreme, e di quelle che dalle due estreme egualmente si scostano. Ridotto con ciò alla metà il numero dei valori cercati, stabilisco le formole opportune alla loro determinazione, e chiudo coll' applicazione ai casi di tre, quattro, e cinque compartimenti, mostrando con un particolare esempio numerico l'approssimazione e la semplicità delle formole. La scelta dell' esempio numerico è fatta fra i casi non certamente più favorevoli, appunto perchè sia con ciò più nettamente dimostrata l' utilità di un tal metodo.

L' importanza della ricerca, l' eleganza e la semplicità delle formole che ne risultano, spero mi troveranno grazia appo voi, che, se altri ebbe a sperimentare cortesi, io provai sempre cortesissimi.

II. ANALISI.

1.° Sia proposto $\int_0^a F(x)\,dx$, e si cerchi il suo valore approssimato, usando del metodo delle quadrature.

A quest' uopo si supponga spartita tutta l' estensione a dell' integrale in $n+1$ punti, e i punti estremi di questi compartimenti corrispondano ai valori

$$0\,;\ x_1\,a\,;\ x_2\,a\,;\ x_3\,a\,;\ \cdots\cdots\ x_{n-1}\cdot a\,;\quad x_n\cdot a\,;\quad a.$$

Lo scopo della ricerca si è quello di assegnare i valori delle $2n+2$ indeterminate $x_1\,;\ x_2\,;\ x_3\,;\ldots x_n\,;\ y_0\,;\ y_1\,;\ y_2\,;\ \ldots\ y_n\,;\ y_{n+1}$, in modo che la quantità

$$(1)\qquad a\left\{y_0\cdot F(0)+y_1\cdot F\left(x_1\,a\right)+y_2\cdot F\left(x_2\,a\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots+y_{n-1}\cdot F\left(x_{n-1}\,a\right)+y_n\cdot F\left(x_n\cdot a\right)+y_{n+1}\cdot F(a)\right\}$$

coincida coi primi $2n+2$ termini del valore dell' integrale cercato, supposto questo sviluppato in serie secondo le potenze ascendenti di a; e che quindi l' errore risultante sia dell' ordine $2n+3$ rapporto alla a.

2.° È facile il vedere che, perchè questo succeda, devono essere soddisfatte le $2n+2$ equazioni seguenti :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots\cdots\cdots + y_n + y_{n+1} = 1 \\
x_1\, y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \cdots\cdots + x_n \cdot y_n + y_{n+1} = \frac{1}{2} \\
x_1^2 \cdot y_1 + x_2^2 \cdot y_2 + x_3^2 \cdot y_3 + \cdots\cdots + x_n^2 \cdot y_n + y_{n+1} = \frac{1}{3} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1^p \cdot y_1 + x_2^p \cdot y_2 + x_3^p \cdot y_3 + \cdots\cdots + x_n^p \cdot y_n + y_{n+1} = \frac{1}{p+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1^{2n+1} \cdot y_1 + x_2^{2n+1} \cdot y_2 + x_3^{2n+1} \cdot y_3 + \cdots\cdots + x_n^{2n+1} \cdot y_n + y_{n+1} = \frac{1}{2n+2}
\end{array}
\right.
$$

3.º Sieno ora

$$A_1 ; A_2 ; A_3 \cdots\cdots\cdots\cdots A_{n-1} ; A_n$$

i coefficienti dell' equazione del grado n, le cui radici sono le n quantità

$$x_1 ; x_2 ; x_3 \cdots\cdots\cdots\cdots x_{n-1} ; x_n$$

e poniamo

$$(3)\qquad \varphi(x) = x^n + A_1\, x^{n-1} + A_2\, x^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1}\, x + A_n .$$

Avremo

$$(4)\quad \varphi\left(x_1\right) = 0 ; \varphi\left(x_2\right) = 0 ; \varphi\left(x_3\right) = 0 \cdots\cdots \varphi\left(x_n\right) = 0$$

e quindi moltiplicando prima le $n+1$ prime equazioni (2) ordinatamente per A_n ; A_{n-1} ; . . . A_1 ; 1, e sommandole ; e replicando questo per le $n+1$ seguenti esclusa la prima ; poi per le $n+1$ successive escluse le prime due, e così fino all' esaurimento di tutte, si avrà facilmente, in forza delle equazioni (4)

$$
(5)\quad \left\{
\begin{array}{l}
A_n \cdot y_0 + \varphi(1)\, y_{n+1} = \int_0^1 \varphi(x) \cdot dx \\
\varphi(1) \cdot y_{n+1} = \int_0^1 x \cdot \varphi(x) \cdot dx ; \quad \varphi(1) \cdot y_{n+1} = \int_0^1 x^2 \cdot \varphi(x) \cdot dx \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \varphi(1) \cdot y_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\, \varphi(x) \cdot dx .
\end{array}
\right.
$$

Da queste equazioni si ricava tosto

$$(6)\quad y_0 = \frac{\int_0^1 (1-x)\,\varphi(x)\cdot dx}{A_n}\;;\quad y_{n+1} = \frac{\int_0^1 x\cdot\varphi(x)\cdot dx}{\varphi(1)}$$

e quindi

$$(7)\left\{\begin{array}{l}
\int_0^1 x\,(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = 0\;;\quad \int_0^1 x^2(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = 0\\
\int_0^1 x^3(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = 0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \int_0^1 x^n(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = 0\,.
\end{array}\right.$$

Mutando in quest' ultime x in $1-x$ si ha

$$\int_0^1 x\,(1-x)\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0\;;\quad \int_0^1 x\,(1-x)^2\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0$$

$$\int_0^1 x\,(1-x)^3\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \int_0^1 x\,(1-x)^n\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0$$

dalle quali, colle successive sottrazioni, si passa facilmente alle seguenti

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
\int_0^1 x\,(1-x)\cdot\varphi(1-x)\,dx = 0\;;\quad \int_0^1 x^2(1-x)\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0\\
\int_0^1 x^3(1-x)\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \int_0^1 x^n(1-x)\cdot\varphi(1-x)\cdot dx = 0\,.
\end{array}\right.$$

Le equazioni (7), che sono appunto n in numero, serviranno alla determinazione delle n quantità A_1; A_2; A_3 . . . A_n. Lo stesso si potrebbe avere anche dalle (8), ma le equazioni risultanti riescono assai meno semplici; e noi abbiamo qui dedotte solo le (8) per valercene a dimostrare alcune proprietà importanti della $\varphi(x)$.

4.° Le equazioni (7) sviluppate conducono alle seguenti:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\dfrac{A_1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{A_2}{n(n+1)}+\dfrac{A_3}{(n-1)\cdot n}+\cdots\cdots \\
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{A_{n-1}}{3\cdot 4}+\dfrac{A_n}{2\cdot 3}=0 \\[2ex]
\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}+\dfrac{A_1}{(n+2)(n+3)}+\dfrac{A_2}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{A_3}{n(n+1)}+\cdots\cdots \\
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{A_{n-1}}{4\cdot 5}+\dfrac{A_n}{3\cdot 4}=0 \\[2ex]
\dfrac{1}{(n+4)(n+5)}+\dfrac{A_1}{(n+3)(n+4)}+\dfrac{A_2}{(n+2)(n+3)}+\dfrac{A_3}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots \\
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{A_{n-1}}{5\cdot 6}+\dfrac{A_n}{4\cdot 5}=0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\dfrac{A_1}{2n(2n+1)}+\dfrac{A_2}{(2n-1)\,2n}+\dfrac{A_3}{(2n-2)(2n-1)}+\cdots\cdots \\
\qquad\cdots\cdots+\dfrac{A_{n-1}}{(n+3)(n+2)}+\dfrac{A_n}{(n+1)(n+2)}=0\,.
\end{array}\right.
$$

Egualmente, esprimendo con $(\varphi^{(p)}(1))$ la derivata ad indice p della $\varphi(x)$ divisa per $1.\ 2.\ 3\ldots p$, e fatto poi nella stessa $x=1$, sarà

$$
(10)\qquad \varphi(1-x)=\varphi(1)-x\Big(\varphi'(1)\Big)+x^2\Big(\varphi''(1)\Big)-x^3\Big(\varphi'''(1)\Big)\cdots\cdots
$$
$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\pm x^{n-1}\Big(\varphi^{(n-1)}(1)\Big)\mp x^n
$$

e le equazioni (8) danno

$$
\frac{1}{(n+2)(n+3)}-\frac{\Big(\varphi^{(n-1)}(1)\Big)}{(n+1)(n+2)}+\frac{\Big(\varphi^{(n-2)}(1)\Big)}{n(n+1)}\cdots\cdots+\frac{\Big(\varphi'(1)\Big)}{3\cdot 4}-\frac{\varphi(1)}{2\,.\,3}=0
$$

ecc. ecc.

le quali confrontate colle (9) somministrano le relazioni

$$
(11)\qquad A_n=-\Big(\varphi(1)\Big);\ A_{n-1}=\Big(\varphi'(1)\Big);\ A_{n-2}=-\Big(\varphi''(1)\Big);\ \cdots\cdots\cdots
$$
$$
\cdots\cdots\cdots\cdots A_2=\Big(\varphi^{(n-2)}(1)\Big);\ A_1=-\Big(\varphi^{n-1}(1)\Big)\cdot
$$

Queste ultime danno tosto

$$A_1 = -\frac{n}{2}$$

e poi le (9)

$$(12)\quad \begin{cases} A_1 = -\frac{n}{2} \\ A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2n+1} \cdot A_1 \\ A_3 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2n} \cdot A_2 \\ A_4 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{2n-1} \cdot A_3 \\ A_5 = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(n-4)(n-3)}{2n-2} \cdot A_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_p = -\frac{1}{p} \cdot \frac{\left(n-(p-1)\right)\left(n-(p-2)\right)}{2n-(p-3)} \cdot A_{p-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1 \cdot 2}{n+3} \cdot A_{n-1} \end{cases}$$

5. Riprendendo le equazioni (2), e facendo astrazione dalla prima, si sottraggano le altre successivamente l' una dall' altra, e scrivendo per semplicità

$$(13)\quad x_1(1-x_1)y_1 = z_1\,;\; x_2(1-x_2)\cdot y_2 = z_2 \;\cdots\cdots\; x_n(1-x_n)\, y_n = z_n$$

avremo

$$(14)\quad \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\cdots + z_n = \frac{1}{2 \cdot 3} \\ x_1 z_1 + x_2 \cdot z_2 + x_3 \cdot z_3 + \cdots + x_n \cdot z_n = \frac{1}{3 \cdot 4} \\ x_1^2 \cdot z_1 + x_2^2 \cdot z_2 + x_3^2 \cdot z_3 + \cdots + x_n^2 \cdot z_n = \frac{1}{4 \cdot 5} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{n-1} \cdot z_1 + x_2^{n-1} \cdot z_2 + x_3^{n-1} \cdot z_3 + \cdots\cdots + x_n^{n-1} \cdot z_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \,. \end{cases}$$

Ora si faccia

$$(15)\quad \frac{\varphi(x)}{x-x_p} = x^{n-1} + B_p^{(1)} \cdot x^{n-2} + B_p^{(2)} x^{n-3} + B_p^{(3)} x^{n-4} \cdots\cdots + B_p^{(n.2)} \cdot x + B_p^{(n-1)}$$

e si moltiplichino ordinatamente le (14) prima per $B_1^{(n-1)}$; $B_2^{(n-2)}$ ..... $B_1^{(1)}$, e si sommino; poi per $B_2^{(n-2)}$; $B_2^{(n-1)}$; .... $B_2^{(1)}$ e si sommino, ecc.: essendo

$$x_r^{n-1} + B_p^{(1)} \cdot x_r^{n-2} + B_p^{(2)} x_r^{n-3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + B_p^{(n-1)} = 0$$

finchè r è differente da p, avremo

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{\int_0^1 \frac{x(1-x) \cdot \varphi(x)}{x-x_1} \cdot dx}{\varphi'(x_1)} \; ; \; z_2 = \dfrac{\int_0^1 \frac{x(1-x) \cdot \varphi(x)}{x-x_2} \cdot dx}{\varphi'(x_2)} \; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; z_n = \dfrac{\int_0^1 \frac{x(1-x) \cdot \varphi(x)}{x-x_n} \cdot dx}{\varphi'(x_n)} \end{array} \right.$$

e quindi generalmente

$$(17) \qquad y_p = \frac{1}{x_p(1-x_p)} \cdot \frac{\int_0^1 \frac{x(1-x) \cdot \varphi(x)}{x-x_p} \cdot dx}{\varphi'(x_p)}$$

6. Ciò premesso, sarà ora facile il dimostrare:

(1) Che se l'equazione $\varphi(x) = 0$ ammette una radice eguale ad x_1 ne ammette pure una seconda eguale ad $1-x_1$.

(2) Che i coefficienti y_0; y_1; y_2 . . y_n; y_{n+1} sono eguali a due a due, cioè

$$y_0 = y_{n+1} \; ; \; y_1 = y_n \; ; \quad y_2 = y_{n-1} \quad \text{ecc.}$$

Infatti se nell' equazione (10) noi sostituiamo le relazioni al numero (11) essa diventa

$$\varphi(1-x) = - A_n - A_{n-1} \cdot x - A_{n-2} \cdot x^2 - A_{n-3} x^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - x^n$$

ossia

$$(17) \qquad \varphi(1-x) = - \varphi(x) \cdot$$

Se quindi sarà $\varphi(x_1) = 0$, sarà pure $\varphi(1-x_1) = 0$.

In secondo luogo essendo

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot dx = \int_0^1 \varphi(1-x) \cdot dx$$

se in luogo di $\varphi(1-x)$ poniamo nella stessa $-\varphi(x)$, sarà

$$\int_0^1 \varphi(x)\cdot dx = -\int_0^1 \varphi(x)\cdot dx\,;$$

da cui

$$\int_0^1 \varphi(x)\cdot dx = 0\cdot$$

Quindi dalla prima delle (5), essendo $\varphi(1) = -A_n$; si avrà tosto

$$A_n\cdot y_0 - A_n\cdot y_{n+1} = 0$$

cioè

$$y_0 = y_{n+1}$$

Poi essendo

$$y_n = \frac{1}{x_n(1-x_n)}\;\frac{\int_0^1 \frac{x(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx}{x-x_n}}{\varphi'(x_n)}$$

e

$$x_n = 1-x_1$$

sarà

$$y_n = \frac{1}{x_1(1-x_1)}\cdot\frac{\int_0^1 \frac{x(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx}{x-1+x_1}}{\varphi'(x-x_1)} = -\frac{1}{x_1(1-x_1)}\cdot\frac{\int_0^1 \frac{x(1-x)\cdot\varphi(1-x)\cdot dx}{x-x_1}}{\varphi'(1-x_1)}$$

e siccome è $\varphi(1-x) = -\varphi(x)$; e $\varphi'(1-x) = \varphi'(x)$, così si avrà finalmente

$$y_n = \frac{1}{x_1(1-x_1)}\cdot\frac{\int_0^1 \frac{x(1-x)\cdot\varphi(x)\cdot dx}{x-x_1}}{\varphi'(x_1)} = y_1$$

ecc.

Se il numero n sarà impari, la $\varphi(x) = 0$ avrà per radice $x = \frac{1}{2}$; imperocchè, essendo $A_1 = -\frac{n}{2}$ avremo

$$\frac{n}{2} = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_{\frac{n-1}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}} + 1 - x_{\frac{n-1}{2}} \cdots + 1 - x_2 + 1 - x_1$$

ossia

$$\frac{n}{2} = x_{\frac{n+1}{2}} + \frac{n-1}{2}\,;\ \text{ossia}\ x_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot$$

7. L' osservazione prima del paragrafo precedente ci permette di ridurre alla metà il grado dell' equazione

$$\varphi(x)=0$$

dopo che si sarà essa divisa per $x-\frac{1}{2}$ nel caso di n impari. Noi ora supporremo m, pari, il grado dell' equazione a risolversi, e sarà $m=n$ se n pari, $m=n-1$ se n impari, e allora converrà dividere la $\varphi(x)=0$ per $x-\frac{1}{2}$, e modificare convenientemente i suoi coefficienti: essendo x_1; x_m; x_2; x_{m-1}; ecc. le sue radici, fra le radici esisteranno dunque le relazioni

$$(18)\quad x_1+x_m=1;\ x_2+x_{m-1}=1;\ x_3+x_{m-2}=1;\ \cdots\ x_{\frac{m}{2}}+x_{\frac{m+3}{2}}=1$$

Poniamo

$$(19)\quad x_1\,x_m=u_1;\ x_2\cdot x_{m-1}=u_2;\ x_3\cdot x_{m-2}=u_3\ \cdots\ x_{\frac{m}{2}}\cdot x_{\frac{m+3}{2}}=u_{\frac{m}{2}}$$

e chiamiamo

$$D_1;\ D_2;\ D_3\ \cdots\cdots\ D_{\frac{m}{2}}$$

i coefficienti dell' equazione che ha per radici u_1; u_2; u_3 . . . $u_{\frac{m}{2}}$, cioè i coefficienti della

$$(20)\quad u^{\frac{m}{2}}+D_1\,u^{\frac{m}{2}-1}+D_2\cdot u^{\frac{m}{2}-2}+\cdots+D_{\frac{m}{2}}=0;$$

allora la ricerca dei valori di x_1; x_2; x_3; . . ecc. sarà ricondotta alla risoluzione dell' equazione (20), e poi delle corrispondenti (18) e (19).

I coefficienti D_1, D_2, D_3 ecc. si calcoleranno colle note regole di trasformazione osservando che le (18) e (19) danno per r qualunque

$$(21)\quad x_1^r+x_m^r+r\,u_1\left(x_1^{r-2}+x_m^{r-2}\right)+\frac{r(r-1)}{2}\,u_1^2\left(x_1^{r-4}+x_m^{r-4}\right)\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots+\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}\,u_1^3\left(x_1^{r-6}+x_m^{r-6}\right)+\cdots\cdots+\frac{r(r-1)(r-2)\cdots\left(r-\left(\frac{r}{2}-1\right)\right)}{2.3.4\ldots\frac{r}{2}}\,u_1^{\frac{r}{2}}=1\ .$$

$$x_2^r + x_{m-1}^r + r \cdot u_2 \left(x_2^{r-2} + x_{m-1}^{r-2} \right) + \frac{r(r-1)}{2} u_2^2 \left(x_2^{r-4} + x_{m-1}^{r-4} \right) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{r(r-1)(r-2)\cdots\left(r-\left(\frac{r}{2}-1\right)\right)}{2.3.4\ldots\frac{r}{2}} \cdot u_2^{\frac{r}{2}} = 1$$

ecc.

Quest' ultime facilmente conducono alla

$$(22) \quad \Sigma \cdot x^r + r\Sigma u - \frac{r(r-3)}{2}\Sigma \cdot u^2 + \frac{r(r-4)(r-5)}{2.3}\Sigma \cdot u^3 - \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2.3.4}\Sigma \cdot u^4 + \text{ecc.} = \frac{m}{2}$$

dalla quale, fatto $r = 2, 4, 6$, ecc., si avranno tosto le quantità

$$\Sigma u\,;\ \Sigma u^2\,;\ \Sigma \cdot u^3\,;\ \text{ecc.}$$

in funzione delle $\Sigma\, x^2$; $\Sigma\, x^4$; $\Sigma\, x^6$; ecc., donde colle note formole di trasformazione le D_1; D_2; D_3, ecc., in funzione delle stesse quantità, e quindi dei coefficienti della proposta.

8. Un'eguale semplificazione si avrà nella determinazione delle indeterminate y_1; y_2; y_3 . . . y_n.

Infatti si ha

$$x_n = 1 - x_1\,;\ x_{n-1} = 1 - x_2\,;\ x_{n-2} = 1 - x_3,\ \text{ecc.}$$

$$y_n = y_1\,;\ y_{n-1} = y_2\,;\ y_{n-1} = y_3,\ \text{ecc.}$$

e quindi anche

$$z_n = z_1\,;\ z_{n-1} = z_2\,;\ z_{n-2} = z_3,\ \text{ecc.}$$

Ora poniamo

$$(23) \quad x^m + (1-x)^m = a_0 \cdot x^{\frac{m}{2}} (x-1)^{\frac{m}{2}} + a_1\, x^{\frac{m}{2}-1} (x-1)^{\frac{m}{2}-1} + a_2\, x^{\frac{m}{2}-2} (x-1)^{\frac{m}{2}-2}$$

$$+ a_3\, x^{\frac{m}{2}-3} (x-1)^{\frac{m}{2}-3} + \cdots + 1$$

7. L' osservazione prima del paragrafo precedente ci permette di ridurre alla metà il grado dell' equazione

$$\varphi(x)=0$$

dopo che si sarà essa divisa per $x-\frac{1}{2}$ nel caso di n impari. Noi ora supporremo m, pari, il grado dell' equazione a risolversi, e sarà $m=n$ se n pari, $m=n-1$ se n impari, e allora converrà dividere la $\varphi(x)=0$ per $x-\frac{1}{2}$, e modificare convenientemente i suoi coefficienti: essendo x_1; x_m; x_2; x_{m-1}; ecc. le sue radici, fra le radici esisteranno dunque le relazioni

$$(18)\quad x_1+x_m=1;\ x_2+x_{m-1}=1;\ x_3+x_{m-2}=1;\cdot\cdot\ x_{\frac{m}{2}}+x_{\frac{m+3}{2}}=1$$

Poniamo

$$(19)\quad x_1 x_m=u_1;\ x_2\cdot x_{m-1}=u_2;\ x_3\cdot x_{m-2}=u_3\cdot\cdot\cdot\cdot\ x_{\frac{m}{2}}\cdot x_{\frac{m+3}{2}}=u_{\frac{m}{2}}$$

e chiamiamo

$$D_1;D_2;D_3\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ D_{\frac{m}{2}}$$

i coefficienti dell' equazione che ha per radici u_1; u_2; u_3 . . . $u_{\frac{m}{2}}$, cioè i coefficienti della

$$(20)\quad u^{\frac{m}{2}}+D_1 u^{\frac{m}{2}-1}+D_2\cdot u^{\frac{m}{2}-2}+\cdot\cdot\cdot+D_{\frac{m}{2}}=0;$$

allora la ricerca dei valori di x_1; x_2; x_3; . . ecc. sarà ricondotta alla risoluzione dell' equazione (20), e poi delle corrispondenti (18) e (19).

I coefficienti D_1, D_2, D_3 ecc. si calcoleranno colle note regole di trasformazione osservando che le (18) e (19) danno per r qualunque

$$(21)\quad x_1^r+x_m^r+r u_1\left(x_1^{r-2}+x_m^{r-2}\right)+\frac{r(r-1)}{2}u_1^2\left(x_1^{r-4}+x_m^{r-4}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot\cdot+\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}u_1^3\left(x_1^{r-6}+x_m^{r-6}\right)+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(r-\left(\frac{r}{2}-1\right)\right)}{2.3.4\ldots\frac{r}{2}}u_1^{\frac{r}{2}}=1\ .$$

$$x_2^r + x_{m-1}^r + r \cdot u_2 \left(x_2^{r-2} + x_{m-1}^{r-2} \right) + \frac{r(r-1)}{2} u_2^2 \left(x_2^{r-4} + x_{m-1}^{r-4} \right) + \cdots \cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots\left(r-\left(\frac{r}{2}-1\right)\right)}{2.3.4\ldots\frac{r}{2}} \cdot u^{\frac{r}{2}} = 1$$

ecc.

Quest' ultime facilmente conducono alla

$$(22)\quad \Sigma \cdot x^r + r\Sigma u - \frac{r(r-3)}{2}\Sigma \cdot u^2 + \frac{r(r-4)(r-5)}{2.3}\Sigma \cdot u^3 - \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2.3.4}\Sigma \cdot u^4 + \text{ecc.} = \frac{m}{2}$$

dalla quale, fatto $r = 2, 4, 6$, ecc., si avranno tosto le quantità

$$\Sigma u\,;\ \Sigma u^2\,;\ \Sigma \cdot u^3\,;\ \text{ecc.}$$

in funzione delle Σx^2; Σx^4; Σx^6; ecc., donde colle note formole di trasformazione le D_1; D_2; D_3, ecc., in funzione delle stesse quantità, e quindi dei coefficienti della proposta.

8. Un'eguale semplificazione si avrà nella determinazione delle indeterminate y_1; y_2; y_3 . . . y_n.

Infatti si ha

$$x_n = 1 - x_1\,;\ x_{n-1} = 1 - x_2\,;\ x_{n-2} = 1 - x_3,\ \text{ecc.}$$

$$y_n = y_1\,;\ y_{n-1} = y_2\,;\ y_{n-1} = y_3,\ \text{ecc.}$$

e quindi anche

$$z_n = z_1\,;\ z_{n-1} = z_2\,;\ z_{n-2} = z_3,\ \text{ecc.}$$

Ora poniamo

$$(23)\quad x^m + (1-x)^m = a_0 \cdot x^{\frac{m}{2}} (x-1)^{\frac{m}{2}} + a_1 x^{\frac{m}{2}-1} (x-1)^{\frac{m}{2}-1} + a_2 x^{\frac{m}{2}-2} (x-1)^{\frac{m}{2}-2}$$

$$+ a_3 x^{\frac{m}{2}-3} (x-1)^{\frac{m}{2}-3} + \cdots + 1$$

dove è

$$(24)\left\{\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= \frac{m^2}{1 \cdot 2^2} \\ a_2 &= \frac{m^2(m^2-2^2)}{3 \cdot 4 \cdot 2^4} \\ a_3 &= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6} \\ a_4 &= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2^8} \end{aligned}\right.$$

ecc.

Ciò premesso comincieremo dall' osservare, che le date relazioni fra x_n; ed x_1; x_{n-1} ed x_2, ecc.; z_n e $z_1 \ldots z_{n-1}$ e z_2, ecc., riducono alla metà il numero delle equazioni (14) diventando esse identiche a due a due; quindi per n pari esse diventano

$$(25)\left\{\begin{aligned} &2 \cdot \Sigma \cdot z = \frac{1}{2 \cdot 3}; \ \Sigma \cdot \left(x^2 + (1-x)^2\right) z = \frac{1}{4 \cdot 5}; \ \Sigma \left\{ x^4 + (1-x)^4 \right\} z = \frac{1}{6 \cdot 7} \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \Sigma \left\{ x^{n-2} + (1-x)^{n-2} \right\} z = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}\right.$$

e per n impari, posto $\frac{n+1}{2} = p$.

$$(26)\left\{\begin{aligned} &2 \Sigma z + z_p = \frac{1}{2 \cdot 3}; \Sigma \left\{ x^2 + (1-x)^2 \right\} z + \frac{1}{2^2} \cdot z_p = \frac{1}{4 \cdot 5}; \\ &\Sigma \left\{ x^4 + (1-x)^4 \right\} z + \frac{1}{2^4} \cdot z_p = \frac{1}{6 \cdot 7}; \ldots\ldots \\ &\Sigma \left\{ x^{n-1} + (1-x)^{n-1} \right\} z + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot z_p = \frac{1}{(n+1)(n+2)} . \end{aligned}\right.$$

Ora, in virtù della (23) e delle posizioni (18) (19), le equazioni precedenti si riducono facilmente alle seguenti:

Per n pari

$$(27)\left\{\begin{array}{l}
\Sigma\cdot z=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}=K_0\,;\ \Sigma\cdot u\cdot z=\frac{1}{2}\left\{K_0-\frac{1}{4\cdot 5}\right\}=K_1\\
\Sigma\, u^2\, z=\frac{1}{2}\left\{4\cdot K_0-K_0+\frac{1}{6\cdot 7}\right\}=K_2\,;\\
\Sigma\cdot u^3\, z=\frac{1}{2}\left\{9\,K_2-6\cdot K_1+K_0-\frac{1}{8\cdot 9}\right\}=K_3\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Sigma\cdot u^{\frac{m}{2}}\cdot z=\frac{1}{2}\left\{a_1\cdot K_{\frac{m}{2}-1}-a_2\cdot K_{\frac{m}{2}-2}+a_3\cdot K_{\frac{m}{2}-3}\dots\dots\right.\\
\left.\qquad\dots\dots\dots\pm K_0\mp\frac{1}{(m+2\ (m+3)}\right\}=K_{\frac{m}{2}}
\end{array}\right.$$

e per n impari

$$(28)\left\{\begin{array}{l}
\Sigma\cdot z+\frac{1}{2}\,z_p=K_0\,;\ \Sigma uz+\frac{1}{2^3}\cdot z_p=K_1\,;\ \Sigma uz^2+\frac{1}{2^5}\,z_p=K_2\\
\Sigma\, u^3\cdot z+\frac{1}{2^7}\cdot z_p=K_3\ \dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\ \Sigma\cdot u^{\frac{m}{2}}\cdot z+\frac{1}{2^{m+2}}\cdot z_p=K_{\frac{m}{2}}\ \text{ecc.}
\end{array}\right.$$

Dalla risoluzione di quest' ultime equazioni, si avranno i cercati valori di z, e quindi di y in funzione delle radici della (20).

La soluzione generale è con ciò condotta al processo seguente di calcolo.

Dalle (12) si calcoleranno i valori di A_1 ; A_2 ; $A_3 \dots A_n$, coi quali valori, e col mezzo delle (22), si avranno i valori dei coefficienti D_1; D_2; $D_3 \dots D_{\frac{m}{2}}$ della (20); dopo di che risolta la (20) si otterranno i valori delle u_1; u_2; u_3; ecc., dai quali, mediante le relazioni (18) e (19) i valori delle x_1 ; x_2 ; x_3 ; .... x_n. Finalmente le equazioni (6) (27) e (28) daranno z_1 ; z_2 . . z_n da cui si avranno le y_1; y_2; y_3 . . y_n dividendo la z_1 per u_1 ; la z_2 per u_2, ecc.

9. Applichiamo ora il precedente processo ai casi speciali di $n=2$; $n=3$; $n=4$; $n=5$.

(1) $n=2$.

Dalle (12) si avrà $A_1 = -1$; $A_2 = \frac{1}{5}$; $\varphi(x) = x^2 - x + \frac{1}{5}$.

Quindi quì immediatamente

$$u = \frac{1}{5} \cdot x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right); x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

ossia in frazione decimale

$$x_1 = 0{,}2763932 \; ; \; x_2 = 0{,}7236068.$$

Sarà poi

$$\int_0^1 x \cdot \varphi(x) \cdot dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$

e

$$y_0 = y_3 = \frac{1}{12} \cdot$$

Finalmente le (27) danno tosto $z_1 = z_2 = \frac{1}{12}$ e quindi

$$y_1 = y_2 = \frac{5}{12} \cdot$$

Avremo quindi per un primo grado di approssimazione

$$\text{(A)} \quad \int_0^a f(x) \cdot dx = \frac{a}{12}\left\{f(0) + f(a) + 5\Big(f(x_1 a) + f(x_2 a)\Big)\right\} + \text{H} \cdot a^7$$

(2) $n = 3$

$$A_1 = -\frac{3}{2} \; ; \; A_2 = \frac{9}{14} \; ; \; A_3 = -\frac{1}{14}$$

$$\varphi(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{14}x - \frac{1}{14}$$

e

$$\frac{\varphi(x)}{x - \frac{1}{2}} = x^2 - x + \frac{1}{7}$$

Quindi

$$u = \frac{1}{7}, \text{ ed } x_1 = \frac{1}{2}\left\{1 - \sqrt{\frac{3}{7}}\right\}; \quad x_3 = \frac{1}{2}\left\{1 + \sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$$

ossia

$$x_1 = 0{,}172673164646\,; \quad x_3 = 0{,}827326835354\,; \quad x_2 = 0{,}5$$

$$\int_0^1 x \cdot \varphi(x) \cdot dx = \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{9}{42} - \frac{1}{28} = \frac{1}{280}$$

donde

$$y_0 = y_4 = \frac{14}{280} = \frac{1}{20}.$$

In seguito le equazioni (28) daranno

$$z_1 + \frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{12}\,; \quad \frac{z_1}{7} + \frac{1}{8} \cdot z_2 = \frac{1}{60}$$

da cui

$$z_1 = \frac{7}{180}\,; \quad z_2 = \frac{4}{45}$$

e finalmente

$$y_1 = \frac{49}{180}\,; \quad y_2 = \frac{16}{45}.$$

Quindi sarà

$$\text{(B)} \quad \int_0^a f(x) \cdot dx = a \left\{ \frac{1}{20} \cdot \Big(f(0) + f(a) \Big) + \frac{49}{180} \Big\{ f(x_1 a) + f(x_3 a) \Big\} + \frac{16}{45} f\left(\frac{a}{2} \right) \right\}$$

$$+ \mathrm{H} \cdot a^9$$

(3) $n = 4$

$$\mathrm{A}_1 = -2\,; \quad \mathrm{A}_2 = \frac{4}{3}\,; \quad \mathrm{A}_3 = -\frac{1}{3}\,; \mathrm{A}_4 = \frac{1}{42}$$

$$\varphi(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3} x^2 - \frac{1}{3} x + \frac{1}{42}$$

$$\mathrm{D}_1 = -\frac{1}{3}\,; \quad \mathrm{D}_2 = \frac{1}{42}$$

$$u^2 - \frac{1}{3} u + \frac{1}{42} = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{7}}\right); \quad u_2 = \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{7}}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{1}{7}}}\right\}; \quad x_2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1 - 2.\sqrt{\frac{1}{7}}}\right\}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left\{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{1}{7}}}\right\}; \quad x_4 = \frac{1}{2}\left\{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{1}{7}}}\right\}$$

ossia

$$x_1 = 0{,}116962333129\,; \quad x_2 = 0{,}357394181760$$

$$x_3 = 0{,}642605818240\,; \quad x_4 = 0{,}883037666871\,.$$

Quindi

$$\int_0^1 x \cdot \varphi(x) \cdot dx = \frac{1}{1260} \quad \text{ed} \quad y_0 = y_6 = \frac{1}{30}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{12}\,; \; u_1 z_1 + u_2 \cdot z_2 = \frac{1}{60}$$

da cui

$$z_1 = \frac{1}{120} \cdot \frac{5\sqrt{\frac{1}{7}} - 1}{\sqrt{\frac{1}{7}}}\,; \quad z_2 = \frac{1}{120} \cdot \frac{5\sqrt{\frac{1}{7}} + 1}{\sqrt{\frac{1}{7}}}$$

e finalmente

$$y_1 = \frac{1}{30}\left(7 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right); \quad y_2 = \frac{1}{30}\left(7 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)$$

cioè

$$y_1 = 0{,}189237478149 \;; \; y_2 = 0{,}277429188518$$

quindi

$$\text{(C)} \quad \int_0^a f(x) \,.\, dx = \frac{a}{30}\Big\{f(0) + f(a) + 7\left\{f(x_1 a) + f(x_2 a) + f(x_3 a) + f(x_4 a)\right\} \cdots$$

$$\cdots\cdots - 1{,}322875655532 \cdot \left\{f(x_1 a) + f(x_4 a) - f(x_2 a) - f(x_3 a)\right\}\Big\} \text{H.} + a^{11}\,.$$

(4) Sia finalmente $n = 5$ avremo

$$A_1 = -\frac{5}{2}\,; \; A_2 = \frac{25}{11}\,; \; A_3 = -\frac{10}{11}\,; \; A_4 = \frac{5}{33}\,; \; A_5 = -\frac{1}{132}$$

$$\varphi(x) = x^5 - \frac{5}{2} x^4 + \frac{25}{11} \cdot x^3 - \frac{10}{11} x^2 + \frac{5}{33} x - \frac{1}{132} = 0$$

$$\frac{\varphi(x)}{x - \frac{1}{2}} = x^4 - 2 \cdot x^3 + \frac{14}{11} x^2 - \frac{3}{11} x + \frac{1}{66} = 0$$

quindi

$$D_1 = - \frac{3}{11} \, ; D_2 = \frac{1}{66}$$

$$u^2 - \frac{3}{11} \cdot u + \frac{1}{66} = 0$$

donde

$$u_1 = \frac{1}{22} \left\{ 3 - \sqrt{\frac{5}{3}} \right\} ; \; u_2 = \frac{1}{22} \left\{ 3 + \sqrt{\frac{5}{3}} \right\}$$

e finalmente

$$x_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1}{11}} \sqrt{5 + 2 \sqrt{\frac{5}{3}}} \right\} ; \; x_2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1}{11}} \sqrt{5 - 2 \sqrt{\frac{5}{3}}} \right\}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \qquad ; \; x_4 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{1}{11}} \sqrt{5 - 2 \sqrt{\frac{5}{3}}} \right\}$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{1}{11}} \sqrt{5 + 2 \sqrt{\frac{5}{3}}} \right\}$$

cioè

$$x_1 = 0{,}08488805185986835569$$

$$x_2 = 0{,}26557560273292387323$$

$$x_3 = 0{,}5$$

$$x_4 = 0{,}73442439726707612677$$

$$x_5 = 0{,}91511194814013164432.$$

Sarà poi

$$\int_0^1 x \cdot \varphi(x) \cdot dx = \frac{1}{5544} \, ; \; \text{donde} \;\; y_0 = y_6 = \frac{1}{42}$$

quindi

$$z_1 + z_2 + \frac{1}{2} z_3 = \frac{1}{12}\,; \quad u_1 z_1 + u_2 \cdot z_2 + \frac{1}{8} z_3 = \frac{1}{60}$$

$$u_1^2 z_1 + u_2^2 \cdot z_1 + \frac{1}{32} \cdot z_3 = \frac{1}{280}\,.$$

donde

$$z_3 = \frac{32}{525} \quad \text{e quindi} \quad y_3 = \frac{128}{525}$$

poi

$$z_1 = \frac{11}{1400} \frac{7\sqrt{\frac{5}{3}} - 1}{3\sqrt{\frac{5}{3}} + 2}\,; \quad z_2 = \frac{11}{1400} \cdot \frac{7\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}{3\sqrt{\frac{5}{3}} - 2}$$

e finalmente

$$y_1 = \frac{124 - 21 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}{700}\,; \quad y_2 = \frac{124 + 21 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}{700}$$

cioè

$$y_0 = y_6 = 0{,}02380952380952380952$$

$$y_1 = y_5 = 0{,}13841402369460393029$$

$$y_2 = y_4 = 0{,}21587269060539606971$$

$$y_3 = 0{,}24380952380952380952$$

e finalmente

$$(\mathrm{D}) \quad \int_0^a f(x) \cdot dx = a \Big\{ y_0 \Big(\varphi(0) + \varphi(a) \Big) + y_1 \Big(\varphi(x_1 a) + \varphi(x_5 a) \Big)$$

$$+ y_2 \Big(f(x_2 a) + f(x_4 a) \Big) + y_3 \cdot \varphi\left(\frac{a}{2}\right) \Big\} + \mathrm{H} \cdot a^{13}$$

ecc.

10. Come applicazione numerica, calcoleremo colle formole precedenti il valore del logaritmo iperbolico di due, desumendolo dalla formola

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log.\ 2$$

e ho scelto questo esempio numerico, non già per semplicità di calcolo, ma perchè l' estensione a è l' unità, e la serie a cui conduce è pochissimo convergente. D' altra parte, pel confronto, è noto essere

$$log.\ 2 = 0{,}693147180560.$$

Sarà

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\ ;\quad \text{ed}\quad a = 1$$

d' altra parte essendo $x_1 + x_n = 1$; $x_1 \cdot x_n = u_1$ sarà sempre

$$f\left(x_1 a\right) + f\left(x_n a\right) = \frac{3}{2+u_1}\ ;\ f\left(x_2 a\right) + f\left(x_{n-1} a\right) = \frac{3}{2+u_2}\ ,\ \text{ecc.}$$

(1) Dalla formola (A)

$$log.\ 2 = \frac{1}{12}\left\{1 + \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{11}{11}\right\} = 0{,}693181$$

errore della formola $= + 0{,}000034$.

(2) Dalla formola (B)

$$log.\ 2 = \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{2} + \frac{49}{180} \cdot \frac{21}{15} + \frac{16}{45} \cdot \frac{2}{3}$$

$$log.\ 2 = 0{,}69314815$$

errore della formola $+ 0{,}00000097$

(3) Dalla formola (C)

$$log.\ 2 = \frac{1}{30}\left\{\frac{3}{2} + \frac{11466}{591} - \frac{63}{591}\right\} = \frac{1}{30}\left\{\frac{3}{2} + \frac{11403}{591}\right\}$$

$$log.\ 2 = 0{,}693147208$$

errore della formola $+ 0{,}000000027$

(4) Dalla formola (D)

$$log.\ 2 = \frac{1}{42} \cdot \frac{3}{2} + \frac{31 \cdot 846}{175 \cdot 301} - \frac{21 \cdot 18 \cdot 5}{700 \cdot 301 \cdot 3} + \frac{128 \cdot 2}{525 \cdot 3}$$

$log.\ 2 = 0{,}693147181987$

errore della formola $+\ 0{,}000000001427$.

Come semplice rimarco, osserverò che l'approssimazione si farebbe grandissimamente maggiore se si spartisse il limite 1 in due, cioè da 0 a $\frac{1}{2}$ e da $\frac{1}{2}$ ad 1. Calcolando il *log.* 2 colla formola (B) soltanto, ma desumendolo dalla

$$log.\ 2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{1+x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{1+x} + \frac{2}{3+2x} \right\} dx$$

si trova

$log.\ 2 = 0{,}6931471887$

che è quasi l'approssimazione data dalla (D).

11. Un egual metodo si potrebbe applicare alla risoluzione dei due problemi seguenti:

1.° Dato un certo numero di valori di $f(x)$ ad arbitrio, determinare i coefficienti per cui si deve moltiplicare ciascuno dei detti valori, acciocchè la somma loro rappresenti il valore di $\int_0^a f(x) \cdot dx$ colla maggiore approssimazione possibile.

2.° Dato un certo numero di valori di $f(x)$ ad arbitrio, determinare i rispettivi coefficienti, e intercalare fra i medesimi un dato numero di valori, in modo che l'approssimazione sia la massima possibile.

Seguendo la strada battuta precedentemente, la soluzione dei due problemi accennati è così semplice, che non credo dovermene occupare in ispecialità.

(*Letta li* 26 *maggio* 1850)

SUGLI AVVICINAMENTI DI VARIO ORDINE

DE'

SISTEMI A TRE DIMENSIONI

MEMORIA

DEL M. E. PROF. PIETRO MAGGI.

La scienza della quantità che l'altre sorelle avanzò di sì gran tratto sul comune aringo della ricerca dell'ignoto per mezzo del conosciuto il tutto di sua possanza trae dall'uso di certe, dirò, istrumentali verità da essa dimostrate ed espresse sotto forme di operazioni analitiche le quali ha continuo alla mano. In esse è la natura di quelle relazioni tra quantità e quantità che con nome generale s'appellano funzioni. Talune di queste risultano dalla combinazione più o men varia e complessa delle altre in numero finito, e diconsi composte, tali altre non potrebbero così ottenersi e diconsi semplici.

V'ha tuttavia spesso una successione di operazioni delle classi inferiori la quale come più si prolunga più ancora s'accosta al valore della funzione di classe più elevata fino a differirne d'una quantunque piccola quantità. Essa è quella che chiamiamo la sua espressione in serie, della quale la proprietà caratteristica e per cui va singolare dalle molte altre serie somiglianti ed accostantisi alla detta funzione, sta in ciò che per egual numero di simili operazioni essa più che ogni altra di quelle se le avvicina. A questa l'analista si rivolge come o le invincibili difficoltà o la sufficienza d'un meno esatto risultamento lo fanno declinare dal calcolo della vera funzione ch'essa tende a rappresentare

Di questo medesimo artificio grandemente si vantaggia la geometria sublime quando a meglio conoscere le affezioni delle linee o delle superficie curve di qualsivoglia più generale maniera prende a considerare le posizioni e grandezze d'altre linee o superficie più semplici e di forma ben conosciuta, le quali sopra altre somiglianti si avvicinano a quelle. Essa ne trae moltiplicità di confronti e larga ricchezza d'utili ed eleganti teoremi, della quale innanzi agli altri aprirono la inesausta miniera Monge, Dupin, Lagrange. Quindi, a tacer d'altro, la teorica generale delle curve osculatrici, delle sfere toccanti di vario ordine, quella dell'evolute lineari e superficiali, le proprietà delle curvature di qualsivoglia superficie con tutto il corredo de' teoremi che Poisson Gauss, Chasles, e di freschissimo Transon e Babinet v'aggiunsero.

Questa maniera d'importanti ricerche non fu avanzata più oltre a quella cui potremmo appellare geometria delle forme, ed oltre le funzioni di due variabili. Parecchi problemi e sommamente rilevanti or sorgono tuttavia sul campo delle matematiche applicate, ne' quali è quistione di funzioni di variabili a maggior numero, ma il più sovente di tre. Tali sono le temperature permanenti d'un corpo o le densità d'una massa equilibrata; tali la distribuzione costante del magnetismo o dell'elettrico percorrente un conduttore, tale l'intensità lucida d'un mezzo imperfettamente diafano comecchessia illuminato ed altre più.

Or quello che alle forme geometriche delle linee e delle superficie sono le altre forme pur di linee e di superficie più note messevi a contatto di vario ordine sono a questi ch'io dirò sistemi solidi od a tre dimensioni, gli altri di più semplice legge che possono ne' diversi punti a loro più e più intimamente accostarsi, e meglio farne palese la interna successione dei cangiamenti.

La ricerca pertanto delle principali relazioni analitiche e geometriche per le quali fra loro si legano i sistemi posti in avvicinamento di vario ordine, e i teoremi rispondenti ai già conosciuti per le linee e superficie, è l'oggetto di questo mio scritto, nel quale non lascio di raccogliere qualche giovevole conseguenza ad alcuna delle odierne quistioni di fisica-matematica.

Per maggiore semplicità userò delle seguenti compendiose denominazioni per distinguere l'uno dall'altro i diversi sistemi solidi, prendendole dalla superficie sulla quale la quarta variabile si mantiene d'un valore costante, e dirò ad esempio sistema piano o di primo grado quello per cui la quarta variabile è una funzione lineare delle tre altre, sferico quello ov'eguaglia la somma di tre quadrati d'eguale coefficiente, e similmente pegli altri.

1. Prop. I. Problema. Quali sono le condizioni d'avvicinamento di vario ordine fra due sistemi solidi in un dato punto dello spazio?

Le due equazioni $U = f(x, y, z)$, $V = \varphi(l, m, n)$ rappresentino i due sistemi, dei quali le U, V sono le variabili dipendenti. Avremo dapprima $l = x$, $m = y$, $n = z$ ed $f(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$.

Diansi poscia alle tre coordinate i rispettivi aumenti ω, ϑ, ζ e si svolgano le serie delle due differenze finite. Ne avremo

$$\Delta U = \omega \frac{df}{dx} + \vartheta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dz} + \frac{1}{2} \left\{ \omega^2 \frac{d^2f}{dx^2} + \vartheta^2 \frac{d^2f}{dy^2} + \zeta^2 \frac{d^2f}{dz^2} + 2\omega\vartheta \frac{d^2f}{dxdy} \right.$$

$$\left. + 2\omega\zeta \frac{d^2f}{dxdz} + 2\vartheta\zeta \frac{d^2f}{dydz} \right\} + \text{ecc.}$$

$$\Delta V = \omega \frac{d\varphi}{dl} + \vartheta \frac{d\varphi}{dm} + \zeta \frac{d\varphi}{dn} + \frac{1}{2} \left\{ \omega^2 \frac{d^2\varphi}{dl^2} + \vartheta^2 \frac{d^2\varphi}{dm^2} + \zeta^2 \frac{d^2\varphi}{dn^2} + 2\omega\vartheta \frac{d^2\varphi}{dldm} \right.$$

$$\left. + 2\omega\zeta \frac{d^2\varphi}{dldn} + 2\vartheta\zeta \frac{d^2\varphi}{dmdn} \right\} + \text{ecc.}$$

Le cercate condizioni saranno adunque per l' avvicinamento di prim' ordine le quattro

$$f = \varphi, \frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dl}, \frac{df}{dy} = \frac{d\varphi}{dm}, \frac{df}{dz} = \frac{d\varphi}{dn};$$

pel secondo inoltre le sei

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dl^2}, \frac{d^2f}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dm^2}, \frac{d^2f}{dz^2} = \frac{d^2\varphi}{dn^2}, \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2\varphi}{dldm}, \frac{d^2f}{dxdz} = \frac{d^2\varphi}{dldn}, \frac{d^2f}{dydz} = \frac{d^2\varphi}{dmdn},$$

e così via via.

Generalmente l' avvicinamento dell' ordine r domanderà dunque il numero piramidale d' equazioni

$$1 + 3 + 6 \cdots + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} = \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

e perciò altrettanti parametri ne' due sistemi.

2. Coroll. I. Il sistema $U = f$ sia individuato ma di forma qualsivoglia, e $V = \alpha l + \beta m + \gamma n + \delta$ sia un sistema piano o di primo grado. Questo

rimarrà pienamente determinato dall' avvicinamento di prim' ordine e ne otterremo

$$V = f + \frac{df}{dx}(l-x) + \frac{df}{dy}(m-y) + \frac{df}{dz}(n-z).$$

Così se fosse $V = d^2 - (l-a)^2 - (m-b)^2 - (n-c)^2$ un sistema sferico avente pur esso quattro parametri a, b, c, d, cui l' avvicinamento di prim' ordine basta a determinare, verrebbe

$$V = f - (l-x)^2 - (m-y)^2 - (n-z)^2 - \frac{df}{dx}(l-x) - \frac{df}{dy}(m-y) - \frac{df}{dz}(n-z).$$

3. Coroll. II. Le superficie caratteristiche de' due sistemi posti in qualsivoglia ordine d' avvicinamento si toccheranno fra loro dell' ordine stesso.

E veramente le simili derivate parziali d' una coordinata rispetto le altre due essendo per entrambe le superficie composte in egual modo di eguali quantità dovranno pur esse tornare eguali fino all' ordine dell' avvicinamento de'due sistemi; ciò che appunto stabilisce il toccamento loro dello stesso ordine.

4. Prop. II. Problema. Tra le infinite superficie che si possono condurre pel punto d' avvicinamento di prim' ordine fra due sistemi in tutto determinati, qual' è quella sulla quale essi s' avvicinano di secondo?

Avanzando gli sviluppi delle U V fino ai termini del second' ordine dopo avervi posto $\zeta = \omega z' + \vartheta z_, + \gamma c$, ove gli apici indicano le derivate per x ed y sulla superficie richiesta giungeremo alle tre condizioni:

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} + 2z' \frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz} + z'^2 \frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2} + 2z_, \frac{d^2(f-\varphi)}{dydz} + z^2_, \frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy} + z_, \frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz} + z' \frac{d^2(f-\varphi)}{dydz} + z'z_, \frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} = 0;$$

nelle quali le derivate delle f, φ per le l, m, n sono indicate rispettivamente per le x, y, z cui debbono farsi eguali.

La simultanea sussistenza di queste tre equazioni importa quella dell'altra

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} \cdot \frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2} \cdot \frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} = \overline{\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy}}^2 \frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} + \overline{\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz}}^2 \frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2}$$

$$+\overline{\frac{d^2(f-\varphi)}{dydz}}^2\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2}-2\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy}\cdot\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz}\cdot\frac{d^2(f-\varphi)}{dydz}$$

lo che accadendo, si avranno generalmente due diverse direzioni della chiesta superficie corrispondenti ai doppii valori delle z', $z_{\prime}$.

In ogni caso poi l'equazione stessa di condizione esprimerà la superficie luogo geometrico dei punti ove l'avvicinamento di prim' ordine de' due sistemi può lungo due piani giungere fino al secondo.

5. Coroll. I. Sia il sistema individuato del secondo grado e rappresentato dalla $U=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L$ e l'altro sia invece del primo; vedremo la superiore condizione ridursi alla più semplice $4\,ABC+DEF-D^2C-E^2B-F^2A=0$ la quale significa che le superficie caratteristiche del sistema di secondo grado debbono essere prive di centro.

Messa pertanto, con opportuno cangiamento degli assi coordinati, l'equazione sotto la forma propria di tali superficie $U=By^2+Cz^2+Gx+L$, avremo per determinare la direzione di quella ove ha luogo l'avvicinamento di second' ordine, $Cz'^2=0$, $Cz^2_{\prime}+B=0$, $2z'z_{\prime}C=0$, donde $z'=0$, $z_{\prime}=\pm\sqrt{\left(-\frac{B}{C}\right)}$, la seconda delle quali stringe ancora le superficie caratteristiche del sistema alla sola paraboloide iperbolica.

Con questo la richiesta superficie avrà per piano toccante il perpendicolare a quello della sezione iperbolica della paraboloide, e parallelo all' uno od all' altro degli asintoti della sezione stessa.

Perchè poi fino a termini del secondo ordine, quando ha luogo questo più elevato avvicinamento, un sistema qualsivoglia coincide con quello del secondo grado che di tale ordine se gli accosta, converrà che nel punto considerato le caratteristiche di quest' ultimo sistema siano paraboloidi iperboliche affinchè l'avvicinamento del sistema qualsivoglia con quello di primo grado possa su certi piani giungere fino al second' ordine.

6. Coroll. II. Fatto nella funzione $\varphi\,(l, m, n)$, $l=x$, $m=y$, $n=z$, la $f-\varphi=0$ esprimerà una superficie individuata. Stando i due sistemi solidi nel punto xyz in avvicinamento di prim' ordine, le due derivate prime parziali della $f-\varphi=0$ rispetto le x, y vi diverranno identiche, e per determinare le z' $z_{\prime}$ ad essa appartenenti sarà d' uopo ricorrere alle seconde. Or queste son le medesime testè trovate per le superficie dove le U, V s' avvicinano di se-

cond' ordine : adunque i piani toccanti la $f - \varphi = 0$ nel suo punto doppio xyz saranno pur quelli delle superficie anzidette.

7. Scolio I. Se fossero chieste le condizioni di avvicinamento di prim' ordine fra due sistemi solidi esteso a tutti i punti d' una linea data ci converrà (dette $y = y_x$, $z = z_x$ le sue equazioni) derivare totalmente per x le tre

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dl}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{d\varphi}{dm}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{d\varphi}{dn}$$

dopo messovi per l, m, n le corrispondenti x, y, z. Quindi verranno, dinotate cogli apici le derivazioni per x sulle y, z, le tre nuove equazioni

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} + y'\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy} + z'\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz} = 0$$

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy} + y'\frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2} + z'\frac{d^2(f-\varphi)}{dydz} = 0$$

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz} + y'\frac{d^2(f-\varphi)}{dydz} + z'\frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} = 0.$$

Eliminate le y', z', se ne ottiene la stessa condizione (n.° 4) che rende possibile nel punto xyz, lungo superficie di certa direzione, l' avvicinamento di second' ordine de' due sistemi già avvicinati del primo.

Le linee di continuo avvicinamento di prim' ordine de' due sistemi andranno allora disegnate sovra alcuna delle anzidette superficie.

8. Scolio II. Quando l'avvicinamento di second' ordine fra le U V già avvicinate del primo si voglia non su d' una superficie, ma sopra una linea soltanto, non avremo condizioni generali da adempiere perchè ciò avvenga. E sarà invece per determinare la direzione della sua toccante

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} + y'^2\frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2} + z'^2\frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2} + 2y'\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy} + 2z'\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz}$$

$$+ 2y'z'\frac{d^2(f-\varphi)}{dydz} = 0$$

equazione rispondente ad una superficie conica di secondo grado, se tuttavia potrà essere adempiuta da valori reali delle y', z'.

Quando l'equazione di condizione trovata al n.° 4, abbia luogo, questa superficie si risolve nel complesso de' due piani toccanti la $f - \varphi = 0$. Nel caso

opposto potremo così rivolgere gli assi coordinati da tornarli paralleli ai tre principali della superficie conica, e verrà prima

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy}=0, \frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz}=0, \frac{d^2(f-\varphi)}{dydz}=0,$$

indi

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2}+y'^2\frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2}+z'^2\frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2}=0.$$

9. Scolio III. Se nella differenza $U-V=f-\varphi$, dove alle l, m, n contenute nella φ s'intendano sostituite le x, y, z, prenderemo successivamente ciascheduna di queste tre medesime coordinate come parametro, e come coordinata in sua vece la $U-V$, ne trarremo tre famiglie di superficie esprimenti lo scostamento de' due sistemi ne' diversi piani paralleli ai coordinati, e delle quali quegl' individui che rispondono alle $x\ y\ z$ del punto ove i due sistemi $U-f=0$, $V-\varphi=0$ sono avvicinati di prim' ordine, toccano i tre piani coordinati medesimi nelle rispettive projezioni del detto punto xyz. E difatto pel supposto avvicinamento de' due sistemi abbiamo ad un tempo

$$\frac{d(f-\varphi)}{dx}=0, \frac{d(f-\varphi)}{dy}=0, \frac{d(f-\varphi)}{dz}=0$$

qualunque sia la direzione degli assi coordinati. Se pertanto gli avremo scelti paralleli ai tre della superficie conica poco sopra determinata, sarà di più

$$\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy}=0, \frac{d^2(f-\varphi)}{dxdz}=0, \frac{d^2(f-\varphi)}{dydz}=0.$$

Ma queste sono pure le condizioni che fanno parallele agli assi coordinati le linee di curvatura principale testè dedotte dalla $U-V=f-\varphi$, adunque i tre assi della superficie conica sulle cui rette le $U\ V$ s'accostano di second' ordine vanno paralleli alle linee di curvatura principale delle tre anzidette superficie che porgono la differenza $U-V$, o lo scostamento de' due sistemi sui piani paralleli ai coordinati.

10. Prop. III. Teorema. Parallelamente alle toccanti queste linee di curvatura quando manchi la superficie conica dianzi considerata, l'avvicinamento di prim' ordine fra le $U\ V$ diviene massimo o minimo.

E veramente il termine di second' ordine della $\Delta\,(U - V)$, rivolti gli assi sulle rette ora mentovate, veste la forma

$$\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} + y'^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2} + z'^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2}\right)$$

$$\frac{\omega^2}{2}\left(1 + y'^2 + z'^2\right)\left(\alpha^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} + \beta^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dy^2} + \gamma^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dz^2}\right),$$

dove le $\alpha\ \beta\ \gamma$ valgono i coseni degli angoli che la direzione cui si rapportano le $y'\ z'$ fa coi tre assi.

Risguardando come costante il fattore $\frac{\omega^2}{2}\,(1 + y'^2 + z'^2)$ che vale mezzo il quadrato del piccolo tratto onde ci scostiamo dal punto xyz lungo la presa direzione e che dee pigliarsi in tutte egualmente lungo, noi vedremo questo secondo termine tornare massimo o minimo col trinomio

$$\alpha^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dx^2} + \beta^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dxdy} + \gamma^2\,\frac{d^2(f-\varphi)}{dydz}$$

che si scorge proporzionale al quadrato inverso del raggio d' una superficie di secondo grado avente gli assi di figura stesi sui tre coordinati. Ma essi rispondono a massimi o minimi valori del raggio, adunque lungo di essi il termine di second' ordine e con ciò la differenza $\Delta\,(U - V)$ pei valori almeno piccolissimi di $\omega\sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}$ diverrà massima o minima, e l' avvicinamento delle $U\ V$ conseguentemente minimo o massimo.

11. Scolio. Se l'avvicinamento de' due sistemi giungerà fino all'ordine r, avremo il primo termine residuo della differenza $\Delta\,(U - V)$ considerata lungo una direzione, che fa coi tre assi gli angoli dei coseni $\alpha\ \beta\ \gamma$, della forma seguente

$$\frac{s^{r+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r+1)}\left\{\alpha^{r+1}\,\frac{d^{r+1}(f-\varphi)}{dx^{r+1}} + (r+1)\,\alpha^r\,\beta\,\frac{d^{r+1}(f-\varphi)}{dx^r\,dy} + \text{ecc.}\right\}$$

dove s è la piccolissima lunghezza contata dal punto xyz sulla direzione che si considera.

L' avvicinamento dunque dei due sistemi crescerà ancora d' un ordine lungo le rette caratteristiche della superficie conica del grado $r + 1$ rappresentata dall' equazione

$$X^{r+1}\frac{d^{r+1}(f-\varphi)}{dx^{r+1}}+X^r Y\frac{d^{r+1}(f-\varphi)}{dx^r\,dy}+\text{ecc.}=0$$

purchè ammetta valori reali delle $X\,Y\,Z$; ovvero fra quelli rispondenti alle direzioni ove non passa il grado *resimo* diverrà massimo o minimo sui raggi minimi o massimi d' una superficie del grado $r+1$ la cui equazione sia

$$X^{r+1}\frac{d^{r+1}(f-\varphi)}{dx^{r+1}}+X^r Y\frac{d^{r+1}(f-\varphi)}{dx^r\,yd}+\text{ecc.}=H$$

dove H significa una costante qualunque maggiore di zero.

12. Prop. IV. Problema. Determinare il sistema di secondo grado che s' avvicina di second' ordine all' individuato espresso per l' equazione

$$U=f(x,y,z).$$

La $V=al^2+bm^2+cn^2+2dlm+2eln+2gmn+2hl+2km+2in+H$ rappresenti il chiesto sistema del secondo grado: avremo dalle condizioni già stabilite le dieci equazioni $U=ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2gyz+2hx+2ky+2iz+H$

$$\frac{df}{dx}=2\,(ax+dy+ez+h),\ \frac{df}{dy}=2\,(by+dx+gz+k),\ \frac{df}{dz}=2\,(cz+ex+gy+i)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=2a,\ \frac{d^2f}{dy^2}=2b,\ \frac{d^2f}{dz^2}=2c,\ \frac{d^2f}{dxdy}=2d,\ \frac{d^2f}{dxdz}=2e,\ \frac{d^2f}{dydz}=2g$$

colle quali si determineranno gli altrettanti parametri in funzione della f e delle sue derivate parziali.

Ponendo per maggiore semplicità gli assi coordinati in guisa che venga ad un tempo

$$\frac{d^2f}{dxdy}=0,\ \frac{d^2f}{dxdz}=0,\ \frac{d^2f}{dydz}=0,$$

indi trasportando l' origine al centro del sistema avvicinante sì che torni $h=k=i=0$, avremo

$$U=ax^2+by^2+cz^2+H,\ \frac{dU}{dx}=2ax,\ \frac{dU}{dy}=2by,\ \frac{dU}{dz}=2cz$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 2a, \frac{d^2 U}{dy^2} = 2b, \frac{d^2 U}{dz^2} = 2c;$$

e perciò

$$V - U = al^2 + bm^2 + cn^2 - ax^2 - by^2 - cz^2 = al^2 + bm^2 + cn^2 - \frac{h^2}{a} - \frac{k^2}{b} - \frac{i^2}{c}$$

nella quale ora le h, k, i stanno per le derivate

$$\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz},$$

e le a, b, c per le

$$\frac{d^2 f}{2\,dx^2}, \frac{d^2 f}{2\,dy^2}, \frac{d^2 f}{2\,dz^2}.$$

13. Coroll. I. Poichè le assunte condizioni

$$\frac{d^2 f}{dxdy} = \frac{d^2 f}{dxdz} = \frac{d^2 f}{dydz}$$

sono le medesime per le quali gli assi coordinati si stendono paralleli a quelle direzioni lungo le quali le variazioni di second' ordine della U sono massime o minime, queste medesime direzioni prenderanno anco i diametri principali del sistema di secondo grado avvicinante d' egual ordine il proposto.

14. Coroll. II. Stringendoci a considerare solo quella superficie che passa pel punto d' avvicinamento dove $U = V$ ne troveremo gli assi $2A$, $2B$, $2C$ per le formole

$$A^2 = \frac{h^2 bc + k^2 ac + i^2 ab}{abc} \cdot \frac{1}{a}$$

$$B^2 = \frac{h^2 bc + k^2 ac + i^2 ab}{abc} \cdot \frac{1}{b}$$

$$C^2 = \frac{h^2 bc + k^2 ac + i^2 ab}{abc} \cdot \frac{1}{c}$$

e la lunghezza del raggio R che va al punto stesso d' avvicinamento per la

$$R^2 = \frac{h^2 b^2 c^2 + k^2 c^2 a^2 + i^2 b^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Ora essendo generalmente la variazione di prim' ordine della U secondo una retta inclinata agli assi degli angoli i cui coseni siano α, β, γ, proporzionale al trinomio $h\alpha + k\beta + i\gamma$, noi la vedremo riuscir massima sulla comune normale alle due superficie e per la quale,

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{(h^2 + k^2 + i^2)}}$$

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{(h^2 + k^2 + i^2)}}, \gamma = \frac{i}{\sqrt{(h^2 + k^2 + i^2)}} .$$

Vedremo pure il raggio R (a somiglianza delle tre distanze del punto d' avvicinamento dal centro) valere il rapporto delle due variazioni di primo e second' ordine della U lungo la sua direzione.

Imperocchè essendo i coseni di sua inclinazione ai tre assi

$$\alpha = \frac{hbc}{\sqrt{(h^2 b^2 c^2 + k^2 c^2 a^2 + i^2 a^2 b^2)}}, \beta = \frac{kac}{\sqrt{(h^2 b^2 c^2 + \text{ec.})}}, \gamma = \frac{iab}{\sqrt{(h^2 b^2 c^2 + \text{ec.})}}$$

le dette due variazioni diverranno rispettivamente

$$\frac{h^2bc + k^2ac + i^2ab}{\sqrt{(h^2 b^2 c^2 + k^2 a^2 c^2 + i^2 a^2 b^2)}}, \frac{h^2 ab^2 c^2 + k^2 b a^2 c^2 + i^2 ca^2 b^2}{h^2 b^2 c^2 + k^2 a^2 c^2 + i^2 a^2 b^2}$$

donde il rapporto

$$\frac{\sqrt{(h^2 b^2 c^2 + k^2 a^2 c^2 + i^2 a^2 b^2)}}{abc} = R \cdot (*)$$

(*) Così nelle curve piane il raggio osculatore vale il rapporto fra le due derivate di primo e second' ordine della y riferite alla sua direzione. Avendosi infatti con derivate generali

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'' y' - y'' x'},$$

se vorremo riferirle alla normale dovremo assumere

$$(x'^2 + y'^2) \frac{y'^2}{x'^2}, = 1,$$

donde

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x'^3}{y'^3}, x'' y' - y'' x' = \frac{y'' x'^3}{y'^4}$$

e poscia

$$\rho = \frac{x'^3}{y'^3} \cdot \frac{y'^4}{y'' x'^3} = \frac{y'}{y''} .$$

15. Coroll. III. Lungo questo raggio medesimo è massimo il rapporto fra il quadrato della variazione di prim' ordine e quella della U.

Abbiamo di fatto per una retta qualunque l' espressione

$$\frac{(h\alpha + k\beta + i\gamma)^2}{a\,\alpha^2 + b\,\beta^2 + c\,\gamma^2},$$

la quale derivata parzialmente per le α, β, delle quali γ è risguardata funzione giusta la relazione $1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, ci rende le due

$$(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2)(h\gamma - i\alpha) + (h\alpha + k\beta + i\gamma)(c-a)\,\alpha\gamma = 0$$

$$(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2)(k\gamma - i\beta) + (h\alpha + k\beta + i\gamma)(c-b)\,\beta\gamma = 0:$$

ed esse appunto sono adempiute se pei tre coseni α, β, γ piglieremo i tre del numero precedente.

16. Scolio. Si rapportino le coordinate al primitivo e più generale ternario di assi, e sia ancora per la $U = f(x, y, z)$ espresso il dato sistema.

Se, partendo dal punto xyz, vorremo considerare le variazioni della U secondo una retta inclinata ai tre assi coordinati degli angoli aventi i coseni $\alpha\ \beta\ \gamma$, ci farà mestieri svolgere l'equazione $\Delta\, U = f(x + s\alpha, y + s\beta + z + s\gamma) - f(x, y, z)$ essendo s il brevissimo tratto percorso lungo la scelta direzione.

Gli assi del sistema di secondo grado avvicinante di second' ordine il proposto e con essi il raggio vettore dal centro al punto xyz saranno, in virtù delle cose dimostrate ai precedenti numeri, determinati da condizioni di massimo e minimo cui debbono soddisfare i due polinomii moltiplicati per s e per s^2

Abbiasi ora

$$f = \rho^m F\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right).$$

dove ρ eguaglia $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ ed F simboleggia una funzione qualsivoglia. Facendo le varie derivazioni parziali troveremo dapprima

$$\frac{df}{dx} = m\frac{x}{\rho}\rho^{m-1}F + \frac{\rho^m}{\rho}F'\left(\frac{x}{\rho}\right)\left(\frac{y^2+z^2}{\rho z}\right) = \rho^{m-1}\left(m\frac{x}{\rho}F + F'\left(\frac{x}{\rho}\right)\left(\frac{y^2+z^2}{\rho z}\right)\right)$$

$$\frac{df}{dy} = \rho^{m-1}\left(m\frac{y}{\rho}F + F'\left(\frac{y}{\rho}\right)\left(\frac{x^2+z^2}{\rho z}\right)\right)$$

$$\frac{df}{dz} = \rho^{m-1}\left(m\frac{z}{\rho}F + F'\left(\frac{z}{\rho}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{\rho z}\right)\right),$$

le quali tre quantità ponno, a somiglianza della F esprimersi pel prodotto della potenza $m-1$ di ρ e per tre funzioni dei rapporti $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$. Altrettanto avverrà delle derivate parziali del second' ordine, e di tutti i superiori.

Pertanto nella fatta supposizione sulla forma della f gli anzidetti polinomii che misurano le variazioni di primo e second' ordine della U, in tutti gli altri della serie delle sue variazioni diverranno funzioni delle $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$ moltiplicate per le potenze discendenti ρ^{m-1}, ρ^{m-2}, ρ^{m-3} ecc. Se dunque serbati costanti i detti rapporti $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$, e con essi la direzione del raggio ρ, ne faremo sempre diversa la grandezza, noi vedremo le α, β, γ e perciò le inclinazioni rispondenti agli accennati assi principali ed al raggio vettore nel sistema di secondo grado tornar sempre d' uno stesso valore. Le grandezze poi degli assi medesimi e di quel raggio andranno insieme variando proporzionalmente al rapporto dei due soprascritti fattori della s e della s^2, cioè a $\frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m-2}} = \rho$.

Adunque la famiglia de' sistemi di secondo grado avvicinanti d' egual ordine il proposto ne' successivi punti d' un suo raggio qualunque, si riduce ad un solo individuo, e gli assi delle sue superficie caratteristiche passanti pei punti d' avvicinamento crescono nella diretta ragione del raggio stesso.

Nella propagazione delle onde per entro mezzi omogenei isotropi o birefrigenti è dessa appunto la supposta forma di funzione ch' esprime come quarta variabile il tempo. E consegue dall' esposto le onde anzidette, qual ch' ella ne sia la figura, potersi rappresentare per una successione continua di altre onde di secondo grado e concentriche le quali colla stessa loro velocità le accompagnino.

17. Prop. V. Teorema. Nel sistema individuato proposto tutte le caratteristiche siano una stessa ma sempre diversamente collocata nello spazio. Se un' altra superficie qualsivoglia posta con essa ad un suo punto in contatto dell' ordine r ne accompagni continuamente il moto, se ne produrrà un sistema avvicinante dello stesso ordine il proposto in tutti i punti corrispondenti del contatto delle due superficie.

E veramente essendo il proposto sistema rappresentato dalla $U = f(x, y, z)$, per le x, y, z che la f comprende si pongano i tre quadrinomii

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z + C_1 ; \ \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z + C_2 ; \ \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z + C_3$$

nei quali i nove coseni $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$, $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ legati fra loro dalle sei note equazioni e le tre $C_1\ C_2\ C_3$ sono funzioni determinate dalla U, le $X\ Y\ Z$ rapportandosi ad una posizione particolare d'una caratteristica. Per la supposta proprietà del sistema converrà che la risultante da questa sostituzione cada nell'equazione della caratteristica per quella posizione particolare le cui coordinate sono appunto le $X\ Y\ Z$.

Similmente nella $V = \varphi\ (l, m, n)$ ch'esprime il secondo sistema se porremo

$$l = \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N + C_1$$

$$m = \alpha_2 L + \beta_2 M + \gamma_2 N + C_2$$

$$n = \alpha_3 L + \beta_3 M + \gamma_3 N + C_3$$

avrà luogo la medesima proprietà.

Adunque derivando queste due equazioni così trasformate sia per le U, V (solo apparentemente in esse comprese) sia rispetto le due $X\ Y$ o le due $L\ M$ delle quali Z ed N sono rispettivamente funzioni otterremo due serie di eguaglianze similmente fatte nell'una delle derivate della f rispetto le x, y, z e di quelle della Z rispetto le due $X\ Y$; nell'altra delle derivate della φ per le $l\ m\ n$, e di quelle della N per le $L\ M$.

Ambedue le serie daranno tante equazioni quante appunto sono le derivate parziali della f o della φ sino a qualsivoglia ordine e sotto forma lineare rispetto le derivate medesime. Perchè poi fino all'ordine raggiunto dal toccamento delle due superficie caratteristiche sono tra loro eguali (oltrechè le $L\ M\ N$ alle $X\ Y\ Z$) tutte ancora le derivate della Z per le $X\ Y$ alle simili della N per le $L\ M$, ne consegue che le dette serie d'equazioni in tutto coincidendo salvo che ne' due simboli $f\ \varphi$, le simili lor derivate rapporto le $x\ y\ z$ o le $l\ m\ n$ rispettivamente debbano tornare fra loro eguali: ciò che appunto stabilisce l'avvicinamento de' due sistemi fino all'ordine r del toccamento delle due superficie caratteristiche.

18. Scolio. Più generalmente quando le coordinate dei punti d'una qual-

sivoglia superficie caratteristica del sistema proposto dipendano con data legge da quelle dei punti d' una caratteristica individuata, e colla stessa legge dipendano in un altro sistema i punti delle varie caratteristiche da quelli d' una pure individuata che colla predetta stia in un suo punto al contatto dell'ordine r, anco i due sistemi nei corrispondenti punti di tutte le successive caratteristiche saranno avvicinati dello stesso ordine. Lo che, sulla traccia del numero precedente, giungeremo facilmente a dimostrare.

19. Prop. VI. Problema. Qual è il raggio osculatore della trajettoria ortogonale della famiglia di superficie caratteristiche del sistema $U = f(x, y, z)$?

Essendo la toccante della trajettoria la stessa normale della superficie caratteristica avremo (dette α, β, γ le tre coordinate di quella curva)

$$\beta' = \frac{k}{h}, \gamma' = \frac{i}{h}$$

dove gli apici esprimono le derivate rispetto la α, e le h k i son le stesse dei numeri precedenti. Di qui nuovamente derivando e ponendo mente che le h k i comprendono le x y z le quali poi debbono farsi eguali alle stesse α β γ, dedurremo

$$\beta'' = \left(\frac{k}{h}\right)' = \frac{h\left(\frac{dk}{dx} + y'\frac{dk}{dy} + z'\frac{dk}{dz}\right) - k\left(\frac{dh}{dx} + y'\frac{dh}{dy} + z'\frac{dh}{dz}\right)}{h^2}$$

$$\gamma'' = \left(\frac{i}{h}\right)' = \frac{h\left(\frac{di}{dx} + y'\frac{di}{dy} + z'\frac{di}{dz}\right) - i\left(\frac{dh}{dx} + y'\frac{dh}{dy} + z'\frac{dh}{dz}\right)}{h^2} .$$

E sostituiti per y' z' i loro valori

$$\beta' = \frac{k}{h}; \gamma' = \frac{i}{h}$$

e rammentate le nove

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2} = a, \frac{dh}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dxdy} = 0, \frac{dh}{dz} = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dxdz} = 0$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dxdy} = 0, \frac{dk}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dy^2} = b, \frac{dk}{dz} = \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dydz} = 0$$

$$\frac{di}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dxdz}=0\,,\quad \frac{di}{dy}=\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dydz}=0\,,\quad \frac{di}{dz}=\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dz^2}=c$$

dove per maggiore semplicità gli assi coordinati son posti paralleli a quelli di figura del sistema di secondo grado avvicinante di second' ordine, otterremo

$$\beta''=\frac{k}{h^2}(b-a)\,,\ \gamma''=\frac{i}{h^2}(c-a)\,.$$

Quindi ancora

$$\gamma'\beta''-\beta'\gamma''=\frac{ki}{h^3}(b-c)\,.$$

Abbiamo poi il raggio osculatore cercato

$$R_0=\frac{(1+\beta'^2+\gamma'^2)^{\frac{3}{2}}}{(\beta''^2+\gamma''^2+(\gamma'\beta''-\beta'\gamma'')^2)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

dunque sostituendo

$$R_0=\frac{(h^2+k^2+i^2)^{\frac{3}{2}}}{\left\{h^2k^2(b-a)^2+h^2i^2(c-a)^2+k^2i^2(b-c)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

20. Coroll. I. Se il proposto sistema sarà tale che quello del secondo grado ed avvicinante d' egual ordine, serbando somiglianza di forma e di posizione rispettiva, muti solo di grandezza da un punto all' altro, sia d' una caratteristica medesima, sia di caratteristiche diverse, anco il raggio R_0 cangerà di grandezza colla stessa legge.

Avremo allora di fatto, chiudendo fra parentesi le quantità che si riferiscono ad uno de' due punti e dicendo m il rapporto delle due grandezze lineari del sistema di secondo grado,

$$\frac{h}{a}=m\frac{(h)}{(a)},\ \frac{k}{b}=m\frac{(k)}{(b)},\ \frac{i}{c}=m\frac{(i)}{(c)}\ ;\ a=(a)\sqrt{m},\ b=(b)\sqrt{m},\ c=(c)\sqrt{m}\,.$$

E ne conseguirà egualmente $R_0=m\,(R_0)$.

21. Coroll. II. Dove la trajettoria ortogonale è retta dovremo avere $R_0 = \infty$, e perciò ad un tempo le tre

$$hk\,(b-a)=0,\ hi\,(c-a)=0,\ ki\,(b-c)=0.$$

Di tre guise possono essere adempiute. In primo luogo potranno farsi eguali a zero due fra le h, k, i, ed allora le superficie caratteristiche del sistema di secondo grado avvicinante di second' ordine il proposto porteranno, conservando la loro forma più generale, il comun centro sulla normale al piano toccante.

Potremo in secondo luogo eguagliare a zero l' una soltanto delle h, k, i ed insieme quella tra le differenze $b-a$, $c-a$, $b-c$ che si riferisce ai due assi rimanenti. In questo supposto il sistema di secondo grado avrà un asse parallelo al piano toccante, ma poichè esso piglia ad un tempo la figura di rivoluzione attorno l' asse medesimo, il suo centro cadrà tuttavia sulla normale.

Finalmente si potranno far nulle due (donde sarà pure la terza) fra le differenze $b-a$, $c-a$, $c-b$. Allora le tre variazioni di second' ordine tornando fra loro eguali, le caratteristiche del sistema avvicinante di secondo grado saranno tutte sferiche girate intorno ad un comun centro situato sulla normale alla superficie caratteristica del sistema proposto, il quale lungo la trajettoria che si considera avrà una serie continua d' umbilichi.

Generalmente adunque se il sistema individuato proposto avrà tutte rettilinee le trajettorie ortogonali delle sue superficie caratteristiche, e perciò queste superficie parallele tra loro, i sistemi di secondo grado ed avvicinanti di second' ordine avranno i centri sulle rette trajettorie medesime, e talvolta eziandio andranno dotati di due o di tutti e tre gli assi eguali.

22. Prop. VII. Problema. Quali sono le lunghezze de' raggi delle due sfere toccanti di second' ordine la trajettoria ortogonale ed aventi i centri sulle rette tangenti alle linee di curvatura massima e minima della superficie caratteristica del sistema individuato proposto?

Si dicano ρ_1, ρ_2 i raggi cercati, e p_2, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 le coordinate d' un punto qualsivoglia dell' una o dell' altra sfera, sì che regga

$$\rho_1^2 = (p_1-\alpha)^2 + (q_1-\beta)^2 + (r_1-\gamma)^2$$

$$\rho_2^2 = (p_2-\alpha)^2 + (q_2-\beta)^2 + (r_2-\gamma)^2 .$$

Rammentandoci delle relazioni

$$\beta' = \frac{k}{h}, \gamma' = \frac{i}{h}, \beta'' = \frac{k}{h^2}(b-a), \gamma'' = \frac{i}{h^2}(c-a)$$

trovate nella proposizione precedente e richiamata l'equazione del piano toccante la superficie caratteristica.

$$i(r-z) + k(q-y) + h(p-x) = 0,$$

dette pure φ, ψ le tangenti trigonometriche degli angoli fatti coll' asse delle x dalle projezioni sul piano xy delle toccanti le due linee di curvatura principale, le note condizioni di toccamento di second' ordine ci condurranno alle due espressioni

$$\rho_1^2 = \frac{(h^2+k^2+i^2)^2}{i^2} \cdot \frac{(k^2+i^2)\varphi^2 + 2hk\varphi + h^2 + i^2}{\varphi^2 k^2 (b-c)^2 - 2\varphi hk(b-c)(b-a) + h^2(c-a)^2}$$

$$\rho_2^2 = \frac{(h^2+k^2+i^2)^2}{i^2} \cdot \frac{(k^2+i^2)\psi^2 + 2hk\psi + h^2 + i^2}{\psi^2 k^2 (b^2-c^2) - 2\psi hk(b-c)(b-a) + h^2(c-a)^2}.$$

Ora le due φ, ψ essendo radici di una stessa equazione di secondo grado, se colle lettere m, n distingueremo le parti razionale ed irrazionale, sarà $\varphi = m+n$, $\psi = m-n$, e le due formule innanzi scritte diverranno:

$$\rho_1^2 = \frac{(h^2+k^2+i^2)^2}{i^2} \cdot \frac{\delta + 2Tn}{\Lambda + 2\Phi n}$$

$$\rho_2^2 = \frac{(h^2+k^2+i^2)^2}{i^2} \cdot \frac{\delta + 2Tn}{\Lambda - 2\Phi n}$$

dove

$$\delta = (k^2+i^2)(m^2+n^2) + 2hkm + h^2 + i^2$$

$$T = m(k^2+i^2) + hk$$

$$\Lambda = (m^2+n^2)(b-c)k^2 - 2mhk(b-c)(c-a) + h^2(c-a)^2$$

$$\Phi = mk^2(b-c) - hk(b-c)(c-a).$$

Ma le m n vagliono rispettivamente

$$\frac{B}{2A}\,,\quad \frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}$$

essendo

$$A=(1+z_{,}^{2})\,z'_{,}-z'z_{,}z_{,,}\,,\quad B=(1+z'^{2})\,z_{,,}-(1+z_{,}^{2})\,z''\,,\quad C=(1+z'^{2})\,z'_{,}-z'z_{,}z_{,,}\,,$$

nelle quali gli apici segnano le derivate per le x, y; inoltre, supponendo per agevolezza gli assi così diretti da andar paralleli a quelli del sistema avvicinante di second'ordine, abbiamo

$$z'=-\frac{h}{i}\,,\quad z_{,}=-\frac{k}{i}$$

$$z''=-\frac{ai^2+ch^2}{i^3}\,,\quad z'_{,}=-\frac{hkc}{i^3}\,,\quad z_{,,}=-\frac{bi^2+ck^2}{i^3}\,;$$

sarà dunque sostituendo

$$m=\frac{i^2(a-b)+k^2(a-c)+h^2(c-b)}{2hk\,(b-c)}$$

$$n=\frac{\left\{\left(i^2(a-b)+k^2(a-c)+h^2(c-b)\right)^2+4\,h^2k^2(a-0)\,(b-c)\right\}^{\frac{1}{2}}}{2hk\,(b-c)}\,.$$

Dalle trovate espressioni dei raggi che cerchiamo traggansi le due tutte razionali

$$\rho_1^2\cdot\rho_2^2=\frac{(h^2+k^2+i^2)^2}{i^4}\cdot\frac{s^2-4\,T^2n^2}{\Lambda^2-4\,\Phi^2n^2}$$

$$\rho_1^2+\rho_2^2=\frac{(h^2+k^2+i^2)}{i^2}\cdot\frac{\Lambda\,s-2\,\Phi'\,T'\,n^2}{\Lambda^2-4\,\Phi^2n^2}\,.$$

Fatte le debite sostituzioni avremo finalmente

$$\rho_1^2\,\rho_2^2=\frac{(h^2+k^2+i^2)^3\,\Omega}{h^2k^2i^2(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2}$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{\left((i^2 h^2 (c-a)^2 + i^2 k^2 (c-b)^2 + h^2 k^2 (b-a)^2 \right) \Omega}{h^2 k^2 i^2 (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2}$$

dove

$$\Omega = \left(i^2 (a-b) + k^2 (a-c) + h^2 (c-b) \right) + 4 h^2 k^2 (a-c)(b-c)$$

dalle quali potranno dedursi i chiesti valori delle ρ_2 ρ_2.

23. Coroll. I. Si ha quindi ben tosto, dividendo la seconda per la prima equazione, la somma dei quadrati inversi

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{i^2 h^2 (c-a)^2 + i^2 k^2 (c-b)^2 + h^2 k^2 (b-a)^2}{(h^2 + k^2 + i^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R_0^2}$$

della quale proprietà è facile il persuadersi chi noti come la normale al piano osculatore della curva che si considera, e sulla quale debbono sfilare tutti i centri delle sue sfere toccanti di second' ordine, si stenda sul piano tangente la superficie ond' essa curva è trajettoria ortogonale, e come le toccanti delle linee di massima e minima curvatura che giacciono nel piano stesso comprendano angolo retto.

È poi agevole dal dimostrato al n.° 20 il riconoscere come in quel sistema il cui avvicinante di secondo grado varia solo di grandezza da un punto all' altro sia d' una stessa caratteristica, sia di caratteristiche diverse, anco i due raggi ρ_1 ρ_2 cangino insieme colla stessa proporzione.

24. Coroll. II. Essendo le differenze $a-b$, $a-c$, $b-c$ proporzionali alle tre eccentricità della superficie di secondo grado caratteristica del sistema avvicinante di second' ordine il proposto; ogni volta che l' una o l' altra di dette eccentricità riesca eguale a zero, e perciò l' anzidetta superficie si faccia di rivoluzione, avremo il prodotto ρ_1 ρ_2 infinito. L' uno o l' altro adunque de' centri delle sfere toccanti di second' ordine fino ad ora considerate s' allontanerà infinitamente, ed il piano osculatore della trajettoria ortogonale passerà per la toccante l' una o l' altra delle linee di curvatura principale della superficie ch' essa attraversa.

25. Scolio I. Le due rette toccanti le linee di curvatura massima e minima della superficie caratteristica del sistema individuato sono parallele agli assi della sezione piana fatta nella superficie di secondo grado del sistema avvicinante parallelamente al piano di comune toccamento fra le due superficie,

e perciò in quel piano segnano due direzioni di variazione di second' ordine massima e minima. Donde pure avviene che dove (come al n.° 21), per essere rettilinea la trajettoria ortogonale delle caratteristiche del sistema proposto, il centro di quello di secondo grado cada sulla trajettoria medesima, questa e le toccanti le due linee di curvatura principale seguino le direzioni de' suoi assi geometrici.

Tuttociò consegue dal fatto del toccamento di second' ordine fra le due superficie e dalle note proprietà geometriche di quelle di secondo grado.

Può eziandio facilmente dimostrarsi della seguente maniera.

Detti $p\ q\ r$ i coseni degli angoli che una retta qualsivoglia parallela al piano toccante fa coi tre assi coordinati, ne avremo $hp + kq + ir = 0$. Se inoltre essa dee segnare la direzione di un asse geometrico della sezione pel centro parallela al piano anzidetto converrà che torni massimo o minimo il trinomio $ap^2 + bq^2 + cr^2$. Di qui e dall' altra $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ otterremo le tre

$$ap + bqq' + crr' = 0$$

$$h + kq' + ir' = 0$$

$$p + qq' + rr' = 0$$

dove q' ed r' sono quantità da eliminarsi. Il che facendo giungeremo alla

$$ipq\,(b-a) + hqr\,(c-b) + kpr\,(a-c) = 0,$$

indi levando anco la r coll' aiuto della $hp + kq + ir = 0$ ce ne verrà la risultante

$$\frac{q^2}{p^2}\cdot(b-c)\,hk - \frac{q}{p}\left((c-b)\,h^2 + (a-c)\,k^2 + (a-b)\,i^2\right) - (a-c)\,hk = 0$$

la quale ci dà le due tangenti trigonometriche degli angoli fatti coll'asse delle x dalle projezioni delle rette cercate sul piano xy, e che riescono appunto le due $\varphi\ \psi$ usate nel problema precedente.

26. Scolio II. Si chiamino $\alpha\ \beta\ \gamma$ i tre coseni degli angoli compresi da ciascuna coppia di piani passanti per un asse della sezione testè considerata e per due degli assi principali della superficie di secondo grado. Avremo $\alpha = qr$

$\beta = pr$, $\gamma = pq$, e l' equazione del numero precedente diverrà $h\alpha\ (c-b) + k\beta\ (a-c) + i\gamma\ (a-b) = 0$, che potrà anco scriversi

$$\cos. Nx \cdot \cos. Rx\ (a-b) + \cos. Ny \cos. Ry\ (a-c) + \cos. Nz \cos. Rz\ (b-a) = 0$$

indicando con N il raggio normale alla sezione e con R la retta i cui coseni degli angoli coi tre assi coordinati sono proporzionali agli α, β, γ.

In questa equazione le R, N sono permutabili, e perciò se per brevità chiameremo *retta derivata* da un'altra (che potremo appellare sua *primitiva*) quella i cui coseni d'inclinazione ai tre assi abbiano fra loro lo stesso rapporto che i coseni degli angoli compresi da ciascuna coppia di piani passanti per la primitiva e pegli assi medesimi, vedremo reggere la seguente proprietà :

Riferita la superficie di secondo grado ai suoi diametri principali e tagliata pel centro con un piano, la derivata di un asse di questa sezione e la primitiva del raggio ad essa normale si rispondono in direzione come raggio normale e come asse d' altra sezione.

27. Prop. VIII. Teorema. Intorno il punto x, y, z come a centro si giri una sfera, e segnatovi sopra un triangolo equilatero e rettangolo siano presi i suoi tre vertici v_1 v_2 v_3 l'uno dopo l' altro come poli. Conducansi per v_1 m piani meridiani inclinati fra loro successivamente d' un medesimo angolo $\frac{2\pi}{m}$, indi in ciascuno di essi n raggi comprendenti a due a due gli angoli eguali $\frac{2\pi}{n}$. Si faccia la somma degli mn scostamenti del sistema proposto da quello di primo grado avvicinante dello stesso ordine, ossia delle mn sue variazioni seconde lungo gli altrettanti raggi così condotti, e se ne trovi il medio che diremo M_1 dividendola per mn.

Similmente si faccia pel vertice v_2 conducendo per esso p piani e in ciascuno q raggi equidistanti, indi trovando il medio M_2 di tutti gli scostamenti lungo i raggi medesimi. E pel terzo vertice v_3 si trovi il somigliante medio M_3 fra rs scostamenti lungo gli altrettanti raggi guidati come sopra.

La somma $M_1 + M_2 + M_3$ eguaglierà quella dei tre scostamenti principali.

E veramente, restituita agli assi coordinati la loro più generale posizione e fattili coincidere coi tre raggi che metton capo ai tre vertici v_1 v_2 v_3 lo scostamento de' due sistemi avrà la forma

$$a_1 \text{Cos.}^2 \lambda + b_1 \text{Cos.}^2 \mu + c_1 \text{Cos.}^2 \nu + 2d_1 \text{Cos.}\lambda \text{Cos.}\mu + 2e_1 \text{Cos.}\lambda \text{Cos.}\nu + 2f_1 \text{Cos.}\mu \text{Cos.}\nu$$

dove le $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1$ sono le stesse che al n.° 12 e le tre λ, μ, ν esprimono gli angoli che il raggio, cui lo scostamento si rapporta, fa coi tre assi.

Per v_1 passi quello delle z, per v_2 quello delle y, per v_3 quello delle x. Avremo nella prima costruzione, detto ζ l'angolo che il meridiano qualsivoglia fa col piano delle xz

$$\text{Cos.}\lambda = \text{Cos.}\zeta\ \text{Sen.}\nu \qquad \text{Cos.}\mu = \text{Sen.}\zeta\ \text{Sen.}\nu$$

e perciò sostituendo lo scostamento sul raggio condotto nel meridiano anzidetto ci verrà della forma

$$(a_1 \text{Cos.}^2 \zeta + b_1 \text{Sen.}^2 \zeta + 2d_1 \text{Sen.}\zeta \text{Cos.}\zeta) \text{Sen.}^2 \nu + 2(e_1 \text{Cos.}\zeta + f_1) \text{Sen.}\zeta \text{Cos.}\nu + c_1 \text{Cos.}^2 \nu.$$

Sia ξ l' angolo tra il piano xz e il meridiano a lui più prossimo, ϑ quello fra l' asse delle z e il raggio pure più prossimo a questo nel meridiano medesimo, avremo insieme

$$\zeta = \xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}, \quad \nu = \vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}$$

dove i j sono gl' indici del meridiano, ϑ potendo prendersi diverso pei diversi meridiani. Ciò posto, avremo il medio M_1 dall' eguaglianza

$$M_1 = \frac{1}{mn} \sum_1^m \Delta i \sum_1^n \Delta j \Big\{ \Big(a_1 \text{Cos.}^2\Big(\xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}\Big) + b_1 \text{Sen.}^2\Big(\xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}\Big)$$
$$+ 2d_1 \text{Sen.}\Big(\xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}\Big) \text{Cos.}\Big(\xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}\Big)\Big) \times \text{Sen.}^2\Big(\vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}\Big)$$
$$+ 2\Big(e_1 \text{Cos.}\Big(\xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}\Big) + f_1 \text{Sen.}\Big(\xi + \frac{2\pi(i-1)}{m}\Big)\Big) \text{Cos.}\Big(\vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}\Big)$$
$$\times \text{Sen.}\Big(\vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}\Big) + c_1 \text{Cos.}^2\Big(\vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}\Big)\Big\}$$

nella quale le due sommatorie sono l' una dall' altra indipendenti.

Cominciando dalla prima e notando essere

$$\sum_1^n \Delta j\, \text{Sen.}^2\Big(\vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}\Big) = \sum_1^n \Delta j\, \text{Cos.}^2\Big(\vartheta + \frac{2\pi(j-1)}{n}\Big) = \frac{n}{2}.$$

$$\sum_{1}^{n} \Delta j \,\text{Cos.}\left(\vartheta + \frac{2\pi\,(j-1)}{n}\right) \text{Sen.}\left(\vartheta + \frac{2\pi\,(j-1)}{n}\right) = 0$$

troveremo primieramente

$$M_1 = \frac{1}{2m} \sum_{1}^{m} \Delta i \left\{ a_1 \,\text{Cos.}^2\left(\xi + \frac{2\pi\,(i-1)}{m}\right) + b_1 \text{Sen.}^2\left(\xi + \frac{2\pi\,(i-1)}{m}\right)\right.$$

$$\left. + 2d_1 \,\text{Cos.}\left(\xi + \frac{2\pi\,(i-1)}{m}\right) \text{Sen.}\left(\xi + \frac{2\pi\,(i-1)}{m}\right) + c_1 \right\}$$

poscia in virtù delle stesse formule

$$M_1 = \frac{a_1 + b_1\ 2c_1}{4}$$

Calcoli del tutto somiglianti ci forniranno

$$M_2 = \frac{a_1 + 2b_1 + c_1}{4}\,,\ M_3 = \frac{2a_1 + b_1 + c_1}{4} \text{ donde finalmente } M_1 + M_2 + M_3 = a_1 + b_1 + c_1.$$

Ora dalle note proprietà delle superficie di secondo grado consegue $a_1 + b_1 + c_1 = a + b + c$ le quali si riferiscono ai tre assi geometrici della superficie che misura gli scostamenti; adunque la somma degli anzidetti tre medi eguaglierà quella degli scostamenti principali.

28. Scolio I. In una superficie qualsivogiia toccata da un piano ad un dato punto possono condursi più linee, lungo le quali i discostamenti della superficie stessa dal piano s'esprimono sotto forma del tutto somigliante a quella degli scostamenti de' due sistemi a tre dimensioni.

Seguendo l' analisi del n.° precedente è facile dimostrare che il medio fra quelli che rispondono ad m linee comprendenti eguale angolo $\frac{2\pi}{m}$ vale la somma dei due massimo e minimo. Questi scostamenti poi essendo pure l' espressioni dei raggi di curvatura inversi di quelle linee, se ne trae il teorema testè pubblicato dal sig. Babinet: la somma delle due curvature massima e minima d'una superficie essere la medesima parte delle curvature di m linee comprendenti a due a due l' angolo $\frac{2\pi}{m}$.

Esso così può aversi come caso particolare del teorema qui dimostrato.

29. Scolio II. Se il sistema proposto sarà avvicinato d' ordine dispari su-

periore da un altro sistema, potremo sulle tracce del calcolo precedente, e richiamando le note espressioni delle potenze di seno e coseno in funzione di seni e coseni degli archi multipli, dimostrare somiglianti proprietà fra i medii di molti scostamenti lungo direzioni equidistanti prese a talento e quelli rispondenti a direzioni particolari determinate Se l'ordine d'avvicinamento de' due sistemi sarà pari il medio degli scostamenti presi come sopra tornerà sempre nullo.

E similmente potrà dirsi delle superficie messe a contatto di vario ordine.

30. Scolio III. Nelle quistioni meccaniche e fisiche nelle quali si considera l'equilibrio ed il moto d'un sistema continuo in virtù d'azioni interne operanti a brevissima distanza le forze sollecitanti secondo le diverse direzioni son dovute alle differenze fra le variazioni di prim' ordine lungo le direzioni medesime d'una funzione delle tre coordinate ossia alle sue variazioni dell'ordine secondo. Consegue generalmente dall' esposto negli antecedenti numeri non solo che il sistema di secondo grado ed avvicinante d'egual ordine il proposto adempie nel punto d'avvicinamento alle stesse condizioni di moto e d'equilibrio, ma che inoltre le direzioni degli assi principali di detto sistema avvicinante andranno fornite di proprietà di massimo e di minimo rispetto le forze sollecitanti.

Particolarmente poi nel sistema isotermico in istato di permanenza si ha

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dU}=\frac{\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}+\dfrac{d^2U}{dz^2}}{\left(\dfrac{dU}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dU}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dU}{dz}\right)^2}$$

dove Γ esprime la conducibilità interiore del corpo riscaldato, ed U la temperatura. I due termini della frazione del secondo membro sono detti i due parametri di primo e di second' ordine i quali hanno valore indipendente dalla direzione degli assi. Il denominatore è proporzionale al quadrato della variazione di prim' ordine la quale avviene lungo alla normale della superficie caratteristica; il numeratore è la somma delle tre principali di secondo che hanno luogo parallelamente ai tre assi del sistema di secondo grado avvicinante d'egual ordine.

La proprietà isotermica, cioè quella per cui un punto tanto riceve di calore dalle caratteristiche interiori quanto esso ne comunica alle esteriori.

appartiene anco al detto sistema avvicinante non solo nel punto xyz ma inoltre su tutti quelli delle due curve sulle quali la sua caratteristica dell'equazione $ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{h^2}{a} + \frac{k^2}{b} + \frac{i^2}{c}$ passante per quel punto è tagliata dall'altra superficie di secondo grado ad essa concentrica rappresentata per la $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = h^2 + k^2 + i^2$, e generalmente il sistema di secondo grado in cui la temperatura è funzione lineare del trinomio $ax^2 + by^2 + cz^2$ non possede la proprietà isotermica in ogni suo punto se la conducibilità interiore vi è supposta sempre la medesima. Può tuttavia pur esso riuscire isotermico s' ella invece vi sia diversa dall' uno all' altro, ovvero se cangi dall' una all' altra direzione, nel qual caso l' equilibrio della temperatura è invece espresso dalla

$$A \frac{d^2U}{d^2z} + B \frac{d^2U}{dy^2} + C \frac{d^2U}{dz^2} = 0$$

dove $A\ B\ C$ sono costanti, ed alla quale ben soddisfanno le figure di ellissoidi concentriche, come provano i calcoli del sig. Duhamel, e confermano i nuovi sperimenti del sig. Sénarmont sulla propagazione del calore entro corpi cristallizzati.

La stessa linea d' intersezione poco sopra accennata è fra quelle di eguale conducibilità. Essa è dotata della proprietà geometrica d' avervi costante la projezione del raggio vettore sulla normale alla caratteristica su cui va disegnata.

Infatti chiamato r tal raggio e λ, μ, ν i tre coseni degli angoli ch' esso fa coi tre assi, avremo sulla detta linea ad un tempo le due

$$r^2 (a \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c \nu^2) = \frac{h^2}{a} + \frac{k^2}{b} + \frac{i^2}{c}$$

$$r^2 (a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + o^2 \nu^2) = h^2 + k^2 + i^2.$$

La normale poi sarà inclinata agli assi medesimi degli angoli aventi i tre coseni

$$\frac{ax}{\sqrt{(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)}} = \frac{a\lambda}{\sqrt{(a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2)}}$$

$$\frac{by}{\sqrt{(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)}} = \frac{b\mu}{\sqrt{(a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2)}}$$

$$\frac{c z}{\sqrt{(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)}} = \frac{c \nu}{\sqrt{(a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2)}}$$

donde tratto il coseno dell' angolo coll' anzidetto raggio r, e poscia la sua proiezione sulla normale stessa, avremo

$$P = \frac{h^2 bc + k^2 ac + i^2 ab}{abc \sqrt{(h^2 + k^2 + i^2)}},$$

valore costante.

Perchè poi al punto d' avvicinamento, appellati d_1 d_2 i raggi di curvatura principale della prima superficie, abbiamo generalmente nel punto d' avvicinamento al sistema proposto

$$d_1 d_2 = \frac{(h^2 + k^2 + i^2)^2}{h^2 bc + k^2 ac + i^2 ab},$$

sarà ancora

$$d_1 d_2 = \frac{(h^2 + k^2 + i^2)^{\frac{3}{2}}}{Pabc}$$

e perciò anco il prodotto de' due raggi di curvatura costante. Scelto infatto un altro punto di coordinate $\frac{h_1}{a}$, $\frac{k_1}{b}$, $\frac{i_1}{c}$ che appartengano alla linea della quale parliamo, sarà insieme

$$\frac{i_1^2}{a} + \frac{k_1^2}{b} + \frac{h_1^2}{c} = \frac{h^2}{a} + \frac{k^2}{a} + \frac{i^2}{a} \qquad h_1^2 + k_1^2 + i_1^2 = h^2 + k^2 + i^2 .$$

Se nel proposto sistema isotermico la conducibilità sarà indipendente dalla temperatura ci verrà

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0 = a + b + c,$$

ed allora la superficie caratteristica di quello di secondo grado sarà l' uno o l' altro iperboloide. In tal caso la somma delle variazioni di second' ordine intorno il punto xyz diverrà nulla, e la temperatura non potrà più cangiare.

31. Prop. IX. Teorema.

Attraverso il sistema individuato $U = U(x, y, z)$ si conduca una superficie qualsivoglia espressa colla $z = z(x, y)$ ed in un punto di essa gli venga

avvicinato di prim' ordine l' altro sistema $V = V(l, m, n)$. Quest' ultima equazione conterrà allora le $x\ y$, e perciò fattovi $y = y(x)$ potrà essa rappresentare una famiglia di sistemi della quale sarà x il parametro ed i cui individui s' avvicineranno di prim' ordine al sistema proposto nei successivi punti della linea determinata per le due $z = z(x, y)$ $y = y(x)$. Questi medesimi successivi individui massimamente a due a due s' avvicinano per tutta l' estensione della superficie dell' equazione $V'(x) = 0$, coll' aiuto della quale eliminata la x dalla $V = V(l, m, n)$, si ottiene il sistema che (con buona analogia alla denominazione di avviluppante usata pei contatti) potrebbe chiamarsi il *sistema compenetrante* della famiglia, ed è dotato della proprietà di avvicinarsi di prim' ordine ai varii individui di essa su tutta l' estensione delle corrispondenti superficie della $V'(x) = 0$.

Ora nel punto xyz d' avvicinamento fra il sistema proposto $U = U(x, y, z)$ e l' individuo qualsivoglia della $V = V(l, m, n)$ i due piani toccanti le due superficie $z = z(x, y)$, $V'(x) = 0$ sono due piani coniugati nella superficie di secondo grado che ha il centro nel punto xyz e i cui diametri quadrati inversi misurano gli scostamenti fra i due sistemi U, V.

E veramente le condizioni del supposto avvicinamento danno le tre

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dl} \quad , \quad \frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dm} \quad , \quad \frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dn}$$

ove dopo le derivazioni dee porsi $l = x$, $m = y$, $n = z$.

Abbiamo poi per la famiglia di superficie di continuo avvicinamento degl' individui del sistema $V = V(l, m, n)$, $V'(x) = 0$, ossia

$$\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} + y'\left(\frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz}\right) = 0$$

dove le $p\ q$ esprimono i rapporti derivati $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ tratti dalla $z = z(x, y)$ e l' apice indica la derivazione per y della $y = y(x)$.

Derivandola nuovamente rispetto le due l, m delle quali è funzione la n e significando colle due $h\ k$ gli altri rapporti $\frac{dn}{dl}$, $\frac{dn}{dm}$ otterremo le due

$$\frac{d^2V}{dxdl} + p\frac{d^2V}{dzdl} + q'\left(\frac{d^2V}{dydl} + q\frac{d^2V}{dzdl}\right) +$$

$$h\left(\frac{d^2V}{dxdn} + p\frac{d^2V}{dzdn} + y'\left(\frac{d^2V}{dydn} + q\frac{d^2V}{dzdn}\right)\right) = 0$$

$$\frac{d^2V}{dxdm}+p\frac{d^2V}{dzdm}+y'\left(\frac{d^2V}{dydm}+q\frac{d^2V}{dzdm}\right)+$$

$$k\left(\frac{d^2V}{dxdn}+p\frac{d^2V}{dzdn}+y'\left(\frac{d^2V}{dydn}+q\frac{d^2V}{dzdn}\right)\right)=0$$

nelle quali dopo le derivazioni è da porre $l=x$, $m=y$, $n=z$.

Se dalle

$$\frac{dV}{dl}=\frac{dU}{dx}\,,\quad \frac{dV}{dm}=\frac{dU}{dy}\,,\quad \frac{dV}{dn}=\frac{dU}{dz}$$

le quali per $x=l$, $y=m$, $z=n$ diventano identiche, dedurremo le nove derivate parziali rispetto le xyz, troveremo

$$\frac{d^2V}{dxdl}=\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{d^2V}{dl^2}\,;\quad \frac{d^2V}{dydm}=\frac{d^2U}{dy^2}-\frac{d^2V}{dm^2}\,;\quad \frac{d^2V}{dzdn}=\frac{d^2U}{dz^2}-\frac{d^2V}{dn^2}\,;$$

$$\frac{d^2V}{dydl}=\frac{d^2U}{dydx}-\frac{d^2V}{dldm}\,;\quad \frac{d^2V}{dxdm}=\frac{d^2U}{dxdy}-\frac{d^2V}{dldm}\,;\quad \frac{d^2V}{dxdn}=\frac{d^2U}{dxdz}-\frac{d^2V}{dldn}$$

$$\frac{d^2V}{dzdl}=\frac{d^2U}{dxdz}-\frac{d^2V}{dldn}\,;\quad \frac{d^2V}{dzdm}=\frac{d^2U}{dzdy}-\frac{d^2V}{dmdn}\,;\quad \frac{d^2V}{dydn}=\frac{d^2U}{dydz}-\frac{d^2V}{dndm}$$

ove dopo le derivazioni si farà $x=l$, $y=m$, $z=n$.

Le sei ùltime diverranno le più semplici

$$\frac{d^2V}{dydl}=0\ ,\quad \frac{d^2V}{dxdm}=0\ ,\quad \frac{d^2V}{dxdn}=0$$

$$\frac{d^2V}{dzdl}=0\ ;\quad \frac{d^2V}{dzdm}=0\ ;\quad \frac{d^2V}{dydn}=0$$

se disporremo gli assi coordinati parallelamente a quelli della superficie di secondo grado più fiate menzionata i cui diametri quadrati inversi esprimono gli scostamenti de' due sistemi.

Avremo così, fatto per brevità,

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{d^2V}{dl^2}=\alpha\quad \frac{d^2U}{dy^2}-\frac{d^2V}{dm^2}=\beta,\quad \frac{d^2U}{dz^2}-\frac{d^2V}{dn^2}=\gamma$$

$$\alpha+h\gamma\,(p+qy')=0$$

$$\beta y'+k\gamma\,(p+qy')=0$$

dalle quali eliminata la y', si ottiene fra le $p\ q\ h\ k$ la relazione

$$\alpha\beta + \gamma\beta hp + \alpha\gamma kq = 0.$$

Questa esprime appunto che i due piani $Z = pX + qY$, $Z = hX + kY$ sono due piani coniugati nella superficie di secondo grado $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = H^2$ dove H è una costante qualsivoglia.

Imperocchè le tre condizioni che mantengono a questa equazione la sua forma dopo il cangiamento degli assi coordinati sono le seguenti:

$$\alpha\,\vartheta_1\,\varphi_1 + \beta\,\vartheta_2\,\varphi_2 + \gamma = 0,$$

$$\alpha\,\vartheta_1\,\psi_1 + \beta\,\vartheta_2\,\psi_2 + \gamma = 0$$

$$\alpha\,\varphi_1\,\psi_1 + \beta\,\varphi_2\,\psi_2 + \gamma = 0$$

nelle quali le ϑ_1, ϑ_2, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 indicano le tre coppie di coefficienti della x e della y dell'equazioni in zx ed in zy de' nuovi assi riferiti ai primi.

Ora le due $Z = pX + qY$, $Z = hX + kY$ congiunte alla terza

$$\alpha\beta + \gamma\beta hp + \alpha\gamma kq = 0$$

adempiono quelle tre equazioni.

Facendo infatto coincidere l'intersezione de' due piani espressi dalle $Z = pX + qY$, $Z = hX + qY$ con uno de' nuovi assi, ne avremo

$$\vartheta_1 = \frac{k-q}{kp-hq}\,,\quad \vartheta_2 = \frac{p-h}{kp-hq}\,;$$

poscia adagiando in ciascuno degli stessi piani un altro de' rimanenti due assi

$$p\,\psi_1 + q\,\psi_2 - 1 = 0,\quad h\,\varphi_1 + k\,\varphi_2 - 1 = 0.$$

Eliminate da queste e dalle tre antecedenti le sei $\vartheta_1\ \vartheta_2\ \varphi_1\ \varphi_2\ \psi_1\ \psi_2$ giungeremo alla risultante

$$\left\{ \alpha\,(k-q)^2 + \beta\,(h-p)^2 + \gamma\,(kp-hq)^2 \right\} (\alpha\beta + \beta\gamma\ hp + \alpha\gamma\ kq) = 0$$

il cui secondo fattore posto eguale a zero è la stessa

$$\alpha\beta + \gamma\beta hp + \alpha\gamma kq = 0:$$

il primo accennando il caso particolare di coincidenza della intersezione de' due piani con un asse geometrico.

I due piani adunque rappresentati per le due

$$Z - z = p\,(X-x) + q\,(Y-y)$$

$$Z - z = h\,(X-x) + k\,(Y-y),$$

il primo toccante nel punto xyz la superficie arbitrariamente condotta attraverso il sistema proposto, l'altro toccante nel punto stesso la superficie di massimo scambievole avvicinamento de' successivi individui della famiglia di sistemi avvicinanti di prim' ordine il proposto, la quale famiglia ha per parametro l'ascissa d'una linea qualsivoglia disegnata sulla prima superficie, sono due piani coniugati in quella di second' ordine i cui diametri quadrati inversi misurano intorno il punto xyz gli scostamenti de' due sistemi U V.

I due piani

$$Z - z = p\,(X-x) + q\,(Y-y)$$

$$Z - z = h\,(X-x) + k\,(Y-y)$$

con perfetta rispondenza alle note linee disegnate su d'una superficie e dette *a tangenti coniugate* dal sig. Dupin, possono chiamarsi i due piani a direzioni coniugate condotti nel sistema occupante lo spazio.

32. Coroll. Dal calcolo precedente è leggero il dedurre come la comune intersezione dei due piani

$$Z - z = p\,(X-x) + q\,(Y-y)$$

$$Z - z = p\,(X-x) + k\,(Y-y)\ ,$$

toccante la linea espressa colle due $z = z\,(x,\,y)$, $y = y\,(x)$ e l'altra toccante della linea di successiva intersecazione della famiglia di superficie $V'(x) = 0$ seguino le direzioni dei tre diametri coniugati obbliqui giacenti ne' due piani in questa proposizione contemplati.

33. Prop. X. Teorema.

Siano tre sistemi nello spazio e le loro superficie caratteristiche s'incontrino continuamente sotto un medesimo angolo costante. Le linee di loro scambievole occorso saranno così dirette sulle superficie stesse che le curvature di quelle tre altre linee le quali ne dimezzano gli angoli prese insieme varranno sempre la somma delle tre curvature medie delle tre superficie nel punto d'incontro.

Imperciocchè le

$$U = U\,(x,\,y,\,z)$$

$$V = V\,(x,\,y,\,z)$$

$$W = W(x, y, z)$$

esprimano i tre sistemi. Serbate le U, V, W costanti, si derivi ciascuna parzialmente per x ed y delle quali z si tiene funzione, e si abbiano dalla prima i cinque coefficienti

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$$

eguali rispettivamente alle p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, dalla seconda alle p_2, q_2, r_2, s_2, t_2; dalla terza alla p_3, q_3, r_3, s_3, t_3.

Si dica ζ l' angolo costante sotto il quale s' incontrano le tre famiglie di superficie: dovremo avere insieme

$$\frac{1 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{AB} = \text{Cos.}\ \zeta$$

$$\frac{1 + p_1 p_3 + q_1 q_3}{BC} = \text{Cos.}\ \zeta$$

$$\frac{1 + p_2 p_3 + q_2 q_3}{BC} = \text{Cos.}\ \zeta$$

dove le tre A, B, C stanno invece dei radicali

$$\sqrt{\left(1 + p_1^2 + q_1^2\right)}, \sqrt{\left(1 + p_2^2 + q_2^2\right)}, \sqrt{\left(1 + p_3^2 + q_3^2\right)}.$$

Ora ciascuna di queste tre condizioni dovendo sussistere per tutto il corso della linea di vicendevole incontro delle due superficie alle quali si rapporta, cioè lungo la linea la cui proiezione sul piano xy è rispettivamente rappresentata per l' una o l' altra delle tre

$$y'(x) = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1}, \quad y'(x) = \frac{p_3 - p_1}{q_1 - q_3}, \quad y'(x) = \frac{p_2 - p_3}{q_3 - q_2}$$

ne otterremo derivando per x le tre seguenti del tutto simili l' una all' altra:

$$B^2 \left\{ (r_1 + as_1)(A^2 p_2 - Rp_1) + (s_1 + at_1)(A^2 q_2 - Rq_1) \right\} +$$

$$A^2 \left\{ (r_1 + as_2)(B^2 p_1 - Rp_2) + (s_2 + at_2)(B^2 q_1 - Rq_2) \right\} = 0$$

$$A^2 \left\{ (r_3 + bs_3)(C^2 p_1 - Sp_3) + (s_3 + bt_3)(C^2 q_1 - Sq_3) \right\} +$$
$$(E)$$
$$C^2 \left\{ (r_1 + bs_1)(A^2 p_3 - Sp_1) + (s_1 + bt_1)(A^2 q_3 - Sq_1) \right\} = 0$$

$$C^2 \left\{ (r_2 + cs_2)(B^2 p_3 - Tp_2) + (s_2 + ct_2)(B^2 q_3 - Tq_2) \right\} +$$

$$B^2 \left\{ (r_3 + cs_3)(C^2 p - Tp_3) + (s_3 + ct_3)(C^2 q_2 - Tq_3) \right\} = 0$$

nelle quali le a, b, c simboleggiano i tre soprascritti valori della $y'(x)$, e le R, S, T i trinomii

$$1 + p_1 p_2 + q_1 q_2\,,\ 1 + p_1 p_3 + q_1 q_3\,,\ 1 + p_2 p_3 + q_2 q_3\,.$$

Facciamo la somma delle tre equazioni e stringiamoci a considerare i termini che comprendono i coefficienti di second'ordine r_1 s_1 t_1 dovuti alla prima superficie. Troveremo così

$$r_1 \left\{ B^2 (A^2 p_2 - Rp_1) + C^2 (A^2 p_3 - Sp_1) \right\} +$$
$$(F)$$
$$s_1 \left\{ B^2 (A^2 p_2 - Rp_1)\, a + C^2 (A^2 p_3 - Sp_1)\, b + B^2 (A^2 q_2 - Rq_1) + C^2 (A^2 q_3 - Sq_1) \right\} +$$

$$t_1 \left\{ B^2 (A^2 q_2 - Rq_1)\, a + C^2 (A^2 q_3 - Sq_1)\, b \right\} + \text{ecc.} = 0.$$

Per isvolgere più agevolmente il significato di questa equazione e giungere tosto alla esposta conseguenza si ponga (com'è lecito) il piano xy parallelo al toccante la prima superficie, e l'asse delle x sulla direzione che dimezza l'angolo fra le due tracce de' suoi incontri coll'altre due.

Noi dovremo fare $p_1 = q_1 = 0$, donde $A^2 = 1$, $R = 1$, $S = 1$, poi $c = 0$ e $b = -a$, cioè $p_2 = p_3$, e $\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_2}{q_2}$, la quale porge $q_2 = -q_3$, $B^2 = C^2$.

Dopo le convenevoli sostituzioni ci verrà $2q_2\, aB^2\, (t_1 - r_1) + \text{ecc.} = 0$, od anco perchè

$$B^2 = \frac{1}{\text{Cos.}^2 \zeta} \text{ ed } aq_2 = \sqrt{\frac{(1 - \text{Cos.}\,\zeta)(1 - 2\,\text{Cos.}\,\zeta)}{2}},$$

$$\sqrt{\frac{2(1-\text{Cos.}\,\zeta)(1-2\,\text{Cos}\,\zeta)}{\text{Cos.}^3\,\zeta}}\,(t_1-r_1)+\text{ecc.}=0)\;(G)$$

frattanto essendo generalmente su d' una superficie qualsivoglia

$$z''+2z'_{,}\varphi+z_{,,}\varphi^2=\frac{1}{\rho_{(\varphi)}}\left(1+\varphi^2+(z'+z_{,}\varphi)^2\right)\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}\;.$$

dove ρ esprime il raggio di curvatura sferica d' una linea la cui proiezione sul piano xy si rappresenta per $y'(x)=\varphi$ avremo sulla prima superficie ed accennando con un punto sovrapposto il raggio $\dot{\rho}$ ad essa appartenente

$$r_1+2s_1\varphi+t_1\varphi^2=\frac{1+\varphi^2}{\dot{\rho}_{(\varphi)}}$$

Per $\varphi=0$, cioè per la linea che taglia a mezzo l' angolo delle sue intersezioni colle altre due superficie, sarà $r_1=\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}}$.

Similmente, attribuiti alla φ i due opposti valori 1 e — 1 verranno le due

$$r_1+2s_1+t_1=\frac{2}{\dot{\rho}_{(1)}}\;,\quad r_1-2s_1+t_1=\frac{2}{\dot{\rho}_{(-1)}}$$

donde la somma $r_1+t_1=\frac{2}{\dot{\rho}_m}$ espresso con $\dot{\rho}_m$ il raggio di curvatura media della superficie.

Di qui conchiudiamo $t_1+r_1=2\left(\frac{1}{\dot{\rho}_m}-\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}}\right)$ con che l' equazione (G) diverrà

$$\frac{2\sqrt{\left(2(1-\text{Cos.}\,\zeta)(1-2\,\text{Cos.}\,\zeta)\right)}}{\text{Cos.}^3\,\zeta}\left(\frac{1}{\dot{\rho}_m}-\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}}\right)+\text{ecc.}=0$$

Ora il coefficiente

$$\frac{2\sqrt{\left(2(1-\text{Cos.}\,\zeta)(1-2\,\text{Cos.}\,\zeta)\right)}}{\text{Cos.}^3\,\zeta}$$

non cangia dall' una all' altra faccia dell' angolo triedro, nè punto dipende dalla direzione degli assi coordinati. Inoltre l' equazione (F) è similmente fatta delle

analoghe quantità rispondenti alle tre superficie. Noi avremo adunque dai termini seguenti due altri binomii

$$\frac{1}{\ddot{\rho}_m} - \frac{1}{\ddot{\rho}_{(0)}},$$

$$\frac{1}{\dddot{\rho}^m} - \frac{1}{\dddot{\rho}_{(0)}}$$

moltiplicati pel mentovato coefficiente costante, i quali andranno al precedente aggiunti col proprio lor segno: poichè se non fosse, ed in virtù della posizione degli assi alcuno de' due nuovi binomii dovesse anzi essere sottratto, adagiato il piano xy successivamente sulla seconda e sulla terza superficie, la perfetta simmetria delle tre facce dell' angolo triedro che qui consideriamo, ci fornirebbe altre due equazioni discordanti dalla (G) nè possibili a soddisfare insieme che per la particolare condizione dei tre binomii eguali a zero.

Sarà pertanto

$$\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}} + \frac{1}{\ddot{\rho}_{(0)}} + \frac{1}{\dddot{\rho}_{(0)}} = \frac{1}{\dot{\rho}_m} + \frac{1}{\ddot{\rho}_m} + \frac{1}{\dddot{\rho}_m} \quad (H)$$

che dice appunto fra loro eguali la somma delle tre curvature delle tre linee, ciascuna delle quali dimezza sulla rispettiva superficie l' angolo delle tracce di suo incontro colle altre due, e la somma delle tre curvature medie delle superficie stesse.

34. Scolio I. Se, messo il piano xy parallelo al toccante la prima superficie, l' asse delle x si fosse invece rivolto sulla tangente alla intersezione colla seconda, avremmo avuto la prima dell' equazioni (E) sotto la forma semplicissima $s_1 = s_2 \text{Cos.}^2 \zeta$, la quale sarebbe poi divenuta

$$\frac{1}{\dot{\rho}_{(\varphi)}} - \frac{1}{\dot{\rho}_{(-\varphi)}} = \frac{1}{\ddot{\rho}_{(\varphi)}} - \frac{1}{\ddot{\rho}_{(-\varphi)}}$$

dove φ può essere preso a talento.

Quest' equazione la quale regge indipendentemente dalle altre due (E) ci dimostra che se due superficie s' incontrano sotto angolo costante, la loro traccia sarà così diretta da tornare fra loro eguali le differenze di curvatura di due coppie di linee disegnate sulla superficie stessa, e tutte inclinate alla traccia anzidetta d' uno stesso angolo qualsivoglia.

Se prenderemo per questo l'ottante la trovata relazione si muterà nel-l'altra

$$\frac{1}{\dot{\rho}_{(1)}} - \frac{1}{\dot{\rho}_m} = \frac{1}{\ddot{\rho}_{(0)}} - \frac{1}{\ddot{\rho}_m} .$$

35. Coroll. Le caratteristiche dei tre sistemi s' incontrino continuamente ad angolo retto; le $\dot{\rho}_{(1)}$ $\ddot{\rho}_{(1)}$ dell' equazione testè scritta saranno le $\dot{\rho}_{(0)}$ $\ddot{\rho}_{(0)}$ della (H). Avremo adunque ad un tempo

$$\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}} + \frac{1}{\ddot{\rho}_{(0)}} + \frac{1}{\dddot{\rho}_{(0)}} = \frac{1}{\dot{\rho}_m} + \frac{1}{\ddot{\rho}_m} + \frac{1}{\dot{\rho}_m}$$

$$\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}} - \frac{1}{\ddot{\rho}_{(0)}} = \frac{1}{\dot{\rho}_m} - \frac{1}{\ddot{\rho}_m}$$

$$\frac{1}{\dot{\rho}_{(0)}} - \frac{1}{\dddot{\rho}_0} = \frac{1}{\dot{\rho}_m} - \frac{1}{\dddot{\rho}_m}$$

cioè sommando $\frac{3}{\dot{\rho}_{(0)}} = \frac{3}{\dot{\rho}_m}$ od anco $\dot{\rho}_{(0)} = \dot{\rho}_m$.

Così eziandio $\ddot{\rho}_{(0)} = \ddot{\rho}_m$, $\dddot{\rho}_{(0)} = \dddot{\rho}_m$.

Le linee adunque che dividono per metà gli angoli retti delle tracce d'incontro delle tre superficie sono le stesse di curvatura media; e perciò le tracce medesime sono le linee di curvatura massima e minima. Il qual teorema che da ben lunghi calcoli fa uscire il sig. Lamé nella sua Memoria sulle vibrazioni dell' etere, diviene così un caso particolare di quello ora dimostrato.

36. Scolio II. Quando l' asse delle z coincida colla normale alla superficie caratteristica d' un sistema $U = f(x, y, z)$, i suoi scostamenti dall' avvicinante di primo grado considerati lungo una retta stesa nel piano toccante s' esprimono per la

$$S = \frac{E^2}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx^2} \text{Cos.}^2 \lambda + \frac{d^2 f}{dy^2} \text{Sen.}^2 \lambda + 2 \frac{d^2 f}{dxdy} \text{Sen.} \lambda \text{ Cos.} \lambda\right)$$

essendo E il brevissimo tratto della retta indicata, e λ l'angolo di sua inclinazione all' asse delle x. Ma sulla caratteristica medesima dove U è costante ed inoltre per l' attuale disposizione degli assi $f'(x) = f'(y) = 0$,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f'(z)\, z'' , \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = f'(z)\, z_{,,} \quad \frac{d^2 f}{dxdy} = f'(z)\, z',$$

dunque

$$S = \frac{E^2}{2} f'(z)\,(z'' \,\text{Cos.}^2 \lambda + z_{,,}\, \text{Sen.}^2 \lambda + 2z'_{,}\, \text{Sen.}\, \lambda\, \text{Cos.}\, \lambda) = \frac{E^2}{2} f'(z)\, \frac{1}{\rho} \cdot$$

Se pertanto avremo in luogo di tre sistemi tre famiglie, tutte le cui superficie caratteristiche s'incontrino sotto un eguale angolo costante, le trovate proprietà reggeranno eziandio pegli scostamenti loro dai rispettivi sistemi avvicinanti di prim'ordine, purchè le variazioni delle funzioni corrispondenti lungo le normali siano per tutti d'egual valore.

37. In tutti i calcoli precedenti supponemmo la variabile dipendente separata dalle tre altre : potrebbe tuttavia più generalmente assumersi funzione implicita. Le trovate proprietà generali avranno ancor luogo.

E nel sistema pure di secondo grado avvicinante d'eguale ordine, potrebbono i coefficienti anzichè costanti mettersi funzioni della U. E nuove proprietà, quando siffatte funzioni fossero determinate, uscirebbono da questa nuova ipotesi. Il che potrebbe dare argomento ad altro scritto.

Letta il giorno 22 Giugno 1850.

DI DUE PIANTE NUOVE

DELL' ORDINE

DELLE BROMELIACEE

MEMORIA

DEL M. E. PROF. ROBERTO DE VISIANI.

La famiglia degli Ananassi, nominata delle Bromeliee dal Jussieu, delle Bromeliacee dal Lindley, costituisce un' associazione assai naturale di piante. Sono le Bromeliacee piante vivaci, che vivono e crescono per lo più appiccate ai tronchi degli alberi come false parassite di essi, abitano le regioni comprese fra i tropici, e si distinguono di primo getto da ogni altra per foglie coriacee rigide piegate a doccia, guainanti alla base, disposte in giro sul collo della radice o sulla base del tronco, e spesso armate nel margine di denticelli acuti e spinosi. Sono elleno quasi legnose inferiormente, han radici fibrose, tronco nessuno o semplice, e questo guernito di fogliette minori distribuite a spira d' intorno al medesimo e decrescenti in grandezza quanto più si scostano dalla terra. I loro fiori ora disposti in ispica ritta, ora in grappolo chino, ora in folta pannocchia, talor solitarii o in fascetti, sono cinti alla base di una brattea che in alcune specie è grandissima e vivamente colorita, in altre piccola e secca, son tutti per lo più ermafroditi, talora regolari e composti di un perianzio diviso in sei parti, delle quali le tre più esteriori hanno il colore e la tessitura del calice, le tre più interne l'aspetto della corolla. Ogni fiore racchiude sei stami, di cui l'inserzione è varia nei varii generi, e ad ogni stame soggiacciono, in parecchi generi, attaccate alla base delle divisioni interne del perianzio altrettante minute creste o squamette nettarifere: i loro filamenti sono assottigliati a modo di

lesina, le antere bislunghe a due logge opposte parallele ed aprentisi per lo lungo. Il pistillo ha l'ovario ora affatto libero dal perianzio, ora attaccato ad esso soltanto nella sua parte inferiore, ed ora dal medesimo interamente coperto, composto di tre carpelli connati insieme, per cui contiene tre cavità o logge in cui sono gli ovicciuoli inseriti nel canto interno di esse ed anatropi. Lo stilo suo è semplice e con tre angoli, e porta in vetta tre stimmi or bifidi ora indivisi, soventi volte carnosi e dilatati, diritti o contorti. Il frutto loro ora è una bacca a tre logge che non s' apre se non per putrefazione, ora una capsula secca a tre valve schiudentesi per la sutura interna che ne congiunge gli orli, i quali ripiegandosi verso l' asse del frutto vanno a costituire i doppii tramezzi che dividono le tre logge. I semi, che varian di numero ne' diversi generi, ma per lo più son molto copiosi, hanno forma bislunga, ed il cordone ombelicale che li sostiene sciogliesi in alcuni di essi in fili lunghi somiglianti ai peli d'un pappo, hanno un albume farinoso abbondante, ed un embrione piuttosto piccolo, la di cui radichetta ingrossata è a contatto coll'ombelico.

Jussieu avea compreso nella famiglia delle Bromeliee cinque generi, la *Burmannia* e la *Tillandsia* ad ovario libero, la *Xerophyta*, la *Bromelia* e l'*Agave* ad ovario aderente. Di questi presentemente non ne restano alle Bromeliacee che due, la *Tillandsia* cioè e la *Bromelia*, per essere stati trasferiti più acconciamente gli altri ad altre famiglie, o per esserne stato formato il tipo d' una famiglia propria, locchè avvenne della *Burmannia*. Ma i due generi superstiti vennero spartiti in altri come avealo già presentito il Jussieu, e la *Bromelia* perciò fu divisa in *Bromelia*, *Ananassa*, *Billbergia*, *Hohenbergia*, cui s' aggiunsero i nuovi generi *Aechmea*, *Acanthostachys* ed *Araeococcus*; la *Tillandsia* in *Tillandsia*, e *Caraguata*, cui vennero successivamente ad associarsi i generi nuovi *Guzmannia*, *Bonapartea*, *Pourretia*, *Cryptanthus*, ed altri assai. Le Bromeliacee della prima serie, ossia gli Ananassi veri, si distinguono nettamente da tutte l'altre pel cospicuo carattere d' avere l' ovario aderente al perianzio ed il frutto carnoso e non deiscente; quelle della seconda ossia la *Tillandsia* hanno in quella vece l' ovario libero ed il frutto capsulare secco ed aprentesi per sutura, ed evvi poi una serie intermedia ad esse due, ch' è quella delle *Pitcairnie*, in cui l' ovario è aderente al perianzio solo nella sua metà inferiore, ed il frutto è capsulare e secco come nella *Tillandsia*.

Premesse queste brevi notizie sull' ordine delle Bromeliacee, le quali per le indagini dei viaggiatori e pegli studii di quelli ch'ebbero l' agio di osservarle

vive e fiorenti va arricchendosi un dì più che l' altro di nuovi generi e di numerose e vaghissime specie, mi farò ora a descrivere una pianta singolarissima, ed ancor rara tanto da non trovarsi coltivata che nel giardino del Marchese Marcello Durazzo in Genova e per liberalità di lui nell' orto botanico di Padova, di cui forma un curioso ornamento, ed in pochissimi altri. È una di quelle piante, che per la particolarità loro di vivere negli screpoli delle roccie od appiccate alla corteccia degli alberi senza radice che le accomandi alla terra, o per essere coltivate fra noi sospese in aria ad un filo od in canestri eleganti, sortirono la volgare denominazione di Aeridi ovvero abitatrici dell'aria. Tale si è la *Tillandsia dianthoidea* della Nuova Orléans, e tale quella di cui toccava testè, e ch'io descrissi primamente in una memoria letta all' Accademia delle Scienze di Padova nel 1840, pubblicata nel Volume quinto de' Nuovi Saggi della medesima, chiamandola dal nome del primo suo introduttore in Europa *Tillandsia Duratii.* La è questa una pianta priva affatto d'ogni radice, ed anche di qualsivoglia organo ad essa analogo, rivestita in ogni sua parte di scagliette minutissime membranose bianchiccie o meglio cenerognole, che le danno un color grigio argentino, a foglie carnose lanceolate lineari piegate a doccia al di sopra, convesse o carinate al di sotto, guainanti alla base, distese orizzontalmente, acute ed intere ed inermi nel margine, lungamente assottigliate nell' apice ch' è sempre curvo, e nelle foglie maggiori arricciato ed attorcigliato a guisa di viticcio, con cui la pianta sembra attaccarsi e reggersi ai corpi vicini, decrescenti in larghezza dalle parti inferiori alle superiori, e circondanti spiralmente un tronco cilindrico che esse rivestono interamente delle loro guaine. Questo tronco quando la pianta si dispone a fiorire, ciocchè non accade ogni anno, ed avvenne tre sole volte ne'dodici anni dacchè la si coltiva nell' Orto di Padova, allungasi dai due ai quattro palmi, si assottiglia, ed è coperto di guaine sempre più strette, dalla sommità delle quali sorge divergendo la lamina della foglia, ch' è sempre più piccola, lineare ed acuta. In vetta ad esso tronco sono i fiori disposti in pannocchia serrata, composta di spiche peduncolate compresse, fornite alla base di una o più brattee bislunghe ottuse e guainanti, più brevi della spica, e dello stesso colore argentino cinereo che notammo esser proprio all'intera pianta. In ogni spica che talvolta è semplice, tal'altra ramosa, i fiori sono da tre a sei o poco più, sessili, distici, alterni e molto ravvicinati, ed ogni fiore è ravvolto alla base in una brattea simile a quella che guernisce ogni spica. È formato il medesimo di un perianzio partito profondamente in sei fo-

glioline, delle quali le tre più esteriori embriciate a spira, accartocciate, bislunghe, ottuse, liscie, coriacee, verdi, un po' lividiccie all'apice, più lunghe della brattea, aderenti fra di loro alla base e simulanti un calice nella struttura e nel colorito: le tre più interne libere fra di loro, ipogine, similissime a' petali d'una corolla cariofillèa e per ciò con unghia lineare scanalata bianca, che superiormente si allarga in una lamina quasi rotonda, ondeggiata, distesa orizzontalmente od arricciata all' ingiù, di colore violetto pallido ed esalante un gratissimo odore di violaciocche. Entro a queste sorgono gli stami, che son sei, inseriti sotto l'ovario, non hanno squame alla base, i lor filamenti sono lanceolato-lineari, liberi e piani inferiormente, le antere bislunghe ottuse smarginate alla base, e poco sopra di questa inserite sul filamento ed erette. Il pistillo consta di un ovario libero, bislungo, nitido, verdognolo, ottusamente trigono, cogli angoli inferiormente appianati, con tre solchi profondi, a tre logge con molti ovicciuoli accumulati lungo l' angolo centrale di esse ed orizzontali; di uno stilo grosso piramidale a tre angoli ottusi alternanti con altrettanti solchi ed affatto liscio; di uno stimma profondamente diviso in tre lobi grossetti brevissimi piegati a doccia e coperti di minuta peluria. Il suo frutto è una capsula lineare-bislunga, acuminata, coriacea, triangolare, a tre solchi, a tre logge, a tre valve, con molti semi di forma lineare ingrossantesi all' apice, sostenuti da un pedicello cinto da peli papposi, lunghi, dentellati, e per esso attaccati al fondo della casella.

Da questa descrizione in parte tratta dalla suddetta Memoria, nella quale però io non avea potuto descrivere il frutto maturo, che vidi soltanto nel 1846 nel giardino del Marchese Durazzo in Genova, ritraesi come questa pianta per molti caratteri disparesi dalla Tillandsia, del che io avea sospettato già nella seconda descrizione datane in quel libro che intitolai: *L' Orto botanico di Padova descritto ed illustrato nel* 1842 p. 148. Perlocchè essendomi venuto fatto di completarne l' analisi e chiarirne più esattamente i caratteri, trovo presentemente di doverla separare dalle Tillandsie, formandone un nuovo genere, che per la singolarità sua di non mettere radici, almeno fra noi, chiamerò *Phytarrhiza*, descrivendolo come segue:

PHYTARRHIZA *Vis.*

CHAR. Perianthium liberum sexpartitum, laciniis exterioribus calycinis arcte spiraliter convoluto-imbricatis, aequalibus, basi coalitis; interioribus peta-

loideis liberis, unguibus elongatis rectis basi nudis, lamina reflexo-patente. Stamina sex hypogyna, filamentis lanceolato-linearibus, basi planis, liberis, antheris oblongo-linearibus, paullo supra basim sagittato-emarginatam filamento insertis, erectis, polline ovali. Ovarium liberum trisulcum triloculare, ovulis plurimis lineari-oblongis in angulo loculorum centrali secus axim ovarii aggregatis horizontalibus. Stylus pyramidatus trisulcus obtuse trigonus. Stigma profunde trifidum, lobis crassiusculis brevissimis complicatis puberulis. Capsula coriacea triangularis trisulca oblongo-linearis apice acuminata, loculicide trivalvis, valvis endocarpio mox secedente duplicatis navicularibus, marginibus introflexis septa constituentibus. Semina plurima lineari-clavata stipitata, stipite pilis longis papposis denticulatis cincto, fundo capsulae inserta. — Ord. *Bromeliaceae* Juss. — Class. *Hexandria*, Ord. *Monogynia* L. —

Obs. Differt a *Tillandsia* L. laciniis perianthii exterioribus aequaliter divisis, nec duabus altius connatis; interioribus distinctis liberis, nec basi in tubulum convolutis connatisve; antheris erectis nec incumbentibus, et stylo pyramidato nec filiformi. Magis vero discrepat a *Pourretia* R. et P. praeter antheras erectas et stylum pyramidatum, stigmatibus brevissimis crassis nec linearibus.

Spec. *Phytarrhiza Duratii* Vis. cum icon.

Syn. *Tillandsia Duratii* Vis. illustr. delle piante dell'Orto bot. di Pad. in Nuovi saggi dell' Accad. di Pad. Vol. V. pag. 271 *Tillandsia? Duratii* Vis. in Orto bot. di Pad. descr. ed illustr. pag. 148.

Descr. Planta omnis argenteo-aut cinereo-lepidota, arrhiza, foliis inferioribus lanceolato-subulatis crassis canaliculatis inermibus, subtus convexis carinatisve, patulis recurvis aut circinatis, caule florifero multo brevioribus, caulinis bracteaeformibus adpressis brevissimis, panicula terminali contracta compressa e spiculis 3-6-floris bracteatis pedunculatis, floribus alternis distichis approximatis uni-bracteatis sessilibus. Flores pallide violacei *Matthiolam incanam* redolentibus. Floret in calidario mense Majo. Hab. . . .

Un' altra Bromeliacea, di cui intertenni già la Sezione botanica del nono Congresso degli scienziati italiani raccolti l' anno 1847 in Venezia, si è quella pianta singolare pel colore di rame che ad essa è proprio, e per le fascie di color bianco che ne attraversano le foglie, la quale si coltiva da alcuni anni negli orti botanici sotto il nome di *Tillandsia zonata*. Questa pianta ha radici

perenni e fibrose, nè sorge da terra più di due pollici, benchè vi si spanda assai colle foglie. Sono esse sdrajate sul suolo, stese o ricurve, guainanti alla base e disposte a rosetta, hanno forma lanceolato-bislunga, sono coriacee dure ondeggiate, seghettate nell' orlo a denticelli spinosi, acuminate e cuspidate alla cima, nel rovescio striate e coperte uniformemente d' una forfora bianca composta di squamette minute in ambe le faccie: hanno un color rosso bruno in una delle varietà, che perciò chiamano *Tillandsia zonata fusca*, verde nell' altra detta *T. zonata viridis*, ma sì in questa che in quella listate a traverso nel diritto da fascie flessuose formate esse pure di squamette minime orbicolari bianchiccie o giallognole, sagrinate, ombilicate nel mezzo, per lo qual punto soltanto esse s' appigliano inferiormente alla foglia, restando libere agli orli. Non ha tronco distinto, e sembra tutta formata di un fitto cespo di foglie embriciate ed invaginate l' una nell' altra. Nelle ascelle di queste svolgonsi i fascetti dei fiori che vi stanno fitti e serrati, e son sessili brevi in modo da restar quasi nascosti. I fascetti laterali sono compressi e contengono da 3 a 5 fiori, il centrale è più regolare e più denso. Ogni fascetto è framezzato e circondato di brattee membranose o scariose, brune e segnate da linee più scure, son bislunghe, un poco acute e nell'orlo superiore lanuginose. Oltre le brattee comuni al fascetto intero, che n' ha di molte, ogni fiore ne ha una o due per ciascuno simiglianti alle prime, ma un po' più strette. Il perianzio del fiore è costituito da due verticilli, il più esterno de' quali, che simula il calice ed alterna coll' altro, è verde, ha forma di tubo triangolare o di prisma, e talora è schiacciato, è costituito di tre foglioline, che pe' loro margini trasparenti aderiscono insieme, due per un tratto più lungo, la terza più brevemente, sono libere all' apice ed ivi lanceolate, piegate a doccia, appuntate, lustre. Le foglioline del verticillo interno ritraggono della corolla, son bianche, bislunghe, più larghe all' apice ch' è alquanto acuto, distese quasi orizzontalmente e striate, ristrette verso la base ove non hanno squame, ma poco sotto della metà presentano nel lato interno un solco o canaletto formato da due ghiandole bislunghe che stanno una per lato, e in questo solco è compreso per breve tratto un filamento stamineo. Le foglioline interne nel primo sbocciar del fiore sono leggermente aderenti fra loro nella parte inferiore e quasi a foggia di tubo, si distaccano poscia e restano separate. Quanto agli organi sessuali i fiori centrali, e fra questi que' soli che sbocciano i primi, son maschi, perchè lo sviluppo dello stilo e degli stimmi è incompleto : gli altri tutti sono ermafroditi. Hanno questi sei stami a filamenti fatti a lesina ed ottusi, de' quali tre nascono fra le foglio-

line interne del perianzio, tre ad essi alterni sorgono sopra la base delle foglioline suddette immersi nel solco nettarifero sopradetto e ad esse attaccati per breve tratto, ove dalle suddette due glandule bislunghe e conniventi sono abbracciati e quasi nascosti. Le antere sono bislunghe, a due logge, bilobe alla base, attaccate pel dorso ed incombenti, larghe quanto il filamento che le sostiene, divise da un connettivo lineare, ottuse, e contenenti un polline a granella liscie ed ovali. Il pistillo ne' fiori centrali spesso non ha che un brevissimo rudimento di stilo diviso in due o tre lobi abortiti, ma il suo ovario è pieno di ovuli non dissimili da quelli immaturi che trovansi ne'fiori laterali. In questi invece, oltre gli stami sopra descritti, sonovi tre stimmi bislungo-lineari piani diritti spiegati, trasparenti e rosicchiati nel margine, talora fessi nell'apice; uno stilo triangolare, più grosso verso la cima ed ivi profondamente diviso in tre; un ovario ovato, trigono o compresso, rivestito sino alla sommità dal perianzio, carnoso, a tre logge, nel centro del quale sorge la colonnetta che porta i tramezzi, ed è più grossa ovata e nuda alla base, assottigliata e fornita di ovicciuoli verso la sommità. Gli ovuli sono molti ed attaccati alla stessa nell' angolo centrale di ogni loggia, sono orizzontali, rotondeggianti, diafani e sostenuti da uno stipite bianco ma senza peli, che scorre attaccato a un lato dell' ovicciuolo costituendovi un *rafe* bianco e largo. Non ho potuto averne frutta mature.

Avendo riconosciuto come per alcuni de'caratteri sopradetti la pianta fin qui descritta non poteva essere una *Tillandsia* io avea proposto nel 1847 di formarne un novello genere, cui dato aveva il nome di *Pholidophyllum*. Osservazioni e studii posteriori mi fecero conoscere che la stessa poteva rientrare nel genere *Cryptanthus* fondato dal sig. Klotsch nella Gazzetta dei Giardini dei sigg. Otto e Dietrich, da cui non differisce che pel singolare carattere di avere i filamenti alterni degli stami inchiusi in quel solco formato da due ghiandole, che dissi osservarsi nelle foglioline interne del perianzio. Perlocchè nell'atto ch' io ritratto il genere da me proposto, arricchisco il genere *Cryptanthus* di Klotsch d' una novella specie da nominarsi

Cryptanthus zonatus Vis.

C. foliis superne squamis orbicularibus umbilicatis confertis transverse zonatis. — Syn. *Pholidophyllum zonatum* Vis. sem. rar. H. Patav. 1847 p. 4. — *Tillandsia zonata* Hort. var. viridis.

β. *fuscum*: foliis fusco-aeneis. = Syn. *Tillandsia zonata* var. *fusca* Hort. Hab. . . . . colitur in hortorum calidariis. Floret aestate. Fl. albi. Perenn.

(*Letta il 23 Giugno* 1852)

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

a Fiore con brattee in bottone
b Estivazione o bocciamento del fiore
c Fiore con brattee sbocciato
d Foglioline interne del perianzio
e Stami e pistillo
f g Stami ed antera ingranditi
h Granella di polline ingrandite
i Sommità dell' ovario collo stilo
l Sezione orizzontale del frutto
m Diagramma del fiore.

Tab. I

Phytarrhiza Duratii Vis.

DELLE DOTTRINE
DI GIAMBATTISTA VENTURI
INTORNO
AI COLORI ACCIDENTALI OD IMMAGINARII

Relazione ed osservazioni

DEL M. E. PROF. FRANCESCO ZANTEDESCHI.

Non sarà gravoso e discaro, illustri Colleghi, che io tenga breve ragionamento delle dottrine dei nostri Italiani, intorno ai colori subbiettivi, accidentali od immaginarii, dopo avere udito dall'onorevole signor professore Minich erudita dissertazione di quanto fecero e scrissero i principali fisici di oltramonti in questo stesso argomento. Io, che ho consumato gran parte della mia vita nell'investigazione e discoprimento dell'antica sapienza italiana, non posso rimanere mutolo e silenzioso innanzi al vostro cospetto in argomento, che da anni ho studiato. L'Italia non è così povera ed orba di originali esperienze ed osservazioni, quale parrebbe essere, leggendo le scritture degli stranieri ed ancora degli stessi Italiani; anzi essa non è a veruna altra nazione seconda. Io dirò in queste mie osservazioni delle dottrine di Giambattista Venturi, riserbandomi di parlare degli esperimenti di altri nelle future adunanze. Santo amore di Patria mi spinge a rivendicare quella gloria, che le viene denegata o disconosciuta dagli stessi suoi figli. Io adempirò in altra adunanza al dovere assuntomi di esporre a questo Istituto i risultamenti delle mie nuove esperienze sulla elettricità fisiologica dei vegetabili o chimico-organica delle piante, che per straordinarie occupazioni non ho potuto recare a compimento.

Giambattista Venturi lesse una Memoria sui colori immaginarii al principio

dell'anno 1786 in un privato convegno di letterati in Modena, pella quale ebbe dal sig. marchese Gherardo Rangoni la medaglia di 50 zecchini, che in quel convegno dispensava ogni anno all'autore del miglior scritto, che si presentava. Rangoni era uomo di Stato, insigne per dottrina, per umanità, per zelo del pubblico bene. La sua casa era tempio di civile e naturale sapienza. Felice ed avventurato quel Regno, che a ministri di Governo ha uomini di tale tempera e di tanta virtù.

Di questa Memoria pubblicò egli un estratto in otto proposizioni nella sua *Indagine fisica sui colori*, che venne pubblicata in sulla fine del secolo scorso e ristampata nel 1801 in Modena.

Incomincia il celebre nostro professore coll'osservare, che non da Kirkerio, come fece Priestley nella sua Storia dell' Ottica, ma bensì da Aristotele si deve ripetere l'osservazione di que' colori, che rimangono impressi o compariscono nuovamente nell'occhio, dopo che è cessata l'azione diretta della luce esterna sulla retina. Nel capo secondo *de Somniis* il sommo Stagirita ne parla in un modo distinto. Se noi, dice Aristotele, fissiamo lo sguardo nel sole, od in qualsiasi corpo rilucente, e quindi poscia rivolgiamo gli occhi ad altro obbietto, comparisce su questo, in direzione della vista, un color simile all'osservato da prima; il qual colore dopo trasformasi in rosso, e poi cambia a paonazzo, e finalmente volge al bruno e dileguasi (*pag.* 935, *Venetiis* 1588). Non è dunque vero, che dei colori accidentali, come scrisse Plateau in un articolo che trovasi inserito alla pagina 490 del T. II del *Trattato della luce* di Herschel, Parigi 1833, si debbano le prime osservazioni a Buffon, la Memoria del quale trovasi inserita negli Atti della Accademia delle Scienze di Francia del 1743. Anzi giustizia vuole, che alle osservazioni di Buffon si facciano precedere quelle di Boyle che trovansi nella sua opera dei Colori, e di Newton, che si hanno nella sua lettera del 30 giugno del 1691 diretta a Locke intorno alle immagini determinate nell'occhio dalla luce solare. E qui debbo osservare che le immagini accidentali in quanto a' colori non rispondono a quelle riferite da Newton, il quale vide ad intervalli l'immagine del sole; ma non però colle alternative di macchie oscure, come fu riferito da quello scrittore. Sono queste differenze di osservazione della più alta importanza per quelle necessarie deduzioni, che io avrò a fare intorno alla teoria ricevuta nelle scuole dei colori accidentali. E non debbo neppure dimenticare che Jurin ha notato le apparenze bianche od oscure succedersi alla contemplazione degli oggetti neri o bianchi. Fatto dal nostro Venturi il cenno storico delle dottrine Aristoteliche

e ricordati fra i moderni Buffon, Schaeffer, Godart, Darwin, stabilisce la prima proposizione:

I colori veri lasciano dopo sè nell'occhio una medesima specie di colore immaginario, sieno essi puri o composti.

Avverte il Venturi, che le esperienze di Buffon, dello Schaeffer e di altri moderni furono fatte sopra colori impuri e composti di pressochè tutte le specie di raggi; ancorchè essi trattenessero per qualche tempo lo sguardo immobile sopra un pezzo di carta o di drappo o di panno tinti di un dato colore ed illuminati da un conveniente grado di luce. Il Venturi per converso istituì i suoi esperimenti con colori puri od appartenenti a un dato breve spazio dell'immagine prismatica; sia estraendoli dal raggio bianco per mezzo del prisma, sia filtrandoli, per così dire, attraverso sostanze trasparenti colorate; e n'ebbe costantemente quelle medesime tinte immaginarie successive, che nascono da un colore vero bensì, ma composto di molti raggi eterogenei fra loro e distanti nella scala prismatica. Dalle sue esperienze fatte con questo metodo, rilevò che il colore immaginario riferito al cerchio prismatico di Newton, tiene sempre una postura opposta a quella del color vero, che lo ha preceduto e prodotto, come appare dalla seguente tabella:

Colore vero guardato in luce conveniente, sia esso puro o formato di raggi eterogenei.	*Colore immaginario, che nasce dopo avere tenuto immobile per qualche tempo lo sguardo nel suo vero corrispondente.*
Rosso	Verde-azzurro
Dorato.	Indaco
Giallo-verde	Violetto
Verde-azzurro	Rosso
Indaco	Dorato
Violetto	Giallo-verde.

Nominando qui il Venturi due colori insieme intende di rappresentare la tinta pura intermedia ai due nominati. Questi colori nei fondamentali convengono con quelli che a'nostri giorni vennero descritti nell'Enciclopedia di Edimburgo t. I, pag. 90. Prosegue il Venturi osservando che, *i colori immaginarii della tabella precedente nascono e continuano nell'occhio, sebbene sia questo trasportato*

alla più profonda oscurità. La maniera colla quale i fisici prima del Venturi fecero i loro esperimenti, suggerì ad alcuno di essi una spiegazione dei colori immaginarii, la quale, comunque elegante a prima vista si mostri, tuttavia all'ingegno perspicace del Venturi parve non potersi assolutamente sostenere. Imperocchè questi fisici solevano fissar l'occhio sopra una pezza o macchia colorata collocata in campo illuminato dalla luce del giorno; appresso essi rivolgevano lo sguardo a qualche altro luogo di esso campo, ed osservavano sorgere il colore fantastico figlio del color vero di quella macchia secondo la tabella del Venturi che ho riferita. Egli all'incontro fece le sue esperienze conservando l'occhio nelle tenebre le più perfette, nelle quali non giugneva raggio di luce. « La camera, egli scrive, era perfettamente oscurata, come per le esperienze ottiche di Newton; le finestre chiuse a doppia serraglia; nè vi entrava che per un tubo ed un piccolo foro quel sottil raggio di luce, dal quale traevasi un solo color prismatico puro. Distendevasi questo in un cerchietto di carta attaccata sopra un velluto nero, e non più larga del colore medesimo. Dopo aver tenuto l'occhio immobilmente fisso in quel cerchietto colorato mi rivolgeva poi tosto all'angolo più tenebroso della camera altronde oscurata, e mi copriva con panno nero a più doppi le palpebre già chiuse. Con tutto ciò mi si mostrò sempre vivace il colore immaginario, e persisteva nel mio occhio talvolta i tre o quattro minuti. Ho replicato i medesimi tentativi di notte al lume di candela posta in una camera, e quivi osservato attentamente un colore in campo nero, correva tosto in una camera contigua otturata da ogni banda; dove inoltre mi copriva il volto con panno nero al solito: se queste, adunque, conchiude non sono le vere tenebre, or quali dunque saranno? Eppure ivi eziandio compariva il colore fantastico opposto a quel vero che aveva testè contemplato in faccia del lume. »

Io ho amato di riferire a verbo questo procedimento di esperimentare del nostro fisico, perchè si conosca che niente di meglio ci presentarono neppure i fisici moderni, come Plateau e Quetelet, come appare dal n.° 1 e 2 del ricordato articolo del Fisico Belgico.

E sopra di questi risultamenti ottenuti con un metodo così rigoroso, toglie a confutare l'ingegnosa spiegazione dei colori immaginarii messa innanzi dallo Schaeffer. Egli riferisce da prima religiosamente le idee di questo scrittore; esempio, che si vorrebbe imitato da tutti i fisici moderni, che nei loro sunti od estratti non sono sempre esatti e fedeli.

« L'occhio, così egli ragiona, guardando si stanca, e la retina scossa forte

da un color verde diviene perciò stesso men atta a riceverne dopo le impressioni. Però quando l'occhio ha fissato in luce viva una macchia rossa, quelle parti della retina che furono eccitate da tale macchia, divengono per la stanchezza loro poco abili a ricevere con vigore le susseguenti impressioni del rosso. Si porti dunque ora l'occhio sopra un foglio bianco, il quale, come è noto, manda bensì all'occhio di tutte le sette specie di raggi; ma quella parte della retina che era stata per lo innanzi fatigata dal rosso, non se ne risentirà più come degli altri; laonde avverrà come se quella parte della retina fosse eccitata dall'altre sei specie di raggi puri detrattone il rosso; le quali sei specie combinate insieme producono il verde. » (*Dissert. sur les coul. accid. Journal de physiq. an.* 1785).

Il Venturi si fa incontro ad una tale sentenza osservando, ch'essa non perde verisimiglianza, finchè gli esperimenti dei colori fantastici sono fatti in luce aperta; ma ch'essa non può reggere in verun modo applicata che sia ai colori immaginarii che sorgono e si conservano nell'occhio portato al buio più fitto. « Certo fra quelle tenebre, soggiugne l'esimio fisico di Pavia, alcun nuovo lume non sopravveniva ad agire sulla mia retina per farvi nascere i colori immaginarii: questi son dunque figli di quella prima luce che diede il color vero; o piuttosto son figli del movimento, che la medesima impresse nell' organo sensitivo, comunque poi questo movimento si trasformi da sè e si alteri successivamente. Non può in buona logica destinarsi ad un effetto una cagione non proporzionata a tutta l' estensione del medesimo; e noi qui dobbiamo lasciare da canto l' azione di una luce posteriore sulla retina già stanca, giacchè una tale azione non sempre accompagna le apparenze fantastiche dei colori; ma conviene piuttosto cercare la ragione di tali apparenze nell' attività delle fibre sensitive, che si continua e si cambia in esse di una maniera sua propria, dopo che allontanato si fu l'obbietto esteriore. »

« Ben è vero che nell'occhio esposto alla luce del giorno penetrano sempre alcuni raggi attraverso le palpebre quantunque ben chiuse; ma tale circostanza non ebbe luogo certamente negli esperimenti da me istituiti sui colori fantastici; nei quali era notte, od eran chiuse a doppio le finestre della camera, ed oltre al fermarsi delle palpebre erano di più gli occhi inviluppati e coperti da ogni banda con panno nero a più doppi. Indarno adunque al proposito nostro si vorrebbe ricorrere all'azione della poca luce che penetra attraverso le palpebre nell'occhio già chiuso. Ed inutilmente il Darwin ci avvisa, nel replicare simili esperienze, di tenere semplicemente chiuse le palpebre, e di porvi davanti una mano, ma in

guisa di permettere, che pur qualche fioca luce arrivi a cadere esteriormente sulle pupille medesime. »

Nessun scrittore, per quanto io lessi, mentre tuttavia era dominante nella scuola una tale dottrina, ne dimostrò così efficacemente l'insussistenza; e niente di più conveniente seppero i moderni fisici proporre a confutazione della dottrina dello Schaeffer.

Ma non contento il Venturi di avere abbattuta la dottrina proclamata quasi in tutte le scuole intorno ai colori accidentali, partendo da una massima già nota ai fisiologi e dalla natura della fibra vivente, con una sagacia da doversi ancora proporre ad esempio, ebbe a stabilire:

«*Tale è la natura della fibra senziente nell'occhio, che, eccitata una volta, continua da sè i concepiti movimenti sensitivi, cambiandoli per altro, o modificandoli con certe leggi sue proprie ...;* e chiamo, egli dice, col nome generale di *movimento sensitivo* quella vibrazione, ondeggiamento, impressione, mutazione, o nuova modificazione qualsiasi che prendono i filamenti nervosi, o qualche fluido in essi contenuto, nell'occhio o nel cerebro, allora quando ci fanno provare la sensazione di un obbietto. Noi ignoriamo sinora quale sia la precisa forma di un tal movimento, ma ne sappiamo certa l'esistenza, e teniamo per certo, che dura esso e continua sinchè dura la sensazione; che s'indebolisce, si rinforza o si cambia allo indebolirsi o rinforzare o cambiarsi di questa; e che per ultimo cessano e tacciono l'uno e l'altra in un tempo. Poichè adunque allontanatasi la luce esterna, la sensazione del colore sussiste ancora e ci persegue fra le tenebre le più dense, uopo è dire che colà pure all'oscuro sussista e continui il *movimento sensitivo* del sistema ottico nervoso..... Se il movimento sensitivo eccitato dalla luce esterna sia moderato in primo grado, lasciato poi a sè continua esso per assai breve tempo, ma di quel breve tempo conserva la sua forza primiera, indi poi cessa ben tosto e svanisce. Se il movimento eccitato sia un po' più vigoroso, ma entro a un dato limite di vivacità, allora, dopo cessata l'azione esterna, dura esso un po' più a lungo, e prima di perire si cambia e trasformasi in guisa da far nascere in noi un'altra sensazione di colore diverso dal primo, secondo la legge della tabella sovra esposta. »

Nessuno de' fisici, che han preceduto il Venturi in queste investigazioni, e nessuno di quelli, che vennero dopo di lui, espose più chiaramente d'onde si debbano ripetere i colori accidentali, senza ipotesi, senza amor di sistema, narrando i fatti, ed assegnandone la causa nella reazione della fibra vivente. Si

richiamino pure al pensiero le idee del Godart, di Erasmo Darwin, di Gergonne, di Prieur de la Côte d'Or, di David Brewster, e perfino dello stesso Plateau, che vennero analizzate dal nostro onorevole collega sig. professor Minich, e si confrontino colla dottrina netta e pura del fisico italiano per rimanerne pienamente convinti.

Proseguendo il Venturi nell'investigazione delle dottrine dei colori accidentali, notò l'influenza ch' esercitano sul nostro spirito. Sono armonici all'anima que' colori, che si corrispondono insieme nella tabella superiormente riferita. Egli impertanto stabilisce la seguente proposizione:

Piacevole ed armonica è la compagnia o la successione di que' colori, i quali sono corrispondenti fra loro in guisa, che la sensazione vera di uno di essi trae dopo sè scambievolmente la sensazione fantastica dell'altro.

È questa una conseguenza della legge generale, che si ammira nelle sensazioni ed idee dello spirito umano. *Sono armoniche fra loro e consonanti quelle sensazioni ed idee, le quali per legge di nostra costituzione si cambiano l'una nell' altra ; e l' armonia e consonanza loro procede appunto da questo naturale passaggio dall' una all' altra.*

Quali squisite investigazioni non offre all' intelligenza del filosofo questo sottile, dilicato argomento dell' armonia delle nostre sensazioni ! Sono esse copiose e care sorgenti di puro innocente diletto. Ricreano lo spirito, e lo sublimano alla contemplazione dell' armonia dell'Eterno.

Il Venturi non mancò però di osservare che la notata armonia procede nella supposizione, che il movimento impresso da prima nel sensorio abbia vigore bensì, ma non eccedente un dato limite di eccitamento, nel qual caso l'esperienza comprova accadere fenomeni particolari, che sono dall' Autore compresi nella seguente proposizione :

Se un color vero, semplice o misto che sia, imprime nell'occhio un movimento sensitivo più forte di quelli che abbiamo considerato sinora, non un solo colore immaginario ne succede poi, ma molti e diversi di seguito.

Appartiene a questo luogo il fenomeno di Aristotele di sopra riferito, e ricordato e descritto da più altri. Per verificare, dice il Venturi, questa successione di colori accidentali, « si guardi il sole un po' indebolito di luce, o per minore pericolo si guardi quanto occorra, immobilmente, una candela accesa, oppure un cerchietto di carta illuminata dai raggi del sole raccolti nel foco di una lente; l' immagine che da tal vista rimane impressa nell'occhio portato poi in perfetta

oscurità, secondo l'osservazione che ne ho ripetuta più volte, si vede nel suo decremento successivo passare per la serie di questi colori immaginarii: bianco, poi giallo, indi rosso, indaco, azzurro, verde; col qual ultimo colore finalmente svanisce. » Questo era noto, soggiugne il Venturi; ma non era già noto, e per la conseguenza che ne trarremo dopo vuol essere considerato particolarmente: che la medesima succession di colori immaginarii producesi non dalla sola luce bianca o mescolata, ma da qualunque eziandio fra i sette colori prismatici puri, ove questo si presenti alla vista vivo e splendido assai. Io introduceva, egli prosegue, direttamente nell' occhio un fascio di raggi di una specie sola e ben separato dagli altri; qualunque fosse la tinta propria di un tal fascio, dopo aver questo eccitato forte la mia virtù visiva, io portava l'occhio nel bujo, ed ivi mi compariva sempre la serie stessa dei colori immaginarii che nascono dopo guardato il sole; giallo, cioè, rosso, indaco, azzurro, verde, nero. Basta per ottener ciò, che lo splendore e l' impressione del color vero ma puro sia stata intensa e forte abbastanza. »

È da questo fenomeno e dal precedente, che il Venturi deduce, *potersi ascrivere con certezza, che le sensazioni dei colori diversi non dipendono da ordini diversi di fibra nel sensorio, ma bensì da movimenti diversi della medesima fibra.* « Imperciocchè noi abbiamo veduto, che anche la sensazione assai forte di un solo color vero e puro tenne dietro a sè nella fantasia ora un altro colore diverso dal vero, ed ora per poco non tutta la serie delle sensazioni colorifiche. Quella fibra adunque, la quale è stata scossa vivamente per es. dal giallo prismatico puro, è dessa che, rallentando poi successivamente il proprio movimento, ci presenta dopo nell' immaginazione il rosso, poi l' indaco, il celeste, ecc. È chiaro troppo a chi ben vi considera, che i movimenti sensitivi impressi in un filamento nerveo per sè medesimi non ne escono, ma proseguendo ad agitarlo, vi cambiano solamente d'intensione o di maniera, o dell' una o dell'altra, a poco a poco e in un tempo, finchè all' ultimo cessano ivi dove nacquero e si dileguano affatto. »

È questo argomento di fisiologia sublime. Un parallelo perfetto dell' intima struttura de' nervi ottici con quella degli acustici e degli olfatorii, ecc., credo tuttavia manchi alla scienza. È necessario al tutto che noi procediamo osservando e sperimentando, se vogliamo separare le ipotesi dalla verità.

Ma la sensazione del bianco è sempre figlia della mescolanza di più colori? I fisici sono di questa sentenza, che trovasi espressa in tutti i corsi di

fisica. Ma il Venturi propose altro mezzo valevole ad alterare il colore di una data specie di raggi, convertendolo in bianco; e questo nuovo mezzo è la *condensazione* di una luce qualsiasi; come Rochon, per rarefazione faceva apparire tramutato un colore in un altro (*Recherches sur la nature de la lumière des étoiles fixes, présentées le 13 mars 1776 à l' Académie royale des Sciences; lues le 20 mars, par M. l'abbé Rochon*). Egli impertanto ebbe a stabilire, *che i raggi di una specie qualunque, se percuotano l' occhio vigorosi e condensati abbastanza, valgono per sè soli ad eccitare in noi la sensazione del bianco.* Eccone la prova sperimentale ch'ebbe a recare: « I raggi di una data specie ben separati colle diligenze più volte sovra indicate si facciano passare per un secondo foro in camera altronde ottenebrata profondamente. In qualche distanza da questo secondo foro que' raggi così purificati si ricevano direttamente nell'occhio: vede questo allora attraverso il secondo foro l' immagine del sole contornata di una corona od atmosfera tinta del colore consueto di quella specie di luce; ma il centro dell'immagine stessa evidentemente *biancheggia*, e biancheggia tanto più, quanto è più denso il fascio dei raggi, che entrano nell'occhio; e biancheggia tanto, che, senza la corona luminosa del contorno, o senza il confronto di altre immagini presenti, non saprebbe l' occhio per sè solo decidere a quale altro fuori del bianco appartenga quel genere di raggi prismatici, che viene ora a percuoterlo. Non a me solo è arrivato costantemente di veder ciò, ma a tutti coloro, che invitati da me han voluto colle debite cautele osservarlo. »

Al testimonio del senso aggiunse il Venturi la prova tratta dai colori immaginarii, che seguono dopo l' esperienza.

« Portato dopo questa l'occhio in dense tenebre, ritrova ivi la corona luminosa del contorno cambiata nell'armonico del vero colore osservato. Ma il centro dell' immagine, il centro produce quella serie di colori immaginarii giallo, rosso, ecc., che fu già superiormente descritta, in cui fu riferito nascer pur anco del bianco. Intanto una data specie qualunque di raggi, percotendo con somma intensione l'organo della virtù visiva, trae dietro sè la serie successiva de'colori sovraenunziati in quanto che essa eccitato aveva da prima nell'organo ottico la sensazione del bianco.

Ben a ragione impertanto gli ottici chiamano *chiarezza* e non *intensione di tinta* la viva copia di raggi sopra la superficie di un corpo. La bellezza, la vivacità, la degradazione, sfumatura e perfezione di una tinta particolare non

si sente che in luce moderata e non troppo forte. Quindi con rara sagacità, conchiude il Venturi, « per tutto ciò sembra che la sensazione del bianco sia in generale un grado di esaltamento de'nervi, al quale si accendono essi immediatamente e con facilità, se tutti i sette generi di raggi, quantunque deboli, agiscano su quel sistema in un tempo; uno sforzo maggiore richiedesi a suscitarlo, quando una sola o poche specie di raggi scuotono il nervo ottico. »

Era noto ai fisiologi, che v'ha nella retina un minimo, nel quale confondendosi in un solo tutte le impressioni ricevute, non si possono più distinguere le une dall'altre, sebbene sieno realmente distinte nell'immagine. Ora pare secondo ogni probabilità, che questi minimi sieno costituiti dalle estremità pupillari dello strato interno della retina. Si può adunque presumere, che dei raggi differenti, che cadono gli uni a lato degli altri su questi minimi della membrana nervosa, non sono più percepiti distintamente, e che ciascuna pupilla non riceve e non trasmette che una sola impressione media delle influenze che l'affettano nel medesimo tempo.

È da ciò che si deriva, che i colori accidentali si combinino fra di loro alla maniera dei colori reali; ed i colori accidentali si combinino coi colori reali: così il giallo e l'azzurro accidentali formano il verde; e il rosso reale ed il giallo accidentale formano l'aranciato.

Da questi principii conchiude il nostro Venturi:

Un colore immaginario ed un vero coincidendo insieme si contemperano e si mescolano fra loro, non altrimenti dei due colori veri. Questa regola semplice tanto e naturale è la vera ed unica sorgente di più fenomeni, che altri han tentato ripetere da cagioni più recondite e meno verosimili. Prova ne sieno questi pochi fatti, i quali aprono la via all'intelligenza di altri. Io mi ristringo a riferirne i seguenti:

« Fissate, per un minuto o poco più, lo sguardo immobile sopra una macchia bianca bastantemente illuminata in campo nero: portate poi quindi l'occhio sopra una tavola bianca uniforme; e troverete ivi una macchia di forma e grandezza uguale alla precedente, ma più bruna e più oscura del resto della tavola. Questo fenomeno complicato in più guise dagli osservatori, gli ha indotti a supporre una delicatezza o vogliam dire piuttosto una debolezza soverchia nella retina, per cui smosse un momento le fibre di lei si fiacchino subito e divengano con ciò assai meno abili a ricevere poco dopo un ugual movimento di prima. »

« Se si trattasse qui di uno sforzo, osserva Venturi, straordinario di vista continuato per più ore, per un quarto d'ora almeno, io vorrei pur consentire che dopo un tale sforzo le parti della retina fatigate non possano più accendersi al grado e chiarore medesimo. Ma vogliamo noi credere, che l'azione di una luce non troppo forte, esercitata un minuto solo sull'occhio, ne stanchi subito e ne indebolisca la virtù visiva tanto da ridurlo immediatamente ad una sensazione più languida di una quarta e talvolta anche di una terza parte di prima? Che se pochi momenti di luce mediocre bastano a diminuire tanto in noi il sentimento del bianco; continuandosi poi la medesima degradazione, a quale affievolimento estremo e cecità quasi totale, non ci ridurrebbe il dimorare più ore in camere imbiancate, intenti e fisi sulle carte e sui libri? Lo che per altro non veggiamo accadere. »

« A persuadersi che nel riferimento, dice Venturi, la macchia oscura imaginaria sulla tavola è tutt'altro che indebolimento di fibre ottiche, si seppellisca l'occhio in perfetta oscurità, e si troverà ivi al bujo la stessa macchia risplendere di un color fosco sì, ma più illuminato del campo circostante. Si riaprano gli occhi in faccia alla tavola bianca, e non si contenti di guardar ivi di volo la macchia imaginaria, ma si contempli e si esamini con diligenza. Si distinguono allora su di essa macchia, sebbene in luce aperta, que' medesimi colori fantastici, che abbiamo veduto seguir dopo nell'oscurità la sensazione vera del bianco. Questi colori sono per lo più cupi e foschi ancor nelle tenebre; e son dessi che mescolandosi al bianco vero della tavola lo imbruniscono e adombrano in guisa da imprimervi una macchia più oscura della tavola rimanente. Accade qui come se un pennello spruzzasse quel tratto di essa bianca tavola con un color lurido e leggiero di tinta. D'ordinario non chiara e meno bianca del campo circostante resterà pure essa macchia imaginaria nell'oscurità se qualche raggio di luce cupa penetri ivi la trasparente membrana della palpebra ed entri ad illuminar tutto l'occhio. »

In altre parole io direi, che le fibre di quel tratto della retina percossa lungamente dai raggi luminosi, infievoliscono il loro movimento e si accostano allo stato di quiete.

Per uguale ragione osservato fisicamente per qualche tempo un colore prismatico puro bastantemente illuminato, per esempio di rosso, si vedrà a poco a poco cambiarsi in rosso e giallo bianchiccio di tegola. Similmente il candor di una carta, osservandolo, oscurasi poco a poco, perchè vien tinto suc-

cessivamente dai colori imaginarii che nascono dopo le impressioni prime del candore medesimo. Per ugual modo se il sole raggia sopra un bianco foglio di carta, attraverso di un piccolo foro fatto in una tenda verde semitrasparente, la piccola porzione della carta, che riceve il raggio bianco, comparisce rossa; e quando la tenda forata sia di color rosso, lo stesso raggio bianco sulla carta apparisce tinto di verde.

Appare impertanto dall'esposizione di queste esperienze:

1.° Che il Venturi fu il primo a rovesciare la dottrina dello Schaeffer, che era allora generalmente ammessa nelle scuole.

2.° A ravvisare che i colori accidentali, che si succedono ai reali, sono quelli che nel cerchio prismatico di Newton sono collocati in posizione opposta;

3.° Che questi sorgono e continuano nell'occhio anche collocato nella più profonda oscurità, come osservò pure accadere dei simultanei.

4.° E che questi colori opposti del cerchio prismatico newtoniano sono gli armonici e consonanti.

5.° E che essi non sono che figli di movimenti sensitivi del nervo ottico, che si modificano con certe leggi proprie della fibra vivente.

6.° E che questa suprema legge della consonanza ed armonia cessa di manifestarsi, allorchè l'impressione sull'organo della visione è assai forte. Appare allora la serie successiva del bianco, giallo, rosso, indaco, azzurro, verde.

7.° E che questa serie si ha non solo con una luce bianca assai intensa, ma ancora con un colore prismatico qualunque assai condensato.

8.° Che i colori accidentali e veri si contemperano insieme alla maniera dei colori veri.

Dopo tutto questo, io conchiuderò che il Venturi si mantenne rigorosamente nel campo del positivo, riconoscendo i colori accidentali come effetti dei movimenti sensitivi i quali sono armonici o disarmonici coi reali, secondo l'intensità dell'impressione ricevuta dal nervo ottico.

Gli altri scrittori si abbandonarono a vaghe supposizioni, niuna delle quali, almeno nella sua generalità, venne comprovata dall'osservazione e vi connessero in un modo il più strano la dottrina dei colori complementarii.

Per universale consentimento de' fisici chiamasi colore complementario quello, che unito al colore dell'oggetto, dà la sensazione del bianco; e questa sentenza si ammette da tutti i fisici, comunque essi pensino sul numero dei

raggi semplici o primitivi; sieno essi due, tre, quattro, cinque, o sette. Ma non che il nero sia complementario del bianco.

In buona filosofia con un medesimo vocabolo non si esprimono concetti contradditorii. Limitiamoci adunque al dire che sono colori armonici, o disarmonici, a seconda della intensità dell' impressione, e dello stato precedente dell' organismo, e nulla più; e noi saremo nei limiti della verità.

Riconosciamo impertanto nei colori armonici il magistero supremo e l'economia dell' Aútore divino della natura. Egli con questa legge ha provveduto, che la fibra non si fiacchi di troppo, e non rompa il suo vigore innanzi tempo; anzi lo riacquisti per gradi, onde torni più agevolmente allo stato regolare e primitivo. Allorchè la retina fa trapasso per quella successione di colori che la natura dell' organo senziente richiede, ne viene grazia e piacere nell' animo; per la loro armonia l'uno è guida all' altro; e per converso, sforzo e molestia allorchè dee far passaggio da un color ad un altro non corrispondente. Così piacevole è l' azzurro a lato dell' aranciato, del violetto a lato del giallo, del verde a lato del rosso. Essi avvivano ed accrescono il loro splendore, senza che l'úno modifichi e cangi l'altro; perchè l' accidentale dell' uno è omonomo al verde dell' altro, e si sovrappongono. L' arte e l' industria quanto vantaggio pel bello non ne possono ritrarre da questi studii? Sorga un Leonardo da Vinci, e rechi all' atto la promessa, che aveva fatto all' Italia questo Sommo, di farci l' enumerazione dei colori armonici fra loro o disarmonici in una pittura. L' esimio autore della Callofilia spero che esaudirà questo mio desiderio.

(*Letta nel giorno* 15 *luglio* 1850)

SULLA RELAZIONE

TRA LE

CIRCONVOLUZIONI CEREBRALI E L' INTELLIGENZA

MEMORIA

DI FILOSOFIA APPLICATA

DEL M. E. PROF. BALDASSARE POLI.

§ 1. Che la Filosofia sia una scienza soltanto speculativa e vuota di applicazioni, ella è questa la querela che se ne fa tuttodì a sconforto di quelli che tengono ancora in fede il suo culto e le sue dottrine. Ma se è naturale che questa querela corra per le bocche del volgo, non è altrettanto naturale che passi per una sentenza fra dotti; perciocchè questi più degli altri, hanno il debito di riconoscerne la falsità, e di farla ringojare a chiunque la versi con troppa avventaggine o leggierezza. Ed a comprovarlo non è mestieri di recare innanzi nè l' autorità degli antichi appo cui non poteva aversi il nome di sapiente o sofo se non chi fosse filosofo, nè il fatto de' moderni che piegano l'ingegno alla severità de'suoi studj nella speranza di vederli dar frutto eziandio nella pratica, nè gli splendidi suoi apprestamenti non solo nelle scienze storiche e morali, ma benanco nelle Fisiche, nelle Matematiche e nelle Naturali, bastando all' uopo citare gli errori gravissimi in che s'avvolgono tutte queste scienze, ogniqualvolta si danno a disconoscere o ad adoperare malamente i suoi principj.

E di questi errori darà malleveria l' analisi ch' io mi propongo di fare dell'opera di Anatomia comparata del Signor Leuret intorno alle relazioni del

sistema nervoso colla intelligenza (1): la qual opera sebbene assai pregievole ne'riguardi anatomici e fisiologici, ciononndimeno scarseggia non poco di filosofia. Coltivatore ed insegnatore di questa scienza, io credo di usare il mio buon diritto, cercando anche a patto di mettere la falce nel campo altrui o di rivendicare le verità di che si vorrebbe spropriarla, o d'impedire ch' essa vada a sghembo per colpa non sua. Nè questo lavoro parrà affatto disutile, o poco rispondente allo scopo del nostro Istituto, ove si pensi che anco tra noi si studia la Filosofia o come scienza a sè, o come scienza di applicazióne; che anco a noi non lice rompere quel vincolo che la congiunge sì strettamente con tutte le altre o per essere lo strumento comune ed indispensabile al loro apprendimento, o per essere la leva potente che innalza lo spirito umano alle cagioni supreme delle cose; e che infine anco tra noi sarebbe scandalo in opere insigni o di Fisica o di Medicina, o di Matematica lo spropositare in Filosofia. E questo lavoro, ch' è un saggio anticipato d'un' opera più estesa di Filosofia *applicata,* ramo affattò nuovo in codesta scienza, tanto più volentieri mi fo a pubblicare, quanto che sentesi ora più che mai il bisogno di scendere dalla sterile altezza delle teoriche ai più fecondi particolareggiamenti della pratica, e quanto che per esso potrò più agevolmente persuadere a me e agli altri non essere nè tutto ozio, nè tutta ginnastica d' intelletto la scienza filosofica, quando le si para dinanzi l'arringo a così segnalate applicazioni.

§ 2. Ei non è guari tempo che l' Anatomia del sistema nervoso venne in tanta voga da essere lo studio del giorno, l'insegnamento prediletto nelle più celebri Università d' Europa, il tema più elaborato nelle Accademie scientifiche e nelle opere più rinomate di Storia Naturale e di Medicina. Ed è questo il più singolare benefizio che anche a mio avviso doveva recare con sè la Craniologia o Frenologia dopo le ardite e nuove teoriche colle quali l'illustre suo fondatore andava a rovesciare d'un tratto tutta l'anatomia e fisiologia dei nervi trapassata in retaggio dal secolo decimottavo al decimonono (2). Un cosiffatto tema è quello per l'appunto che piglia a trattare il Sig. *Leuret* sotto l' aspetto non pure dell' anotomia umana, ma anche della comparata. Della sua opera, benchè uscita

(1) Anatomie comparée du systéme nerveux considèré dans ses rapports avec l' intelligence par M. Leuret Medecin de l' Hospice de Bicêtre. Paris 1839. Tom. 1. Ouvrage accompagnée d' un Atlas de 33 planches in Folio.

(2) Saggio filosofico sulla Scuola de' moderni Filosofi-Naturalisti del Prof. D.r Baldassare Poli. Vol. unico. Milano 1827. Tipi di F. Sonzogno.

colle stampe in Parigi sino dall'anno 1839, noi non conosciamo sinora che il primo volume adorno d'un Atlante di magnifiche tavole; e siccome anche da questo solo rivelasi a buona pezza il suo assunto, ch'è quello di considerare in ispecial modo le circonvoluzioni cerebrali nella loro relazione coll'intelligenza, così la mia analisi si ristringe a questa relazione medesima, facendo noti da un lato i fatti e le prove anatomiche che vi si riferiscono, e adducendo dall'altro le sue e le mie dottrine filosofiche, ma per andare contrapelo od a ritroso, se non in Anatomia, al certo in Psicologia.

§ 3. Che sussista in generale una relazione tra l'intelligenza e il sistema nervoso e particolarmente il cervello, ella è questa una verità così lucida dello intelletto, che tutti debbono ammetterla senza timore d'alcun mentimento. Mal si conta però la bisogna, allorchè s'imprende ad investigare l'indole e le condizioni organiche, e più ancora il modo col quale succede una siffatta relazione; giacchè allora tutti consentono esserci dovunque dubbj, tenebre, ignoranza ed errore. Ed è perciò che i più valenti Fisiologi dividendosi di parere su questi punti l'attribuiscono a differenze altri di struttura, altri di forma, altri di consistenza o di peso, ovvero di ampiezza e di volume del cervello. L'espediente invece che suggerisce il *Leuret* per avviarci alla soluzione di così arduo problema, è quello di mettere a riscontro in ciascheduna serie di animali lo stato del loro sistema nervoso con quello della loro intelligenza al fine di scuoprire se una data organizzazione cerebrale coincida sì o nò con una data manifestazione intellettiva in quelli. Al qual uopo lasciando egli da banda tutto quello che si è detto e scritto in proposito, e senza alcuna idea preconcepita come nulla mai fosse stato pensato sull'argomento, s'è posto a notomizzare tutti i centri nervosi anco microscopici, l'interna disposizione od intessitura loro, il loro diametro ed il loro collocamento sì negli invertebrati, come nei vertebrati. Studiando poscia più addentro nella midolla spinale e nel cervello di questi ultimi, fermossi sopratutto alle circonvoluzioni cerebrali de'Mammiferi e dell'uomo, facendone preparazioni prestigiose sovra un numero assai esteso d'individui. Indi rivolgendosi a diligente esame dello stato psichico o dell'intelligenza tanto negli animali, quanto nell'uomo trasse a capo una specie di tavola sinottica delle facoltà loro istintive, intellettuali e morali, per mezzo della quale ponendo a confronto quella doppia serie di fatti, gli uni anatomici e gli altri psicologici venne alla conclusione, che sopra certi punti ci ha certezza, e sopra altri mera probabilità od anche assoluta ignoranza. Il metodo impertanto di questo

Autore sembrami non poter essere nè più sicuro, nè più diritto ad aggiungere la verità, ma non potrei affermare il medesimo de'suoi principii e delle sue conseguenze.

§ 4. In mezzo alle tante ricerche ed agli svariati studii fatti sull'encefalo dei Mammiferi, onde giustamente si glorifica la moderna Anatomia operosissima, assevera il Leuret, non essere andato molto avanti lo spirito d'analisi, nè bastevolmente compresa l'importanza di quelle prominenze oblunghe, serpeggianti ed intercise che s'appresentano alla superficie del cervello, e che gli Anatomici sogliono denominare *circonvoluzioni, giri* o *meandri,* oppure processi *enteroidei* a cagione della loro sembianza od apparenza intestini-forme. Gli è vero che ne' Corsi di Anatomia e nelle opere di *Vicq d'Azyr*, di *Cuvier*, di *Rolando,* di *Tiedemann,* di *Serres,* di *Cruvelhier* e di *Longet* si descrivono in generale e con sufficiente esattezza non che la forma, la struttura, la direzione e l'uffizio, ma perfino l'origine o derivazione delle circonvoluzioni del cervello; ma ciononostante niuno v'ha da Leuret in fuori, che abbia tolto con tutta la precisione de' fatti, e con una serie di moltiplici ed estese osservazioni a contrassegnarne il numero costante, la qualità e le differenze negli individui o nelle specie degli animali e nell' uomo al punto di venire ad una classificazione de' mammiferi a gruppi da quelle, e di tentare una legge di relazione tra le circonvoluzioni stesse e la loro intelligenza. Ella è questa, a mio credere, la parte del lavoro del *Leuret* la più meritante, e che segna un vero progresso nella scienza di anatomia comparata de'giorni nostri; ed io non posso che lodarla a piena bocca, quantunque debba dissentire da lui a molti rispetti in ciò che riguarda alla Filosofia. Per il che a spedirmi nel più chiaro ed ordinato modo da questo importantissimo argomento dividerò la presente Memoria in tre parti. La prima comprende il sunto delle dottrine del *Leuret* intorno alla relazione fra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza. La seconda un'analisi delle dottrine specialmente filosofiche del Leuret intorno a cosiffatta relazione. La terza ed ultima le conclusioni più vere e più sode su questa relazione.

PARTE PRIMA.

Sunto delle dottrine del Leuret sulla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l' intelligenza.

§ 5. Il Leuret dopo aver descritto in separati capitoli il sistema nerveo dei molluschi, de' pesci, de' rettili e degli uccelli, e messolo a confronto colle loro facoltà s' arresta assai più fissamente al sistema cerebro-spinale de' Mammiferi sceverati gli uni dagli altri in quattordici gruppi o classi, limitandosi per altro ad indagare l' intelligenza soltanto di que' dodici gruppi o classi ne' quali spiccano di più le circonvoluzioni cerebrali, e senza pretendere di stabilire una vera scala ascendente o discendente per modo che non ci sia alcun vuoto o salto nel passaggio graduale dai più semplici ai più perfetti, dai meno intelligenti ai più intelligenti.

Incominciamo ad esporre la serie dei quattordici gruppi de' Mammiferi distinti e classificati per il loro sistema nervoso o cerebrale:

§ 6. Il primo gruppo comprende tutti quegli animali il cui cervello non mostra traccie di circonvoluzioni, oppure non ha che semplici depressioni, onde quelle riescono nulle ed invisibili. Perciò in questo primo gruppo figurano il sorcio calvo, il pipistrello, la talpa, il riccio marino, lo scojattolo, il topo, il ghiro, molti *cheiroptèri, insettivori* e *monotrèmi* e fra gli altri tutti i *rosicanti,* dacchè tutti questi s' assomigliano in ciò, che il cerebro loro non che essere sfornito di circonvoluzioni, manca al tutto di depressioni e di avvallamenti, eccetto che in quell' angustissimo spazio il quale corrisponde alla scissura del Silvio. Nel secondo gruppo formato dalla marmotta, dal castoro, dal lepre, dal

coniglio, dal porcello d'India, s'avvisano però soltanto sul lobo cerebrale alcune irregolari depressioni o solcature indicanti un principio di circonvoluzioni, ma che in effetto nol sono. Al terzo gruppo, al quale s'appartengono la volpe, il cane ed il lupo, appariscono le circonvoluzioni così manifeste e rilevate a foggia di quelle del cervello umano, che si può numerarne o distinguerne sei assai spiccanti; quattro al di fuori od esterne, una quinta al davanti ch'è la sottorbitale, ed una sesta al di dentro, non essendoci divario tra le une e le altre se non nella divisione e nel grado di depressione e di ondeggiamento. Il quarto gruppo assegnato al genere *Gatto* e *Jena*, abbraccia il gatto, il leone, la tigre, la pantera, la lince, e la jena; e sebbene in questi non apparisca bastantemente distinta la circonvoluzione sottorbitale, dalla parte anteriore delle esterne, e vengano pressochè tutte originate dalle circonvoluzioni completive o di *supplimento* al davanti della scissura del Silvio, ciò non pertanto vi si ripetono sempre le sei circonvoluzioni *fondamentali* già additate come proprie del terzo gruppo. Talchè le circonvoluzioni del gatto non differiscono da quelle della volpe, se non per tre di più di supplimento, le quali per altro tengono assieme unite le sei fondamentali o comuni.

Nel quinto gruppo contenente l'orso, la faina, la lontra, il furetto, la puzzola ed il zibetto, scorgonsi chiaramente cinque circonvoluzioni, tre esteriori, la quarta sottorbitale, e la quinta interiore colla sola differenza che taluna di esse si confonde con altre talmente da sembrare una sola, ovvero d'essere, piuttosto che semplice, bifida o bipartita alla sua estremità. Nel sesto gruppo costituito del solo Mangusta od *Jcneumone* il cui cervello s'accosta a quello della puzzola e del zibetto, s'incontrano per lo meno tre, e fors'anche cinque circonvoluzioni esterne, stando almeno a quella nettezza ed estensione, onde le corrispondenti solcature vengono contrassegnate; ma tali circonvoluzioni non sono ondulate, e conservano l'identico carattere in tutte le loro partizioni. Nel settimo gruppo al quale vengono sottordinati l'*Ai* od il poltrone d'America (*Bradypus tridactylus*) e l'Armadillo oltre all'orbitale e all'interna vengono sott'occhio altre tre circonvoluzioni che recansi dalla parte anteriore alla posteriore del cervello senza alcun interrompimento, e senza indizio di ondulazioni. Nell'ottavo gruppo in cui entrano il Canguró, l'Orittero o la talpa del Capo ed il pesce cane, mostransi due circonvoluzioni che si svolgono dal davanti all'indietro nella parte interna del cervello; l'una limitante la scissura del Silvio ed assai ondulata, e l'altra meno, ancorchè sia un pò listata. Nel nono gruppo sotto

cui si schierano il capriolo, il daino, il cervo, la gazella, l'antilope, il camoscio, la capra, il montone, la renna, il lama, il cammello, il dromedario, il bue, l'asino ed il cavallo, compariscono a tratti ben rilevati quattro circonvoluzioni, la prima interna, la seconda sottorbitale, e le altre due ultime esterne, ma piene zeppe di divisioni e di solcature e sommamente ondulate. Tali quattro circonvoluzioni sono pressochè simili in tutti gli individui salvo che in certuni la parte anteriore delle due esterne è semplice, laddove in altri è doppia o bipartita, e salvo che una delle esterne non communica colla interna. Laonde il cervello del bue e del camoscio distinguesi da quello degli altri animali sottoposti al medesimo gruppo. Nel decimo gruppo al quale spettano il porco domestico, il cinghiale, ed il *Pecari* (*dicotile labiato*) s'affacciano alla periferia del lobo cerebrale due circonvoluzioni ben ondulate, e tra le quali la superiore è divisa all'indietro; indi una terza laterale esterna, ed una quarta interna sorgente dal lobo dell' Ippocampo, ed infine una quinta alla parte esterna ed anteriore del cervello. Nell' undecimo gruppo nel quale stassi scompagnata la Foca, s'appalesano tre circonvoluzioni diversificanti da quelle del gruppo precedente solo nelle parti e nella forma; mentre la esterna superiore si triplica all' estremità, essendo doppia al principio, e mentre la sottorbitale lungi dall' essere una circonvoluzione a sè, comparisce quel prolungamento delle anteriori. Nel duodecimo gruppo risultante del delfino, del porco marino e della balena s'impronta il cervello di quattro solchi che rettamente vi designano e vi separano al dissopra cinque circonvoluzioni, una interna che ricuopre il corpo calloso, e che si disgiunge dalle altre, e quattro tutte sparse di sinuosità e di interstizii, e formanti una specie di frangia infissa al fondo della scissura del Silvio. Nel tredicesimo gruppo in cui s'annovera il solo elefante, eccetto le sottorbitali, tutte le altre circonvoluzioni procedono dall'innanzi all'indietro, e sempre in linea retta o longitudinale, tengonsi unite con una specie di sutture; ed attraversano e tagliano longitudinalmente il cervello per guisa da scindere le circonvoluzioni stesse longitudinali in anteriori e posteriori, siccome si osserva nella testa della scimia e dell' uomo. Nell' elefante la circonvoluzione interiore che si svolge sul corpo calloso è segregata dalla anteriore, è doppia al davanti, semplice lunghesso l' estremità, e communicante colle superiori. Le particolarità delle circonvoluzioni nell' elefante riguardano 1.° il *numero;* imperciocchè oltre a quelle della scissura del Silvio ed all'interna, egli ne possiede tre di superiori che stanno innanzi alla scissura stes-

sa, e che vengono tagliate da altre *intermedie* o *trasversali*, tra cui la meno considerevole ne genera altre quattro, come altre quattro si veggono ed assai voluminose al di là di quella scissura, 2.º la *divisione* o separazione delle circonvoluzioni longitudinali dalle trasverse od intermedie che si recano dall'alto al basso; onde il cervello dell'elefante a detta del *Leuret* alla parte superiore offre un apparato cerebrale affatto nuovo e dissimile da quello di ogni altro animale, mentre è in tutta analogia con quello dell'uomo; giacchè in tutti gli altri animali, salvo le orbitali, tutte le circonvoluzioni s'avvanzano dal davanti all'indietro attraversando longitudinalmente il cerebro, mentre nell'elefante le circonvoluzioni cosidette intermedie o traversali il tagliano dalla parte posteriore in modo da intercidere in due parti l'una anteriore e l'altra posteriore le circonvoluzioni longitudinali. Nel quattordicesimo gruppo che è l'ultimo, e nel quale si collocano la scimia ed il *Makis*, spariscono il volume e gli ondeggiamenti già osservati nelle circonvoluzioni dell'elefante e della balena; ma vi si avvisa invece un cotal grado d'inclinazione alla scissura del Silvio da assimigliare il cervello della scimia a quello dell'uomo nello stato embrionico, nel mentre che quello della balena e dell'elefante ritrae del cervello comune a'mammiferi. La scimia ha tre circonvoluzioni anteriori, tre posteriori, e due superiori l'una esterna, e le altre sottorbitali. Il *Makis* possiede un cervello il quale è quasi l'embrione di quello della scimia; e perciò in lui non si riscontrano che i rudimenti delle circonvoluzioni proprie delle vere scimie. Da questa anatomica descrizione delle circonvoluzioni cerebrali ne'mammiferi limitatamente ai dodici gruppi che in realtà ne vanno forniti, deduce il nostro autore 1.º che il cervello della più parte de'mammiferi porge alla superficie alcune circonvoluzioni qual indizio d'una più perfetta organizzazione, 2.º che le medesime circonvoluzioni si ripetono identicamente in una data specie di animali; talchè eglino possono essere distribuiti in gruppi o classi dall'analogia delle loro circonvoluzioni, 3.º che le circonvoluzioni cerebrali presentano varii tipi assai ben designati e distinti, ondechè si passa dall'uno all'altro per mezzo di gradi intermedii, 4.º che l'elefante, il *makis* e la scimia mostrano circonvoluzioni le più somiglianti a quelle dell'uomo, 5.º che la presenza e lo svolgimento delle circonvoluzioni non istanno in ragione diretta del volume del cervello, ancorchè il cervello più grosso sia quello in generale che le ha in maggior copia ed anche più ondulate, 6.º che nella volpe, nel lupo, e nel cane, si presentano le circonvoluzioni più semplici, mentre nel

gatto si complicano e si aggruppano le une colle altre in varii punti, e mentre quelle dell'orso e del *Coati* o *Nasua* s'inviluppano anche di più, e ne differiscono a molti riguardi, 7.° che gli erbivori ruminanti solipedi offrono circonvoluzioni meno semplici e più ondulate di quelle de'carnivori, mentre s'approssimano assai più a quelle dell'uomo, 8.° che il porco, l'orso e la foca indicano nel loro cervello una specie di transizione fra i carnivori e gli erbivori, intanto che quello del delfino e della balena s'avvicina all'altro degli erbivori piuttosto che dei carnivori, 9.° che fra tutti i mammiferi l'elefante e la balena sono quelli che appalesano circonvoluzioni più ampie e più ondulate.

§ 7. Anteposta questa serie di fatti anatomici che costituiscono una nuova e più compiuta teorica delle circonvoluzioni cerebrali, passa il *Leuret* a contrapporvi l'altra serie de' fatti psicologici ossia delle facoltà de' mammiferi come sopra classificati, per ricavarne una legge fissa e costante intorno alla loro reciproca relazione. Ei distingue con *Cuvier* simili facoltà in istintive ed intellettuali, intendendo per le prime tutte le azioni più o meno complesse degli animali stessi, ma però sempre anteriori all'esperienza; e per le seconde tutte quelle azioni che in loro vengono prodotte o modificate dall'esperienza. Laonde per il Leuret operano per istinto il cane che sotterra il cibo avanzante, il cavallo e la renna che scalzano il suolo coperto dalla neve per rinvenirvi alimento, gli armenti che al sopravvenire del lupo si schierano a cerchio per una valida difesa; siccome operano all'invece per lume d'intendimento due lupi che dividonsi l'incarico del predare, l'uno coll'assalire, e l'altro collo starsene in agguato per accorrere al compagno. Se non che l'Autore, siccome ne avverte, nella descrizione di questa facoltà è costretto di invertire l'ordine già tenuto nella serie antecedente, dando principiamento ai gruppi dei carnivori, senza che venga perciò alterata l'analogia tra le loro circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza. E a tanto dicesi indotto a motivo della più spiccata relazione in questi tra le circonvoluzioni e l'intelligenza, e per l'altra idea più ovvia che il fondamento della divisione organica de' carnivori è il medesimo delle facoltà psichiche od intellettuali. Questa serie pertanto, come venne già detto, non comprende che dodici gruppi, quelli cioè che sono proveduti di circonvoluzioni, mentre per i due primi contenenti i cheiroptéri, gli insettivori ed i rosicanti siccome quelli che ne vanno interamente sforniti, non mette conto di indagarne l'intelligenza.

§ 8. Al primo gruppo formato dalla volpe, dal cane e dal cavallo s'appar-

tengono secondo il *Leuret* tutte le qualità della più fina intelligenza. La volpe è astuta e paziente, più vorace, ma più debole del lupo, si ciba d'animali vivi, tende agli altri insidie nell'atto che sa schivarle per se stessa; ed ove si voglia impigliarla in qualche trappola, sta in ascolto d'innanzi alla tana soffermandovisi per alcuni giorni, benchè famelica. Il lupo è di sensi esquisitissimi, fugge lontano dall'uomo, va in caccia più presto di notte che di giorno, sta sempre in sulle guardie, e quando agogna alla preda, s'accompagna un altro, mettendosi questo dinanzi al cane del pastore per farsi inseguire, intanto che quello si slancia a fretta sull'armento. Il cane dimestico è fido ed appassionato per il suo padrone, e partecipa tutte le idee e tutti i sentimenti coll'uomo; è capace di educazione e la mercè di quella arriva a scrivere ed a numerare anco nelle lingue straniere, e quand'anche sia ajutato dal padrone capisce benissimo i segni e le parole. A prova del qual prodigio il *Leuret* rammenta il cane di *Zeitz* nella Mismia, il quale parlava, il Barbino del Dottore *Bennati* a Parigi, che in pochi dì apprese il canto del gamma al suono di sette campane diatoniche, il cane spagnuolo di M. *Guerry*, che in un lungo abbajamento passava dal grave all'acuto, per cantare alla fine una specie di gamma acromatico, il celebre cane di Mompellier osservato anche da *Arago*, il quale ricusò di menare l'arrosto, com'era solito, perchè in quel giorno toccava al suo camerata, nè riprese l'usato ufficio, se non quando l'altro ebbe compiuto il suo giro; i cani del San *Bernardo* che vanno in traccia de' viaggiatori sepolti sotto le valanghe, e finalmente i cani che si muoiono d'inedia e di malinconia sulla tomba de' loro padroni. Nel secondo gruppo fanno la loro comparsa gli animali da preda e tra gli altri il leone, la tigre, il *Jaguar*, la pantera, il leopardo, il gatto e la jena. Questi non s'addolciscono, nè si dimesticano mai, vivono compagnevoli e sociabili o tra loro od anche nella famiglia, ma improvvidi divorano sull'istante tutta la preda; posseggono finissimi l'odorato e la vista, onde sono velocissimi al salto ed alla corsa, e si differenziano assai nell'intelligenza e nei sentimenti. Il leone è fiero, ma la sua fierezza è spesso magnanimità, generosità, clemenza, gittandosi più presto sul maschio che sulla femmina e sul fanciullo, e placandosi come agnello alla preghiera, al pianto ed alla memoria del beneficio. Il *Jaguar*, o la tigre del nuovo mondo, non meno feroce del leopardo e della pantera ha comuni con quelli i crudeli istinti, è ghiotto degli animali a sangue sì caldo che freddo, s'arrampica sulle piante per istarvi a campo e correre addosso a quelli che adocchia, e che stuzzicano di più il suo appetito. La

jena, d'aspetto così lurido e ributtante, è più cruda del gatto, ma ama talora le carezze, nè osa tampoco muovere la testa per non interrompersi il piacere agli altrui toccamenti. Il gatto all'invece, comunque servo all'uomo, e con esso lui addimesticato, è sempre dissimulatore e traditore, non ottempera mai agli altrui voleri, e se gode e si allieta ai blandimenti de' famigliari, il fa per sensualità che sprona, e non mai per affetto che senta. Il terzo gruppo che consta dell'orso, del *Coati*, dal martoro, della faina, della lontra e del zibetto, comprende animali che a cagione degli istinti loro intermezzano fra i carnivori ed i frugivori, ma sono più crudeli de' primi, perchè più avidi di sangue che di carni, abbisognano di molte vittime per satollarsi. L'orso goleggia di frutta, di radici e di miele, e quantunque abituato alla carne non può dirsi essenzialmente carnivoro. Ei vive solitario, ned è curante di anticipate provvigioni; riceve educazione, ma non si può aver fidanza della sua mansuetudine. Obbedisce all'uomo, ma ingabbiato tenta di fuggire o colla frode o coll'astuzia. Il *Coati* s'addomestica e mostrasi carezzevole, s'intana e s'aggrattiglia la coda a modo delle scimie. Il martoro e la faina, cotanto somiglianti e ne'costumi e negli istinti, conservansi sempre selvaggi, ad onta che la faina tenga domicilio ne' granaj; colgono di notte e nel sonno i volatili per il vezzo di azzannarli a tradimento. La lontra, esperta nuotatrice quanto è selvaggia e furiosa cacciatrice degli animali, piomba loro addosso d'improvviso, sfugge i cani, e non isnida che al vederli in torneo, senza mancare di coraggio per difendersi, ove ne venga assalita. Il zibetto dagli occhi rilucenti di notte, mentre minaccia di mordere dalla gabbia, e corre al paro del cane e della volpe, vive di caccia, e dove non possa saziarsi in questa di animali, s'accontenta di frutta e di radici. La nottola, appartenente al quarto gruppo, s'appiatta nell'inverno, uscendo in frotta alla state; va in caccia degli insetti, costuma di cangiar tetto per isfuggire al maggior calore; dimora nell'oscurità e, tuttochè priva della vista, evita qualsiasi ostacolo, fatta saggia dal tatto. L'*Unau* e l'*Ai*, i due animali più poltroni del quinto gruppo, raccolgono con avidezza le foglie e le frutta di alberi selvaggi, e dopo averneli dispogliati, si lasciano stramazzare in terra, rilevandosi a poco a poco dalla caduta. Il sesto gruppo è assai numeroso per la marmotta, per il ghiro, per il coniglio, per la lepre, e per il riccio venendo sino al castoro. La marmotta si assembra in compagnia per fabbricare in comune la propria abitazione, vive in uno stato di torpore e di intirizzimento tutta la cattiva stagione, mette sentinelle a guardia della tana intanto che esce a provvigioni, e diviene doci-

le e mansueta, come qualunque altro animale il più dimestichevole. Il ghiro s'interna nelle fenditure delle roccie, come ne'sotterranei ricettacoli del suolo. Il sorcio è così vorace da mangiarsi il suo simile; predilige, come parassito, il cibo abbondante di casa, appara piccioli esercizii e curiose destrezze del corpo. Il coniglio si pasce solo di vegetabili, è pavido e timoroso, non s'aduna in famiglia che nell'oscurità della notte, ed ove sia libero, ha l'istinto di bucacchiare in terra. La lepre, che vive pur essa in solitudine, è sempre in timore, qualora venga inseguita da'cacciatori ed insidiata dai cani, si studia di sviarli e di deluderli o col farvi postare un'altra lepre, o coll'appiattarsi tramezzo alle frotte de'montoni. Il riccio, sebbene armato di punte asprissime per difendersi dalla faina, dalla puzzola e dagli uccelli carnivori, ha ciò nonostante usanze dolci e mansuete, dorme tutto l'inverno o nella tana, o nel fesso d'una montagna. La talpa pacifica e benigna è tormentata da fame rabbiosa, e ben presto divorerebbe le compagne, se soffrisse penuria di radici, di vermi o d'insetti; è ardentissima negli amori, e combatte a morte per possedere la femmina. L'armadillo, che scava da sè la propria tana, attortiglia ed appallottola il suo corpo, ed agli animali che gli danno guerra oppone una inespugnabile armatura nel suo dorso irto e scaglioso. Il *Cangarò*, provveduto d'un sacco al davanti per allevarsi la prole, non abita che sulle piante, è di dolcissimo carattere, ed aspira al solo cibo di frutta ed insetti. Lo scojattolo, che nidifica sui rami più alti degli alberi, salta così presto e così snello che il diresti volatore, si nutre di frutta e di granaglie, e costruisce il suo nido sempre di dietro agli alberi per renderlo impenetrabile e ad un tempo riparato anche dalla pioggia, mediante un coperchio alla sua apertura. Il castoro, eminentemente socievole, va in lunghe torme particolarmente nell'inverno. Bello è il vedere come una tribù di castori si metta ad edificare le proprie casuccie in riva de'fiumi, e col solo ajuto de'denti e della coda fatta a spatola. Alcuni s'ingegnano a mantenere l'acqua alla medesima altezza, e quinci a formar dighe o per sostenerla o per livellarla. Altri dispogliano alberi di rami affusolando piuoli da profondare perpendicolarmente nel suolo, ed altri s'arrabbattano ad intersecar giunchi per i sovrapposti piani, facendo sorgere le case a forma di cupola, e capaci di dar ricetto a più famiglie. E tutto questo lavoro, al dire del Leuret, non è nè grossolano, nè uniforme o monotono, ma vario e sottile, e condotto sempre con iscelta tra mezzo a tutte le accidentali difficoltà, e tale da fare onore, secondo lui, agli artisti, mentre annunzia non una semplice industria meccanica ed istintiva, ma la

vera opera dell'intelligenza (1). Il settimo gruppo, cui sottostanno i solipedi ed i ruminanti, tra i quali il bue, il montone, la capra ed il capriolo, la gazzella, la giraffa, il cervo, il camello, l'asino ed il cavallo, presenta una specie di graduazione ne'proprii individui, rispetto all'intelligenza. Il bue riconosce la stalla ed il padrone, e intende quando debba andare innanzi oppure fermarsi. Il montone, il più stupido degli animali, va a passo lento, e non curante nè di sè, nè della sua agnella, non s'addà tampoco de'pericoli, lasciandosi condurre sempre da un carnivoro. La capra, tuttochè errante e vagabonda, sente l'affezione, conosce il padrone mostrandosi lieta alle sue carezze, ed i suoi capricci più che da mobilità o da incostanza dipendono sovente da attaccamento alle persone che curansi di lei. La gazzella è vigilante e conscia del pericolo, fugge velocissima sì, ma quando non possa più darla a gambe, si fa coraggiosa e battagliatrice. Il capriolo, snello e vivo più del cervo, è pieno d'animo e di astuzia, quando anche docile ed arrendevole. Egli è alla corsa rapidissimo, sa confondere con giravolte e andirivieni i suoi seguitatori, ed allorchè sentesi affaticato, scantona a traverso, o s'agguata senza punto alitare, intanto che gli passa a costa la turba de'suoi nemici. Egli è gemelliparo, e se uno viene preso, l'altro si muore di cordoglio, o raramente sopravvive. La femmina cela i suoi piccoli, e lascia cacciare sè stessa per allontanarne i predatori. La giraffa, tanto dissimile per la sua taglia dagli altri ruminanti, è d'indole benigna, va sempre in compagnia, e si lascia facilmente condurre dagli altri. Il cervo è dolce ma, attaccato, assalta e combatte con violenza, è acutissimo dello sguardo, dell'udito e dell'odorato, ed invecchiando dà nelle astutezze e negli scaltrimenti, ammaestrato dall'esperienza. Il camello fa mostra d'una pazienza e d'una sobrietà a tutte prove; e se è aggravato da enorme peso, non procede innanzi, ma si sofferma, finchè non ne venga alleviato. Egli è intendentissimo, ma è lo schiavo dell'uomo. L'asino mentre è tranquillo, longanime ed operoso, mostrasi indocile ed incanito, ed incaponisce massimamente nella vecchiaia. Il cavallo all'incontro, il primo per intelligenza tra gli animali, è sommamente destro ed intenditivo nella corsa, nella cavallerizza, nelle manovre militari, e in tutti gli altri esercizii del circo, della musica e della danza. Ama la prole ed il padrone, e nell'Arabia vive con esso lui in tutta famigliarità, nè v'ha sì duro trattamento o sì cattiva educazione, che valga ad istupidirlo o snaturarlo. Dell'ottavo gruppo fanno parte il porco, il cinghiale, il tapiro, l'ippopotamo ed il

(1) *Leuret*. Tom. I, pag. 506.

rinoceronte. Il porco domestico, il più sciocco e il più torpido fra questi animali, s'imbavaglia di fango, gavazza nella più fetida belletta, e si gode di trapassare la vita nel mangiare e nel dormire. Il cinghiale non è così grosso ed ottuso come il porco, di sensi più fini è dotato, ingelosisce e prende guardia della femmina, s'accompagna per la comune difesa, e s'avvede del cacciatore al semplice battere del vento. Il tapiro, assai mansueto, non affronta pericoli, assomiglia nella tromba all'elefante, ma ne disgrada nell'intelligenza. L'ippopotamo ed il rinoceronte, sebbene sì forti e muscolosi di corpo, ciò non pertanto non inclinano alla crudeltà de'carnivori, nè fanno guerra giammai se non contro gli assalitori. Il rinoceronte gusta le carezze e le moine, ed allorquando entra in furore, si placa, e s'ammansa soltanto alla vista di delicate lecconerie. Entra nel nono gruppo la foca, che vive quasi sempre nell'acqua. Essa si dimestica insieme e scherza co'cani, pugna rabbiosamente solo co'maschi, e si famigliarizza tanto coll'uomo ch'ei può metterle in bocca senza timore la mano, purchè non sia il tempo d'andare in amore; che allora dessa è tale da atterrire chiunque osa appressarla. Al decimo gruppo spettano il delfino e la balena. Il delfino, riguardato anche dagli antichi come l'animale più dimestichevole del mondo, s'arriva per pigliare il cibo, e si lascia cavalcare da'nuotatori. La balena non ha instinti feroci, ma diventa tremenda all'attacco ed alla zuffa, e colla smisurata sua forza mette spavento in tutti i cetacei ed in tutti i pesci. L'undecimo gruppo si compone del solo elefante. Credesi l'elefante l'arcifanfano di tutti gli animali. Il suo carattere è mite ed inoffensivo. Egli è molto sociabile, viaggia in frotte, con alla testa il più forte ed i più deboli alla coda. È tenero delle carezze e delle offerte, e disdegnoso delle offese, mentre se s'accorge d'essere beffeggiato o deriso, ne piglia a tempo aspra vendetta. Dà segno di verecondia e di pudore, ritirandosi solitario colla femmina nelle foreste all'epoca degli amori, e rifuggendo da testimonii ne' suoi accoppiamenti. La sua affezione, la sua obbedienza ed i suoi servigi sembrano l'effetto non di sentimenti o d'inclinazioni automatiche, ma della riflessione e dell'intendimento. Ei trasporta pesi, fardelli e pezzi d'artiglieria con tutta l'attenzione, sgroppa le corde, apre le porte serrate con chiave o chiavistello, comprende tutto quanto gli viene detto ed ordinato; e, se stiamo a Buffon, ei verrebbe adoperato come carnefice nel Mogol. Usa pazienza ad onta della sua forza tragrande; ma se è maltrattato o contrariato, monta in furore, e fa vittima della sua collera lo stesso padrone. La musica è possente sul suo animo, e si studia di seguirne il ritorno, ora col passo concitato, ora coll'incedere lento e tranquillo, ora coll'estasi e colla commozione di tutto il cor-

po. A prova di che il *Leuret* rammemora le esperienze che si fecero dell'elefante con un' orchestra al giardino delle piante in Parigi il 10 Pratile, anno IV della francese Repubblica. Il duodecimo ed ultimo gruppo abbraccia il *Makis* e la scimia. Il *Makis* supera in intelligenza le scimie; sebbene frugivoro, è ghiotto della carne cotta; è lento e poltrone di giorno, ma operoso ed attivissimo nella notte. Vive in società, ma nel serraglio suole tirarsi da un canto sdraiato al sole, e vi sta colle membra distese sul petto e sul ventre, a guisa d'uomo che abbia incrocicchiate le braccia. Indifferente ai giuochi ed alle scaltrezze delle scimie, non pare della loro specie; ed ove venga rinchiuso nella gabbia, perde l'appetito, e muore di malinconia, come lo attesta il Cuvier. Le scimie, dolci e buone nella gioventù, diventano fiere ed intrattabili nella vecchiezza, si mostrano intendentissime del gesto umano, s'amicano a quelli che con loro largheggiano di ghiotti cibi, entrano in torme ne' giardini, e spiccate le frutta dagli alberi, le gittano le une alle altre come tra lavoratori che fanno catena, e quando sono abbastanza lontane dall' uomo che le insegue, gli lanciano contro sterco e succidume, per burlarlo e per deriderlo. Avversano ostilmente quelle che invadono la medesima gabbia; ma la femmina è amorosa e diligentissima verso i suoi figliuoletti, portandoli all' acqua per lavarli, per asciugarli, e per farli belli e puliti, come chi suole torre a balia. Le scimie accostumano di farsi mutuo piacere collo spilluzzicarsi in testa; ed appena entrano in amicizia con alcuno, corrono subito a questo spilluzzico, in segno di festa e di carezze. Non sono ingorde, ma delicate, e quantunque mobili ed incostanti, come i loro moti, perseverano e s' ostinano nell' aprire usci, nello sciorre groppi, nel frugacchiare nelle tasche altrui; talchè paiono dotate di circospezione, di riflessione, e di antiveggenza. In proposito si racconta dal *Leuret* che un *Sujou* del serraglio di Parigi uscito della gabbia chiuse la porta d'un corridoio, andando a nascondersi in un armadio, dopo averne tolta la chiave; che un *Papione* femmina in veggendo il suo piccolo sospeso su d'una corda, nè arrivando a coglierlo, montò d'un salto sur uno stipite, e di là tirandolo a sè per la testa lo riebbe sano e salvo nelle sue braccia; e che un *Orang-Outang* del Museo di Parigi, avvezzo ad aprire da sè la porta della sala da pranzo, un giorno non potendo arrivare sino alla chiave, mentre la porta era serrata, si sospese ad una corda, e dopo alcune oscillazioni abbrancata la chiave, riuscì con questa ad aprirla. Lo stesso *Ourang-Outang*, secondo *Leuret*, è quello che d'un mazzo di 15 chiavi per entrare, si mise a provarle e riprovarle tutte, finchè rinvenne quella che era atta veramente ad aprire. Da questi fatti così compendiati in una specie di

riassunto, il *Leuret* passa alle seguenti deduzioni sull'intelligenza de' mammiferi: 1.° Che i carnivori in generale sono più industriosi e intelligenti degli erbivori. 2.° Che la volpe, il lupo ed il cane posseggono, in grado però diverso, la finezza, la prudenza e l'astuzia, essendo peraltro il cane quello in cui si svolgono di più coteste facoltà mediante l'educazione. 3.° Che il gatto è insociabile e meno comprensivo della volpe e del cane. 4.° Che le famiglie dell'orso, del martoro e dello scojattolo soprastano in intelligenza al gatto, e cedono al cane, mentre l'*Unau* e l'*Ai* ne sono sforniti assolutamente. 5.° Che la più parte de'rosicanti vivono in società, fanno provvigione e sanno fabbricarsi da sè la propria casa. 6.° Che i ruminanti ed i solipedi si cibano di soli vegetabili, sono di costumi blandi e pacifici, abborrono dalla solitudine, e dimostrano più o meno intelligenza, ondechè è molta nel cavallo e nel camello, e poca nel montone. 7.° Che tra i pachidermi è massima l'intelligenza nel *Pecari*, e minima, al grado della stupidità, nel porco. 8.° Che la foca è più intellettiva del *Pecari*, quantunque sia vinta dai cetacci che vivono al par di lei in società, e fra cui un maschio s'accompagna con una femmina sola. 9.° Che nessun animale sopravanza nella comprensiva e nella bontà l'elefante. 10.° Che il *Makis* e la scimia, mentre sottostanno ai ruminanti in generale, si raffigurano ad un elefante stupido e stordito, indocile e bizzarro. 11.° Che tutti i mammiferi, quale più quale meno, migliorano coll'esperienza e coll'educazione. 12.° Che i mammiferi avvicinanti l'uomo si sviluppano anche di più nell'intelligenza, e mostransi altresì capaci dei sentimenti di affezione e di obbedienza. 13.° Che i mammiferi adoperano un linguaggio di gesti e di voci non inteso dall'uomo. 14.° Che il cane, istruito ed educato, si fa l'animale più intendente e savio, e dopo lui vengono l'elefante ed il cavallo. 15.° Che molte azioni ne'mammiferi, dipendenti apparentemente da intelligenza, si spiegano in realtà per la semplice perfezione de'loro sensi. 16.° Che gli animali sono capaci d'idee, di memoria, di giudizio, e taluni mostrano perfino il senso del dovere e del giusto, e coltivano gli affetti e la passione dell'amore e dell'amicizia. 17.° Che l'intelligenza de'mammiferi è eccitata dagli oggetti esterni e dagli istinti, non innalzandosi eglino mai alle astrazioni o alle idee generali, nè alla riflessione di ciò che passa dentro di loro, ma a quello soltanto che colpisce ed impressiona gli organi sensorii. 17.° Che la sede o l'organo delle facoltà intellettive ne'mammiferi non è il cranio, onde la dottrina di *Gall* è falsa nel metodo, nei fatti e nelle deduzioni o conseguenze, nè il volume, il peso e l'altezza del cerebro; poichè il cane più intenditivo ha una massa encefalica minore di quella del

montone e del bue, che gli cedono di tanto nell'intelligenza; e poichè altrimenti il cane stesso, la volpe e la scimia starebbero al di sotto della foca, del porco marino e dei rosicanti. 18.° Che la vera sede o l'organo dell'intelligenza nei mammiferi è nel cervello e precisamente nelle sue circonvoluzioni, senza che si possa in modo positivo determinarne la località piuttosto in quella od in questa condizione organica delle medesime. E ciò è certissimo, per il *Leuret*, all'appoggio di questi due fatti: *a*) Che gli animali inferiori o privi d'intelligenza mancano affatto di cerebrali circonvoluzioni: *b*) Che gli animali superiori ed intelligenti mostrano sempre tali circonvoluzioni; e queste in maggiore o minore numero, in ragione del grado maggiore o minore della rispettiva intelligenza. Laonde la legge o relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza si giace fra queste due estremità senza risultare propriamente nè dalla loro forma, nè dal loro numero, nè da qualsiasi altra condizione o qualità speciale del loro organismo. 18.° Che la forma delle dette circonvoluzioni è triplice, la prima cioè *piana*, la seconda *ondulata* o flessuosa, la terza *mista*, è che consta perciò di circonvoluzioni sinuose e non sinuose, piane e flessuose ad un tempo. La forma piana s'avvisa ne'mammiferi carnivori. La ondulata o flessuosa in tutti i solipedi, e ne'ruminanti. La mista negli orsi, nel martoro e nel porco. Egli è per questo che pare costante e generale la forma piana o non flessuosa negli animali da preda dati alla solitudine, e viventi de'loro simili, la sinuosa od ondulata negli animali socievoli, astuti ed accorti soltanto per la propria difesa, e la mista nella lontra, nel martoro e nel *Puiri*, ovvero in quegli animali che vivono ora in società, ed ora da soli. 20.° Che la forma ondulata o flessuosa come non è costante criterio della sociabilità degli animali, così non ha nemmeno un costante legame coll'intelligenza; giacchè partendo dall'elefante come tipo della perfezione, quantunque egli abbia circonvoluzioni sinuose ed ondulatissime a sembianza di quelle dell'uomo, ciò nondimeno il porco, che è meno intelligente dell'orso, ha circonvoluzioni più sinuose di quello, ed il capriolo, che è il più destro e svelto degli erbivori, ha minori ondulazioni nel cerebro del daino, del cervo e del camoscio. D'altronde le ondulazioni fanno crescere in estensione od in superficie il cervello; ma questa non è sempre in ragione diretta del grado dell'intelligenza; imperciocchè la superficie o massa del cervello, nel montone apparisce più grande a paragone di quella del cane e del gatto. 21.° Che infine se la moltiplicità od il maggior numero delle ondulazioni cerebrali è un segnale di progresso nell'organizzazione degli animali, lo è molto di

più la sopraggiunta di altre circonvoluzioni così dette *intermedie* o *trasversali* come nell'uomo. Il perchè l'elefante e la scimia che posseggono queste oltre alle *fondamentali*, prevalgono anche nella maggior intelligenza al pari di quello. Se non che tale dottrina perde alquanto di fiducia, allorquando veggonsi il cavallo ed il cane, affatto mancanti di circonvoluzioni intermedie o trasversali, non sottostare punto nella intelligenza nè all'uno nè all'altra; sicchè neppure la forma ondulata delle circonvoluzioni cerebrali costituisce una vera legge tra le circonvoluzioni stesse e l'intelligenza.

§ 9. Ma da tante e così fine osservazioni del *Leuret* sugli animali e sulla struttura del loro cervello non sarà dato alla fine di conoscere e determinare la sede o la causa immediata della intelligenza? Il *Leuret* che si fa questa dimanda, ne sospende la risposta fino a tanto ch'ei non abbia compiuto lo studio dell'uomo, che compendia in sè la vera intelligenza per rispetto a tutti gli animali. Egli è da questo studio, e singolarmente da quello dell'umana organizzazione, che l'autore si ripromette una tale risposta; giacchè potendo egli in allora riportare al tipo umano le circonvoluzioni degli altri animali intelligenti avrà campo di discernere il come ed il perchè stieno fra loro in cotanta relazione le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza. Per la qual cosa sino a questo capo dell'opera il nostro autore, per sua bocca, ad altro non sarebbe pervenuto che a stabilire cotesta relazione in generale, senza poter affermare quella causa o condizione organica che la levi a dignità di vera legge. Bella e sincera confessione in vero, e tanto più degna di elogio, quanto nè è più raro l'esempio, in un solerte e coscienzioso osservatore della natura, qual'è il sig. *Leuret*; mentre egli non preoccupato da principii, nè sedotto da fatue vanità di farli valere, s'arresta ai soli fatti, non gli sforza a dire di più di quello che dicono, e devoto a moderazione ed a temperanza non teme per il trionfo della verità di scemare credito alle proprie fatiche; chè anzi lo accresce e per tanta imparzialità e per le difficoltà del problema considerato dal lato anche della sola anatomia. Ecco il punto al quale ha termine la prima parte di questa Memoria meramente espositiva. Mi studierò nella seconda parte di mettere a raffronto con una ben ponderata critica le mie e le altrui dottrine filosofiche intorno alla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza, per venire nella terza ed ultima, a quelle sode e più certe conclusioni che registra la scienza come veri suoi dettati, intorno a quest'ardua ed importantissima investigazione di Psicologia.

PARTE SECONDA.

Analisi delle dottrine specialmente filosofiche del Leuret intorno alla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza.

§ 10. Ad intraprendere con ordine l'analisi delle dottrine del *Leuret*, giova innanzi tutto richiamare alla mente in che consista la sostanza del problema intorno al quale si svolgono quelle sue dottrine, al fine di conchiudere sino a qual segno con esse se ne sia data la soluzione. Il problema sulla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza verte tutto nel discuoprire o determinare la causa o condizione organica, onde le circonvoluzioni cerebrali corrispondono sempre e necessariamente coll'intelligenza, ossia col carattere d'una vera legge. Quindi tale problema involge di per sè questi tre capi o punti. 1.° Come e perchè le circonvoluzioni cerebrali, con preferimento d'ogni altra parte stiano in una così stretta relazione coll'intelligenza. 2.° Quale sia la sede o la condizione organica speciale in dette circonvoluzioni, la quale sia da tenersi come causa immediata ad una così fatta relazione. 3.° Se questa relazione sia così costante ed assoluta da costituire una vera legge. A questi tre punti o capi impertanto s'indirizzano le dottrine sì anatomiche che filosofiche del *Leuret*. Le anatomiche si compendiano in queste: 1.° Il fatto anatomico che l'intelligenza non è là dove manchino circonvoluzioni cerebrali, mentr'essa incomincia e si manifesta, dove incominciano e si manifestano le circonvoluzioni medesime. 2.° Il tipo proprio o speciale delle circonvoluzioni cerebrali in ciascheduna serie di animali rapportate a quelle dell'uomo, come tipo altresì dell'intelligenza. 3.° La determinazione esatta e precisa del numero, della qualità

o forma delle circonvoluzioni cerebrali, per rinvenire in esse la causa o condizione organica alla loro relazione coll'intelligenza. 4.° La conclusione della mancanza del carattere di vera legge a cotesta relazione per essere interrotta o saltuaria, dietro la più estesa osservazione di fatti anatomici. Le filosofiche, o a dir meglio le psicologiche, si riducono alle seguenti: 1.° All'idea o definizione dell'intelligenza sì nell'uomo che negli animali. 2.° Al confronto trà queste due intelligenze come se fossero identiche ad una sola. 3.° Alla prova dell'intelligenza ne'mammiferi dedotta da una serie di fatti psicologici corrispondenti. 4.° All'influenza dell'educazione sullo sviluppamento dell'intelligenza in alcune specie di mammiferi. 5.° Alla maggiore intelligenza dell'elefante e della scimia per il maggior numero delle circonvoluzioni cerebrali, e fors'anco per l'esistenza nel loro cervello delle circonvoluzioni *intermedie* o *trasversali*, che non si scorgono in alcun altro animale. Io farò di riassumere ad una ad una tutte queste dottrine dell'autore, principiando dalle anatomiche, e sottoponendovi le mie proprie, acciocchè dal loro accordo o disaccordo si comprenda quale e quanta possa essere la lusinga ad una compiuta soluzione o risposta all'arduo problema che diede occasione all'opera del *Leuret*, ed alla presente Memoria.

§ 11. Egli è un fatto certo che nel cervello della talpa, del sorcio, dello scojattolo al pari di quello della più parte degli uccelli, come il piccione, l'astore, la civetta ed il papagallo non apparisce traccia di circonvoluzioni, come è altro fatto certo quello che nei rosicanti e negl'insettivori, come il coniglio, il castoro, il porcospino e la faina, oltre alla scissura del *Silvio* non si rinvengono che alcune depressioni o sinuosità indicanti un qualche principiamento di quelle, laddove nelle altre specie più perfette, incominciando dalla volpe, dall'orso e dal lupo, salendo di mano in mano al capriolo, al cane, al cavallo, all'elefante ed alla scimia, non solo si disegnano sul loro cervello aspri contorni e forti ripiegature, ma vi serpeggiano assai nette, e più o meno copiose, alcune circonvoluzioni imitanti quelle medesime dell'uomo. Donde che può tenersi in conto benissimo d'un altro fatto d'anatomia comparata quella specie di scala o serie progressiva ed ascendente delle circonvoluzioni cerebrali tra'mammiferi, nella quale dal primo gruppo deficiente di circonvoluzioni si procede al secondo che ne è l'inizio, indi al terzo dove s'ingrossano distinte e marcatissime, e infine al quarto, al quinto, ed al sesto insino all'ultimo, in cui spiccano cosiffattamente da render ombra alle umane. A cotesto fatto si può contrapporre l'altro dell'intelligenza, che s'accompagna più o meno colle circonvoluzioni per modo da incomin-

ciare là dove spuntano quelle, e da finire là dove quelle pure finiscono. Perlocchè non parrebbe a prima giunta fuor di proposito nemmeno la induzione che le circonvoluzioni cerebrali costituiscano la sede o l'organo dell'intelligenza. Ma oltrechè il fatto di quella accompagnatura non è continuo, l'induzione stessa come empirica non quadra neppure all'autore, qual dettame di scienza. Lasciando da un canto qual genere d'intelligenza il *Leuret* attribuisca ai pesci, ai serpenti ed agli uccelli, il cui cervello è così piano e liscio da non vedervi alcun segno di circonvoluzioni, si sa che anco la lepre, lo scojattolo ed il castoro ne difettano assolutamente, mentre le posseggono il gatto e la faina; come pure si sa che mostransi e più ampie e più sviluppate le circonvoluzioni nel porco, nel montone e nell'asino che non nel cane, nel lupo e nel leone, e ch'esse soprastanno in numero nell'elefante a confronto di quelle nell'uomo. Si sa parimenti che nel quinto gruppo contenente l'orso, il tasso, il furetto e la puzzola, non si rinvengono che cinque circonvoluzioni, quando invece nel sesto gruppo, al quale appartengono il gatto, la lince e la pantera, ne esistono sei. Per ultimo ne certifica l'autore stesso di sei circonvoluzioni abbastanza rilevate e prominenti nel sesto gruppo in cui figurano l'*Ai* e l'armadillo, i più poltroni ed ottusi mammiferi, mentre nell'ottavo, al quale sottostanno i cangurò e l'orchiterope del Capo, ne appariscono due solamente. Quindi verrebbe interrotta ad un tratto la scala ascendente e graduale degl'individui per rispetto all'intelligenza e alle circonvoluzioni. Se non che sussistendo eziandio in tutta la sua integrità il fatto di questa scala o graduazione, esso come di natura affatto empirica, non lascia intravedere sì tosto ed in modo sicuro il perchè o l'intrinseca cagione della colleganza tra le circonvoluzioni e l'intelligenza; ed è questo che scontenta l'autore. Oltracciò potrebbe essere che le circonvoluzioni s'uniscano insieme all'intelligenza o per caso, o senza alcuna dipendenza o relazione tra loro, come avviene di altri organi abbinati o congiunti insieme, tuttochè diversi e affatto indipendenti nelle loro funzioni. Le circonvoluzioni stesse, prese nel loro complesso od in separato, non indicano punto la guisa onde si connettano coll'intelligenza; e ciò tanto più in quanto che oltre ad esse v'hanno nel cerebro altre parti od organi che potrebbero essere più efficaci a produrre quella loro connessione. Dal che si comprende quanto sia poco esatta e poco significativa la dottrina anatomica sul fatto asserito costante e continuo della coincidenza delle circonvoluzioni cerebrali coll'intelligenza. L'altra dottrina del tipo proprio o speciale delle cir-

convoluzioni in mammiferi di specie diversa, per il principio che questo tipo si ripete nel medesimo animale, e in virtù della quale potrebbesi tentare, a detta dell'autore, una nuova classificazione a gruppi de' mammiferi con un metodo *naturale*, sebbene abbia una cert'aria di novità, e sia piantata non nuda affatto di fondamento, ciò nonostante non tiene il fermo, nè s'acconcia in verun modo all' applicazione, sì perchè quel metodo non soddisfa, come perchè potrebbe condurre a fallanza e ad errore. Il metodo così detto *naturale* appo i zoologi è quello che si fissa non sui caratteri esterni, ma interni, che è quanto dire sull' intima struttura degli animali, donde derivarono alla zoologia tanti metodi naturali quanti gli organi o sistemi loro. Per il che vanno celebrati in essa come tali il metodo riproduttivo o sessuale di Linneo, il sensitivo di Lamarck e di Ocken, il nutritivo ed il locomotivo di altri Naturalisti. Perciò se il metodo proposto dal *Leuret* potrebbe dichiararsi per naturale, perchè fondato sull' interno carattere delle circonvoluzioni cerebrali, pure diventa artificiale ed arbitrario a molti altri riguardi. Primamente in esso si va a collocare nel medesimo gruppo animali di diversissima specie; e questo mostra il manco della sua estensione. In secondo luogo le circonvoluzioni cerebrali sono un carattere interno sì, ma accidentale e variabilissimo, onde si deduce la poca sua influenza. In terzo luogo un sistema basato sulle circonvoluzioni cerebrali non può dirsi a rigore di termini nè naturale nè artificiale. Non naturale, perchè il suo carattere è incerto e variabile. Non artificiale, perchè la sua base è riposta nell' interna struttura degli animali, con che si fa apertissima la sua impraticabilità. In fine se si spartiscono tutti i mammiferi in dodici o quattordici gruppi a norma delle circonvoluzioni cerebrali, allora nel 14.°, o nel supremo, vi si coordinano insieme e l'elefante, e la scimia e l'uomo. Stranissima classificazione che non venne mai fatta nè da Linneo, nè da Lamarck, nè da qualunque altro, poichè tutti tennero sempre il *bimane* in un ordine separato da quello delle scimie e dei quadrumani, per quantunque e gli uni e l'altro si rassembrino o nella forma esteriore delle membra, o nella interiore del cervello e delle circonvoluzioni. Il rapportamento poi delle circonvoluzioni dei mammiferi a quelle dell'uomo, siccome tipo anche in queste, sebbene sia giusto in quanto muove dalla decisa superiorità dell' intelligenza dell'uno a petto di quella degli altri, nondimeno zoppica nella verità e nell' esattezza; giacchè le circonvoluzioni sono e più perfette e più numerose nell' elefante che nell'uomo, e giacchè è supposto e non provato che l' intelligenza abbia la sua se-

de o causa in esse circonvoluzioni, onde si vuole che come quello prevale nell' intelligenza, così debba prevalere nelle circonvoluzioni. D'altra parte, prescindendo anche da queste ragioni, il suddetto rapportamento non tornerebbe a prò della scienza, mentre quand'anche si conceda l'analogia tra le circonvoluzioni de' mammiferi e quelle dell'uomo, avvi sempre l'immensa distanza fra l'intelligenza umana e quella degli animali, che impedisce ogni illazione od induzione. Talchè la dottrina del tipo proprio delle circonvoluzioni de'mammiferi riproducentesi nel medesimo individuo, e del rapportamento loro a quelle dell'uomo, se può essere apprezzata come un tentativo di progresso nella anatomia comparata, è ben lungi dal fornire un argomento od un criterio alla determinazione della causa organica ed immediata dell' intelligenza.

§ 12. Io ho già detto che la determinazione esatta e precisa del numero e della quantità, della qualità o forma delle circonvoluzioni cerebrali ne'mammiferi è un vero progresso per la scienza; e credo di non aver iperboleggiato; imperciocchè da tale dottrina, per quanto io so, affatto nuova, rampollano alcuni dati scientifici di molto rilievo. E tali dati, a mio avviso, sarebbero i seguenti. Il numero fisso e costante delle circonvoluzioni nelle varie specie e gruppi niegato, o tutto al più ammesso nell'uomo. La forma ondulata delle circonvoluzioni cerebrali proprie degli animali più intelligenti non mai distinta o dimostrata. L'esistenza di alcune circonvoluzioni intermedie o trasversali trovate solamente nell'elefante, nelle scimie e nell'uomo alla parte laterale e posteriore del cervello, e finora sconosciute. Il maggiore sviluppo delle circonvoluzioni alla parte posteriore del cervello, a modo di coprire tutto il cervelletto negli animali più perfetti contro la generale opinione di questo sviluppo maggiore alla parte anteriore o frontale. Se nonchè il merito di questa novità va scompartito tra il *Leuret* e il nostro italiano professore di Torino *Rolando*, e del quale il medesimo *Leuret* fa onorevolissima menzione, siccome quegli che nel suo *Saggio sulla struttura del cervello*, oltre avere discoperta l' isola del *Reil*, ed i sette processi enteroidei che s' innalzano da quella, avrebbe presentita l' esistenza delle circonvoluzioni intermedie o trasversali nello stabilirne la direzione e la positura in generale, nel determinare l' apparato di quelle fibre che concorrono a formarle e nel discernere i processi enteroidei verticali delle fibre ascendenti dai peduncoli degli emisferi (1). Quanto però al numero e al-

(1) V. Saggio sulla vera struttura del cervello di Luigi Rolando. - Torino, 1828. — Manuale di anatomia fisiologica tradotta dal latino dal dott. Gio. Meloni Baile. - Milano, 1829.

la forma delle circonvoluzioni, tutto ciò è di appartenenza del *Leuret*, che si è veramente segnalato per l'originalità, per l'estensione, e per l'esattezza delle osservazioni con cui si studia di corroborarne la dottrina. Il numero delle circonvoluzioni, secondo il *Leuret*, è fisso e costante sì nell'uomo che negli animali, riducendosi a sei, quattro esterne, la quinta sottorbitale, e la sesta interna. Perlocchè se appariscono di più nell'elefante e di meno negli altri gruppi, ciò non dipende che dalla maggiore o minore semplicità e complicazione delle stesse circonvoluzioni nei singoli individui. Di maniera che, facendo astrazione nell'elefante dalle circonvoluzioni intermedie o trasversali, e supponendo continuative le anteriori colle posteriori, come computando negli altri le completive o di supplimento, si torna sempre allo stesso numero di sei. Relativamente alla forma o qualità delle circonvoluzioni, che rileva ben più del numero, e che venne già dichiarata per triplice, cioè *piana*, *ondulata*, e *mista*, può dirsi con tutta asseveranza che di tale dottrina s'avvantaggia non poco la scienza, in quanto è argomento decisivo per essa e il sapere definitivamente la forma così varia di esse circonvoluzioni, la loro maggiore o minore perfezione in date classi o gruppi di individui, e l'accompagnatura costante e inalterabile della forma ondulata cogli animali più intendenti ed astuti, anzichè cogli ottusi o cogli stupidi. Ed è un peccato vedere che il *Leuret* non procacci di profondarsi di più nelle ricerche sulla loro forma, dacchè ne aveva così il destro, chè forse ei sarebbe giunto a deciferare come esse si designino e si modellino sul cervello ora al sinuoso ed ora all'ondulato, se e come, e fino a qual punto vi contribuisca o la mollezza vescicolare della membrana cerebrale che s'incurva e si ripiega all'atto di ristringersi e di adattarsi nella teca del cranio, o l'intromissione della meninge vascolare col produrre dove gli anfratti, e dove le curvature, o infine il cervello medesimo che, qual membrana suscettiva di distacco negli strati e nelle fibre esterne dalle sottostanti, diventa piana e liscia disparendone tutti i solchi e tutte le prominenze che ne cagionavano forse le circonvoluzioni. In onta di ciò, niuno v'ha che possa niegare al *Leuret* il vanto di aver fatto e tentato moltissimo intorno al numero e alla forma delle circonvoluzioni cerebrali. Egli seppe determinare e l'uno e l'altra in una scala così grande ed estesa di esseri dissomigliantissimi, da recare meraviglia. Egli solo, sebbene il Rolando gli precorra nel presentimento delle circonvoluzioni intermedie o trasversali, ha tutto il merito di averle vedute, descritte e rintracciate sino nella primissima loro origine, limitandole ai tre gruppi dell'elefante, della

scimia e dell'uomo, e quel che è più di aver raccertato il loro andamento piuttosto dalla parte posteriore che dall'anteriore del cervello. Il qual fatto, ove sussista, come appare dalle tavole del suo atlante, avrebbe dato per sempre il colpo di grazia alla Craniologia o Frenologia intorno alla località degli organi. Egli infine, a mio avviso, sarebbe lo scrittore che ha integrata e perfezionata la scienza anatomica delle circonvoluzioni cerebrali, incerta e indietreggiante finora su varii punti, riducendole tutte ad un numero costante ed invariabile, ed a tre specie distintissime cioè *fondamentali* o primitive, *completive* o di supplimento, *intermedie* o trasversali. Ecco quello che si raccoglie di fruttifero per la scienza dalle dottrine anatomiche del *Leuret* da me poste a disamina intorno alle circonvoluzioni cerebrali dapprima mal conosciute, poscia peggio analizzate, e per ultimo assai imperfettamente scrutate, e manchevoli sempre d'una serie abbastanza estesa di osservazioni, che valessero ad elevare la loro cognizione empirica all'inconcussa verità d'una teoria. È desiderabile soltanto che si pubblichi o che venga a nostra notizia, se già pubblicata, quella parte dell'opera che ragguarda al cervello umano, per vedere com'egli abbia dato l'ultima mano a questa teoria.

§ 13. Ma se di così giusta lode mi parvero degne le dottrine anatomiche del *Leuret*, non potrei fargli uguale ragione per rispetto alle filosofiche. È mio intendimento nell'analisi di queste ultime, alla quale tende più dappresso il mio lavoro, di comprovare. 1.° Che il *Leuret* travolge e falsifica di posta l'idea dell'intelligenza, secondo i dati più sicuri della Psicologia. 2.° Che i fatti da lui accennati a conferma dell'intelligenza ne'mammiferi si spiegano benissimo coll'istinto e colle facoltà inferiori, le sole pertinenti agli animali. Riuscita questa doppia prova sarà evidente in primo luogo, nulla potersi legittimamente inferire sulla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza a cagione che manca come falso il secondo termine, qual'è l'intelligenza, a simile relazione; ed in secondo luogo, date anche le identiche circonvoluzioni sì nell'uomo che negli animali, non essere perciò identica la rispettiva intelligenza, nè reggere a martello qualunque induzione dall'esistenza delle circonvoluzioni a quella dell'intelligenza almeno nell'uomo. Conseguentemente doversi riconoscere come imperfetta e manchevole la teorica o dottrina qualunque del *Leuret*, singolarmente dal lato della filosofia.

Fatte queste premesse vengasi a considerare le dottrine filosofiche dell'Autore intorno alla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza. Il che forma il tema più importante di questa seconda Memoria.

§ 14. Esordisce il *Leuret* dal caratterizzare, con *Cuvier*, l'intelligenza per tutte quelle azioni che vengono prodotte o modificate dall'esperienza, distinguendola soltanto dall'istinto, in quanto questo comprende le azioni anteriori all'esperienza medesima, sicchè per lui è identica tale facoltà sì nell'uomo come nel bruto, salvo che nel bruto avvi la coscienza di soli oggetti esteriori, mentre nell' uomo v' ha quella pur anco degl'interiori. Quindi egli, consentaneo a sè stesso, conferisce ai mammiferi, non pure gl'istinti del sesso, della conservazione, della sociabilità e della fabbricazione, ma le idee, la memoria, il giudizio, il linguaggio, l'affetto, la passione e per fino il senso del dovere e della giustizia.

Non suona per me nuova questa maniera di filosofare de' Naturalisti, ed il *Leuret* non si fece in essa che ripetitore di quanto si va predicando sulle facoltà degli animali dal *Buffon*, dal *Cuvier*, dal *Lamarck*, e più recentemente dal *Fleming*, il quale dopo aver distinta la semplice sensazione come capacità del sistema nervoso ad impressionarsi dagli oggetti esteriori, dalla cognizione delle loro qualità, la mercè degli organi sensorii, e separate ne' bruti le facoltà intellettuali dalle istintive, concede loro percezione, attenzione, memoria, immaginazione non solo, ma ben anco le idee di riflessione, quelle cioè di personalità, di analogia, di tempo, di spazio, di forza, di causa, e di effetto, e tutte le altre moltissime, eccetto quella dell' Ente Supremo (1). Tale Psicologia delle bestie per quantunque comune e professata da grandi scrittori di Storia naturale non può andare a versi di chi si profonda un pò nello studio delle facoltà umane e del bruto, solleva contro di sè il senso comune, e mette in una brutta contraddizione la scienza coll' umanità. Su queste dottrine pertanto io non posso che dissentire dal *Leuret*, siccome quelle che annunziano od una cognizione superficiale della filosofia, ovvero l'abuso più strano de'suoi più chiari insegnamenti. Io farò di tratteggiar l' intelligenza nella sua forza e nelle sue note caratteristiche, acciocchè apparisca in modo evidentissimo quanto ei si dilunghi dal vero nel raffigurarla come identica sì nell'uomo, che negli animali.

§ 15. Convengo prima di tutto col Leuret esistere ne' mammiferi l'istinto come un principio ingenito ed anteriore ad ogni esperienza ed indipendente affatto dall' intelligenza, ma non posso consentirgli che l' intelligenza consista essenzialmente nelle azioni o prodotte o modificate dall'esperienza, colla sola diffe-

(1) Filosofia Zoologica del dott. Gio. Fleming, Traduzione dall'Inglese, Vol. 1.°, Cap. XI, Facoltà dell'anima. - Pavia 1829, pag. 310.

renza che negli animali essa s'accompagna colla coscienza degli oggetti esteriori, mentre nell'uomo si congiunge colla coscienza eziandio degl'interiori, giacchè in tal modo è svisata d'un colpo l'indole di questa facoltà, ed annientata tutta la sua mirabile forza o potenza. Primamente l'intelligenza, come forza o potenza dell'anima, è distinta dalle azioni che ne derivano, ed è indipendente dall'esperienza essendo ingenita e connaturata nell'uomo. In secondo luogo l'intendere od il comprendere non istà tutto in azioni prodotte o modificate dall'esperienza, perchè a queste azioni si associa sempre, come causa effettrice, la originale potenza intellettiva propria degli esseri intelligenti. In terzo luogo per azioni prodotte o modificate dall'esperienza possono pigliarsi eziandio le abitudini, ed ognuno sa quanto le abitudini diversifichino dall'intelligenza, massimamente quando siansi incarnate in noi come una seconda natura. In quarto luogo l'esperienza che cosa è mai e in sè stessa ed in tutta la sua attività? L'esperienza altro non è che la reiterata osservazione de' fenomeni o la pratica e perizia che s'acquista ad intenderli coll'avvezzamento in osservarli e vederli. Dunque l'esperienza presuppone già l'intelligenza, e non è che un modo di applicarla, od anche un prodotto di quella. Nel primo caso si può concepire l'intelligenza separata dall'esperienza. Nel secondo l'intelligenza è la causa, e l'esperienza l'effetto. Per ultimo l'intelligenza, ristretta alle sole azioni o prodotte o modificate dall'esperienza, non è più la facoltà comprensiva anche degli oggetti meramente razionali o che sono fuori dell'esperienza, non opera più per proprio impulso e per leggi inerenti e costitutive della sua forza innata e primigenia, e considerata solo nel suo sviluppo, e non nell'intima sua essenza, è uguale tanto nell'uomo come nel bruto. Nè suffraga a qualificarla meglio la fatta distinzione tra la coscienza degli oggetti solo esteriori e la coscienza anche degli interiori, giacchè la coscienza psicologica per sè sola, e come una semplice consapevolezza, è sempre la stessa se si applichi agli oggetti tanto esterni, quanto a quelli che sono dentro di noi. Oltracciò siccome la coscienza, isolata dalle altre facoltà, altro non è che un'avvertire od accorgersi di ciò che passa o dentro di noi od anco fuori di noi, così con essa riducesi tutto l'intendere alla mera consapevolezza di alcun che impressionante i nostri organi, o che si rappresenta al di dentro di noi senza punto sapere che sia esso, come ei sia diverso dall'impressione o dalla rappresentazione che cagiona, qual sia la sua natura e le sue qualità, e come vada distinto da qualsiasi altro oggetto il più somiglievole. Certo che profitta al *Leuret* questo frantendere o questo generaleggiare sull'intelli-

genza; poichè altrimenti non avrebbe potuto sì agevolmente accomunarla all'uomo e agli animali. Tutto ciò sia detto per mostrare quanto sia falsa ed incoerente l'idea che porge il *Leuret* dell'intelligenza, e per non confonderla ed identificarla nell'uomo e ne'mammiferi. A rettificare la quale idea, che è il perno della presente questione, è d'uopo discendere a ben diverse considerazioni.

§ 16. L'argomento sull'intelligenza o sull'intelletto, l'una come atto, l'altro come potenza o facoltà, quantunque sia omai trito e ritrito in Psicologia, ciò nondimeno va soggetto a dubbii e a dissensioni, atteso che non si è sempre incôlta l'intelligenza ne'suoi caratteri od attributi essenziali per modo da distinguerla nettamente in sè stessa e nelle sue funzioni da ogni altra potenza o facoltà affine. E di vero i Trattatisti, per la maggior parte, affermano essere l'intelligenza la facoltà ora di conoscere, di comprendere o di apprendere, ora di rappresentarsi mediatamente qualche cosa, ora di comprendere il generale mediante il particolare, ora di aver notizia o nozione di tutte le cose, ora di pensare e di disporre i proprii pensieri, ora di congiungere nell'unità della coscienza le varie rappresentazioni, ed ora di percepire, di pensare e di ragionare. Checchessia di tante e così svariate definizioni dell'intelligenza, tutte però concordano nell'avvisarla come una forza o potenza di comprendere, d'intendere e di conoscere, e perciò essenzialmente distinta dal senso. Ma non basta il dirla facoltà di conoscere, d'intendere, o di comprendere, mentre addomandandosi che sia il comprendere, l'intendere, ed il conoscere, o si mostra inetta la definizione, o si cade in una miserabile tautologia. L'idea perciò, o meglio la definizione dell'intelligenza, per contrapporla alla falsa che ne dà il *Leuret*, deve essere tolta dalle note essenziali e caratteristiche dell'intelligenza medesima, e fondata sulla più rigorosa analisi della Psicologia.

§ 17. Finchè un oggetto esterno qualunque impressiona i miei organi, ovvero finchè un oggetto richiamato dalla memoria e figurato dall'immaginazione, mi sta dinanzi alla mente come alcun che di materiale o di sensibile, io non m'accorgo d'altro che dell'impressione o della rappresentazione, senza distinguere queste dall'oggetto loro, senza essere consapevole che siano e quell'oggetto e quella rappresentazione, senza discernere l'uno dall'altra, ed ambedue da cose od oggetti eguali o differenti. Fin qui operano il senso e la memoria, e noi siamo ben lungi dall'intendere e conoscere, o dall'intelligenza. Quando all'atto dell'impressione o della rappresentazione comprendo l'oggetto che le produce, per quello che è, lo penso, o comprendo come una cosa diversa da

me e dalle altre, allora dico d'intendere e di conoscere. Allora si sviluppa l'intelligenza come atto o funzione dell'intelletto, allora ho una o più nozioni od idee. Allora mi mostro non meramente senziente, ma intenditivo od intelligente. Quanto asserisco del presente fatto potrei ripeterlo di tutti gli altri possibili, perchè identici con quello. Dunque l'intelligenza sta proprio nel discernere o distinguere gli oggetti o le loro rappresentazioni, talchè la sua nota caratteristica costante ed essenziale si è il discernere o distinguere, che genera l'idea come cognizione o nozione. Ma v'ha di più: Quand'è ch'io dico di discernere o di distinguere quell'oggetto o la sua rappresentazione? Non certo finchè il senso o la memoria mi porgono l'uno e l'altra alla mente come un tutto individuo o particolare, ma quando io posso trasportare in me sì l'uno che l'altra, come qualche cosa di astratto e di generale, quando posso pensare od affermare che quello è p. e. un *animale* od un *uomo*; e questa un complesso delle note o qualità essenziali all'uno o all'altro. Quindi al conoscere od intendere, ossia all'intelligenza, occorre l'altra nota caratteristica ed ugualmente costante degli *astratti* o delle *generalità*, per le quali gli stessi oggetti corporei o sensibili ed individuali si concepiscono e si rappresentano alla mente come qualche cosa di astratto o di generale. Così io non posso comprendere nè avere l'idea neppure di quest'*uomo*, di quest'*albero*, di questo *animale*, se non sotto la forma dell'astratto o del generale. Talchè a distormi dall'astratteggiare, m'è forza usare l'addiettivo *questo* siccome quello che va per concreti e particolareggia l'oggetto, com'è nella realtà. Dunque l'intelligenza sta: 1.° nel *discernere* o *distinguere* gli oggetti e le loro qualità, 2.° nel *discernere* o *distinguere* sempre sotto la condizione dell'*astratto* o della *generalità*. La prima nota caratteristica forma la sua essenza, la sua forza e tutti i suoi prodotti, e ci dà l'idea o nozione delle cose. La seconda è il mezzo o la condizione onde si ottiene questa idea o nozione. Ecco perchè il senso dista cotanto dall'intelligenza, essendo incapace per sè a distinguere, e non avendosi per esso che l'impressione o rappresentazione di oggetti particolari o individuali. Ecco perchè l'intelletto o l'intelligenza si appelli facoltà di conoscere o delle idee, facoltà del generale e non del particolare. Siccome però al distinguere o conoscere non si arriva sempre ad un tratto; siccome si conoscono gli oggetti ora per sè stessi, o sia immediatamente, ovvero per via delle loro qualità o relazioni, ossia mediatamente; così la cognizione altra è *immediata*, ed altra *mediata*. La prima s'avvera nella cognizione degli oggetti sensibili per mezzo del senso o dei sensi, e dicesi propriamente *percezione*. La

seconda accade di tutti gli oggetti intelligibili che non si possono rappresentare alla mente se non per opera delle loro qualità e note; e questa chiamasi *concetto* o *nozione*, od anche *idea*, se quelle note o qualità si riferiscono ad oggetti fuori d'ogni esperienza, come sono il vero, il bello, ed il buono assoluto, l'anima, Dio. Laonde, la *percezione*, il *concetto* e l'*idea* rappresentano quasi tre gradi ne'prodotti dell'intelligenza, appartenenti i due primi all'*intelligenza* od all'*intelletto*, ed il terzo alla *ragione*.

§ 18. Fin qui l'intelligenza nel distinguere, per via di astratti o di generalità, non dispiega che la sua prima facoltà o funzione *conoscitiva*, o psicologica. Ad essa ne compete un'altra non meno importante e maravigliosa, ed è la *ordinatrice*, o *logica*. I concetti e le idee non giovano alla cognizione, finchè sono disuniti e sperperati nella mente o nella intelligenza. I pensieri contradditorii o contrastanti fra loro non possono nè coesistere, nè coordinarsi in quella. L'intelligenza non è paga, se non arriva ne'suoi pensieri ai più generali od astratti, ossia ai principii dai quali deduce o ragiona, e trae la dimostrazione, il sistema, la scienza, la qual ultima leva la cognizione al massimo grado di verità e di certezza. Tutto questo annunzia l'altra funzione ordinatrice, o logica, dell'intelligenza, riposta nel giudizio e nel raziocinio. Anche questa funzione ordinatrice, che studiasi in separato dalla conoscitiva o psicologica nei corsi ordinarii di logica, forma parte integrale dell'intelligenza al punto che non si dà cognizione vera e certa senza giudizio e senza ragionamento, e senza il suo legame coi principii e colla scienza. Tanto è vero essere volgare l'adagio; *Dell'aver idee o cognizioni senza logica; dell'aver talento senza giudizio o criterio.* Quindi, concludendo, l'intelligenza è la facoltà o l'atto onde la mente conosce le cose per sè stesse o per le loro qualità e relazioni, ordinandole ed unificandole nel giudizio e nel raziocinio. Laonde stando alla sua doppia ed indivisa funzione del conoscere e dell'ordinare, l'intelligenza nel suo complesso ed in genere può dirsi la facoltà o l'atto di conoscere, di giudicare e di ragionare. Questa è la indole o natura dell'intelligenza, presa in tutta la sua potenza od estensione. Questa è l'unica e vera intelligenza nella pienezza del suo sviluppo e delle sue manifestazioni nell'uomo, e di cui il privilegiò natura per vederlo a maggioreggiare fra tutte le viventi creature; ed io credo di non errare affermando che le stesse parole d'*intelligenza*, d'*intelletto*, di *percezione*, di *pensare* e di *ragionare* accennano agli atti con cui la mente, per intendere e per conoscere, legge quasi dentro sè stessa, vi raccoglie ed ordina le idee che vi stanno per entro, le pi-

glia e se le appropria per farle sue, le pondera e pesa col confronto e col giudizio, e le trae le une dalle altre, allorchè ne abbia raggiunto il principio o la ragione. Ora dimando io se l'intelligenza, così intesa e determinata nella sua essenza e nelle sue funzioni, possa riporsi nella semplice coscienza degli oggetti interni od esterni, ovvero nelle azioni soltanto prodotte o modificate dall'esperienza, come assevera il Leuret? Se una cosiffatta intelligenza possa identificarsi con quella dei mammiferi anche più perfetti; se sia mai possibile, senza dare nelle assurdità, di rifavellare col *Leuret* dell'intelligenza degli animali, siano dessi pure il cane, il cavallo, la scimia, o l'elefante?

§ 19. I mammiferi, qualunque sia la loro specie ed il loro individuo, in quanto sono tutti *animali, bestie, bruti* presentano la vera negazione dell'intelligenza. Il ζὄον αλογον de'Greci, che altro significa mai, se non la irragionevolezza come carattere essenziale degli animali? Le voci *animal, brutum, bellua* de' Latini indicano la sola sensibilità, la pesantezza o stupidità, l'immanità o fierezza, e quindi sempre il difetto d'intelligenza e di ragione. Lo stesso dizionario della lingua italiana, e le lingue, come tutti sanno, sono il deposito dell'idee, qualifica l'*animale* in genere, per ciò che è provveduto d'anima, ma che manca di mente e d'intelletto in ispecie, la *bestia* per l'essere che è fuori di ragione, ed il *bruto* per l'animale ch'è privo d'intendimento. Ma più che l'etimologia de'vocaboli, la ragione de'fatti dimostra che ne' mammiferi non esiste assolutamente l'intelligenza; e questo è un rincalzo dell'argomento contro l'erronea dottrina del *Leuret*, colla quale, non che supporla negli animali, egli la ammette per uguale a quella dell'uomo, mentre ne è tanta la differenza che bisogna dire o non essere intelligenti gli animali, o non esserlo l'uomo.

§ 20. I mammiferi, qualunque essi siano, non hanno, nè possono avere intelligenza. Essi sono forniti soltanto d'*istinto*, di *senso* e di *moto*, di *memoria*, d'*immaginazione* e di *associazione*, parlando sempre delle loro specie più perfette; e queste facoltà d'ordine inferiore suonano tutt'altro che intelligenza. Coll'istinto hanno tendenze o disposizioni cieche ed irresistibili, indipendenti affatto da un disegno o da un fine che supponga l'intelligenza. Col senso s'accorgono delle esterne impressioni, hanno la coscienza di sentire, ma senza verun intendimento, senza veruna cognizione degli oggetti e della loro impressione. Scomparsi gli oggetti e cessate le loro impressioni sul senso, le riproducono in sè mediante la memoria, l'immaginazione e l'associazione. All'atto delle impressioni o rappresentazioni gradevoli o disgradevoli, appetiscono gli oggetti

materiali a seconda di quelle, e quindi si muovono ed operano spontaneamente, ma senza uno scopo ragionevole, senza un divisamento od un' intenzione qualunque che additi la vera intelligenza. Che se col sentire e col ricordarsi gli animali giungono a distinguere il sasso dal pane, il padrone dall' estraneo, la casa propria da un'altra, ciò è l'effetto di un nesso tra le sensazioni attuali e le passate, mediante la memoria e l'associazione, e non mai dell' intelligenza. Coll'intelligenza non solo si percepisce e si conosce, ma si astrae e si generalizza; ma tutti dichiarano gli animali inabili a qualsivoglia astrazione o generalizzazione. Se si concede loro l' intelligenza, è mestieri pur concedere loro il giudizio ed il raziocinio; e quale mai tra i bruti mostrossi sinora giudicante o ragionatore? Lo stesso *Leuret* niega loro le idee astratte e la vera riflessione, sebbene dopo, con molta inconseguenza, li dichiari capaci d'idee e di giudizio. Che se i mammiferi fossero realmente intelligenti, perchè non accrescono e perfezionano le loro cognizioni, perchè non riescono nelle scienze e nelle arti come l'uomo, perchè si reputano incapaci di moralità, e si ritengono così alieni dall'ordine morale, perchè si segregano e si confinano fuori del consorzio umano per essere collocati dalla società e dai legislatori nel novero delle cose?

§ 21. Nè contro sì validi argomenti varrebbe il replicare che gli animali anche col senso distinguono o conoscono gli oggetti materiali e sensibili; che avendo eglino un apparato cerebro-spinale analogo a quello dell'uomo, debbono avere anche analoga l'intelligenza; che non considerandosi più gli animali per macchine od automati, ma per esseri dotati d'anima, è forza che vadano anch' essi forniti delle corrispondenti facoltà tra cui l' intelligenza; giacchè a queste opposizioni rispigolate nel campo della sofistica mi è facile il dar pronta risposta. Nelle funzioni del senso bisogna distinguere la semplice coscienza dell' impressione, o della rappresentazione dell'oggetto dalla vera percezione o conoscenza dell'una e dell'altro. Quella spetta anche agli animali, e questa al solo uomo. Per quella l'animale si muove ed opera, secondo che il piacere lo trae dall'una o dall'altra parte, dall'uno o dall'altro oggetto. Perciò ci pare che discerna o conosca veramente la cosa o l'oggetto verso cui si muove, ma in realtà non è che la sensazione e non già l'intelligenza che il guidi all' azione. Tutto questo è spiegabile col senso e colla memoria, indipendentemente da qualunque concorso dell'intelligenza. Il senso nel bruto, e quindi anche la memoria e l' immaginazione, s' accompagnano colla coscienza, ossia col solo accorgimento dell' impressione o rappresentazione; e questa, secondo che è piacevole o dispiacevole, lo eccita a muo-

versi e ad operare diversamente. Il senso invece, nell'uomo, oltre a questa coscienza si congiunge all'atto della percezione o conoscenza immediata, che è tutto intellettuale e comprensivo, e non già sensitivo e memorativo, come è quello della coscienza. Quindi nell'uno non c'è che l'accorgersi o l'avvertire, senza alcun conoscimento dell'oggetto avvertito; nell'altro, all'invece, c'è accorgimento od avvertimento, e più la distinzione e nozione non che dell'oggetto avvertito, ma ben anco dell'impressione o rappresentazione da esso occasionata. Fatta pertanto questa chiara e giusta distinzione tra la semplice coscienza e la vera percezione nelle funzioni del senso, non regge più la supposta percezione, e quindi l'intelligenza degli animali in quello. Che se non può niegarsi il fatto del cane che distingue il pane dal sasso, il padrone dall'estraneo, anche questo non giova punto al supposto in lui d'una vera intelligenza. Tutto dipende dalla fallacia delle apparenze e dalla riluttanza a profondarsi nell'analisi. Il cane, alla vista del pane e del sasso, ricorda per via di associazione l'impressione gradevole dell'uno la dispiacevole dell'altro; e perciò è naturale che tenda a quello piuttosto che a questo. E dove qui c'è ombra mai d'intelligenza, anzi di giudizio, ove si voglia attribuire un tal atto a deciso preferimento? Tanto è vero che se il cane vedesse per la prima volta il sasso ed il pane, potrebbe illudersi sulla scelta, ove il suo odorato finissimo non l'avvertisse di darla al secondo, e non al primo. Tutto il discernere fittizio del cane dipende pertanto da un semplice giuoco di associazione tra le sensazioni attuali e le passate. Così se il cane distingue il padrone da un altro, non lo distingue perchè effettivamente il conosca, o sappia la differenza che passa tra quello e questo, ma perchè condotto dall'olfatto, l'uno gli cagiona un'impressione ben diversa da quella dell'altro. Dunque anche questa ricognizione e distinzione dipende da due sensazioni od impressioni diverse, che come tali avvertono il cane operante e moventesi a seconda di quelle. Egli è perciò manifesto che quando supponiamo per tali atti intelligente il cane, abbiamo il viso diritto più all'apparenza che alla realtà, e che il nostro giudizio mente e falseggia per la comune abitudine di riferire al di fuori di noi tutto quello che avviene dentro di noi stessi, abitudine tanto più facile, quanto è maggior la rassomiglianza o l'analogia fra gli oggetti riferiti tra loro. Onde è che siccome noi siamo assuefatti col senso ad accorgersi degli oggetti esterni e a conoscerli e distinguerli ad un tempo, così pensiamo che accada il medesimo ne' bruti, allorchè adoperano quella facoltà.

Ne'mammiferi singolarmente di specie più perfette, come sono quelle dei

vertebrati, esiste indubitatamente un apparato cerebro-spinale non molto dissimile del nostro. Ma sarà perciò stesso legittima l'induzione che in quelli debba esistere eziandio l'intelligenza in tutta analogia con quella dell'uomo? L'apparato o sistema cerebro-spinale è al tutto materiale o corporeo, e l'intelligenza immateriale, incorporea, spirituale. Dunque male si argomenta dall'esistenza di quello all'esistenza di questa. L'apparato cerebro-spinale è l'organo o strumento all'esercizio dell'intelligenza, nè sarà mai confondibile con quella. Un diverso supposto conduce al sistema delle facoltà umane anche le più elevate, siccome tante trasformazioni della sensazione, siccome un prodotto del solo meccanismo cerebrale. Ed io lascio di buon grado cui piace una tale filosofia. Se l'apparato cerebro-spinale esiste tanto nell'uomo, quanto nei bruti, e ne è così diversa l'intelligenza, egli è segno che l'uno non si connette così necessariamente coll'altra da dedurne questa per la ragione di quello. È omai vieta la quistione sull'anima delle bestie, ed è nell'universale l'opinione contraria all'automatismo dei Cartesiani. Ma quantunque i bruti siano esseri animati, non ne viene la conseguenza ch'essi siano intelligenti, e meno poi che lo siano al pari dell'uomo. A dar ragione dell'anima delle bestie bastano la coscienza delle esterne impressioni, la memoria e l'immaginazione, e la spontaneità del moto, senza che perciò sia loro necessaria l'intelligenza. L'anima delle bestie può essere d'un ordine o d'una specie inferiore all'umana. Ciocchè importa si è ch'essa sia spirituale e non materiale. E quale distanza non passa tra l'anima d'un Esquiamese e d'un Lappone e quella d'un Newton e d'un Galileo? Tolte così di mezzo anche queste difficoltà, parmi abbastanza provata la fallacia delle dottrine filosofiche del *Leuret* nel definire l'intelligenza, e nell'attribuirla pressochè identica a quella della quale fa sì bella mostra l'uomo.

Dopo di che mi si appiana la strada al secondo assunto propostomi in dimostrare che tutti i fatti addotti dall'autore a conferma dell'intelligenza ne'mammiferi, si spiegano benissimo col semplice intervento delle facoltà inferiori di cui è dotato il bruto, senza alcun sussidio dell'intelligenza.

§ 22. Non contento il *Leuret* d'aver qualificati i mammiferi per esseri intelligenti come l'uomo, li dichiara capaci d'idee, di giudizio, di linguaggio, di affetto, e di passione, e perfino del senso della giustizia e del dovere. E tanto egli sostiene in aperta contraddizione con sè stesso, imperciocchè avendo niegato loro dapprima le astrazioni e la vera riflessione, ripugna dopo l'accordar loro il pensare, il giudicare, ed il parlare. Nel che io penso gli argomenti stessi

da lui addotti ritorcersi direttamente contro il tentativo della sua dimostrazione. Lasciamo pure da un canto il significato tecnico e filosofico della parola *idee* e pigliamole come semplici nozioni o cognizioni di qualunque oggetto. Anche in questo senso esse importano astrazioni e generalità, posciachè l'intelligenza od intelletto non agisce che per via di astratti e di generalità. Che se i mammiferi sono inetti all'acquisto delle idee in generale, perchè inetti all'astrazione, tanto più lo saranno all'acquisto di quelle che riguardano in particolare o la fuga de'pericoli, e delle insidie, o la difesa reciproca, o l'apprendimento del leggere o dello scrivere, o lo imparare il giuoco delle carte, e l'arte della musica. Son questi i fatti singolari che ricorda il *Leuret* del lupo, della volpe e del cane, e onde pretende dimostrarne l'intelligenza. Ma quanto egli s'apponga in fallo, ognuno il può comprendere assai di leggieri. Credete voi in sul sodo che quando la volpe s'avvede di qualche insidia dinanzi alla propria tana, e stassi là accovacciata anche per parecchi giorni, abbia in mente proprio le idee delle insidie e del pericolo che le sovrasta, e del nascondimento o dello starsi ad aspetto per non essere assaltata, talchè nell'appiattarsi rumini il modo di schivarle e di deluderle facendo un contrattempo ad altrui, siccome farebbe l'uomo? Non mai. La volpe all'appresentarsi d'un oggetto che le ingombra l'uscita della tana, è consapevole d'impressioni e di rappresentazioni attuali, e che per via di associazione ricorda come moleste e disgradevoli. Quindi tali impressioni o rappresentazioni bastando ad intimorirla ed a tenerla celata per l'istinto della conservazione e per quello del piacere, ella non si muove più e si tiene in nascoso. Fin qui adunque non vi ha sentore d'idee o d'intelligenza. Così se i lupi escono in compagnia, se schieransi ordinatamente avanti il nemico, se s'indettano apparentemente sul modo di rapire le pecore, avranno eglino perciò le astratte idee della forza o difesa collettiva, dell'antiveggenza e prudenza umana nel resistere, nel combattere e nel predare? Ed a spianare tutto questo non bastano le tendenze a trovarsi insieme e ad imitare, ossia gl'istinti della sociabilità e dell'imitazione, lo stimolo della fame che non si sazia che con la preda, l'attualità o presenza di essa congiunta alla memoria di sensazioni già provate gradevoli o di atti analoghi già praticati da loro stessi o veduti in altri? E non alluse a simili fenomeni al certo non preternaturali il Dante stesso tanto grande nella Poesia, quanto lo è nell'osservare la natura, con quei mirabili versi:

Come le pecorelle escon del chiuso
Ad una, a due, a tre, e l'altre stanno
Timidette atterrando l'occhio e 'l muso
E ciò che fa la prima e l'altre fanno
Addossandosi a lei, s'ella s'arresta,
Semplici e quete, e lo imperchè non sanno (1).

Ugualmente i portenti dei cani di *Zeitz* e del dottor Bennati nel calcolo, nel giuoco e nel canto lungi dal riferirsi ad idee che essi abbiano pel senso di generalità o di astrazioni, come si esige all'intelligenza, non suppongono che sensazioni, memoria ed associazione. Il cane stesso ch'io anni fa vidi a Milano nel Teatro della Canobbiana esperto nel conteggiare colle carte, e nel fare la somma e la sottrazione, stava sempre adocchiando il padrone, che colla voce e con certi gesti già intesi gli suggeriva quando di togliere, quando di aggiungere carte a carte; onde il cane richiamando per via di associazione con quelle voci e con quei gesti quelle messe o mute di carte alle quali era stato lungamente abituato, veniva a dar sembianza d'un compito mentale ad associazioni meccaniche richiamate o ripetute coll'altrui suggerimento. Non è impossibile che il cane parlante di *Zeitz* ed il barbino sì destro nel musicare del dott. Bennati riuscissero coll'educazione o coll'avvezzamento a certi abbajamenti concertati con certe voci o tuoni o col suono delle campane, i quali avessero poi colore di note musicali o di vere parole. Una volta che si ammettano in loro il senso, l'istinto dell'imitazione, la memoria e l'associazione, tutto diventa spiegabile senza bisogno d'idee e d'intelligenza. E si vorrà forse sostenere dai Cinologi che il cane computista comprendesse la quantità ed il numero, il valore delle loro cifre, e le regole razionali per fare la somma o la sottrazione, a motivo che colle carte a lui note e presenti aveva macchinalmente imparato ad unire le une colle altre, a togliere dalle superiori le inferiori, onde ne risultasse la differenza? Ciò sarebbe un volere od un provar troppo per rendere incredibile anche quel poco che ci può essere di vero. Si vorrà affermare sul serio che il cane musico o parlante avesse idea delle voci articolate, e di quella che con esse andava significando, oppure delle note musicali delle quali facevasi meccanico ripetitore? I cani di tal fatta se avessero sortita da natura la intelligenza,

(1) Canto III del Purgatorio.

che altro mancherebbe loro per farsi maestri del dire, e della musica coll'ajuto dell'esperienza, e dell'educazione?...

§ 23. Tutti gli altri fatti che allega il *Leuret* della fierezza, ed in una della sociabilità del leone; della tigre, della jena, del *janguar* e del leopardo, della solitudine, e dell'amore alla libertà dell'orso, del predamento notturno del martoro, e della faina, della caccia degli insetti della nottola, della stupidità dell'*Ai* e dell'*Unau*, della convivenza delle marmotte, e del coniglio, del timore della lepre, dell'abitudine di scavare dell'armadillo, del nidificare sulla pianta dello scojattolo, del talento costruttivo dei castori, della velocità del capriolo, del cervo e della gazzella, della lentezza del montone, dell'abilità del bue e del cavallo in riconoscere la stalla ed il padrone, della pazienza e laboriosità dell'asino, della torpidezza del tapiro e dell'ippopotamo, del gusto depravato del ciacco, della lecconeria del rinoceronte, della docilità e dimestichevolezza della foca e della balena, del pudore e della sagacità dell'elefante, ed in ultimo della mobilità, e della scaltrezza delle scimmie, tutti questi fatti, io ripeto, mentre non danno alcun barlume d'intelligenza che sfavilli negli animali, rientrano nella sfera degli istinti, e delle facoltà inferiori del senso, delle quali unicamente sono dotati. La fierezza, ed insieme la sociabilità del leone, o delle altre bestie feroci nascono da cieco istinto, l'uno risvegliato dalla fame e dalla vista del sangue, l'altro dalla sazietà e dal piacere delle carezze. Tantochè il leone quando fa le sue volte, ed è preso da voracità, accarna e sbrana sì il padrone che lo amorevoleggia, come il nemico che lo assale e lo ferisce. Tantochè il sorcio, per indole socievolissimo, accecato dalla fame mangia il suo simile in difetto d'altro cibo. L'amore alla solitudine e alla libertà è un istinto dell'egoismo conservatore, una tendenza necessaria di tutte le bestie feroci; talchè se l'orso ingabbiato non fugge, lo fa per una forza superiore che il vince. Il martoro e la faina vanno in cerca di notte dei pollaj e delle colombaje non certo a disegno e per un ragionato intendimento, ma solo perchè alla notte meglio odorano, ed hanno più acuta la vista, e perchè a quell'ora gli stimola assai più la fame, e quindi l'istinto della conservazione. La nottola se fa mostra di un tatto finissimo, è ciò proprio di sua natura, qual animale notturno, o della necessità di evitare ostacoli e pericoli trammezzo all'oscurità, e alle tenebre. Se l'*Ai* e l'*Unau* sono stupidi e lenti al pari del montone, e la gazzella e lo scojattolo emulano nella velocità e nella snellezza gli animali volatori, non dipende questa differenza nè da prontezza, nè da grossume di mente, ma solo

da più o meno agile struttura delle membra. Il timore e l'ansa della lepre in fuggire deriva dal suo udito finissimo, come la facilità di correre sulle piante dello scojattolo, e la tendenza a bucacchiare dell'armadillo procedono nell'uno da leggerezza delle zampe, e nell'altro dalla forma dei denti. Nè potrebbesi scorgere traccia d'idee o d'intendimento nemmeno nelle costruzioni sì stupende dell'ondatra e del castoro, nel riconoscimento della stalla e del padrone per parte del cavallo e del bue, nel malgusto del porco o ciacco, nella bonomia dell'elefante e dell'asino, nella leccardaggine del rinoceronte, nella docilità della foca e della balena, nella desterità e furberia della scimia, senza falsare di posta il giudizio che tutti noi portiamo assieme ai filosofi sulla natura e sulle funzioni dell'intelligenza. I castori s'adunano a colonie ed a famiglie sulla riva dei fiumi perchè anfibj, e perchè tratti a colleganza dall'istinto di sociabilità. Essi come animali roditori e forniti di denti obliquamente acuminati, di dita natatorie, e di una coda piatta e squammosa a foggia di spatola, posseggono quanto occorre per fabbricare le loro casuccie a pelo dell'acqua, ed il loro lavorio dietro a quelle, checchè ne dica il *Leuret*, riesce così monotono ed uniforme da escludere ogni pocolino d'intelligenza sempre variata e progrediente. Che se fosse vero e reale tuttociò che loro appropria lo stesso *Leuret*, bisognerebbe tenerli in conto dei migliori architetti ed idraulici del mondo. Non tutti i naturalisti pur troppo sono sempre freddi ed esatti osservatori; ma alle maraviglie della natura si lasciano talvolta trasportare dall'entusiasmo e dall'esagerazione; e perciò non è da stupire se eglino in generale nelle colonie e famiglie dei castori ravvisano l'immagine di una società ben ordinata e libera, nelle loro casuccie un prodigioso talento di costruzione, e nella divisione o segregazione de' piani in quelle l'istinto e la nozione della proprietà. Se non che alcuni tra loro, come il Buffon, ed il Fleming, riferiscono questi tre oggetti all'intelligenza non per altro paragonabile a quella dell'uomo incivilito, ma selvaggio; mentre altri invece e più ragionevoli e più ritenuti, come il Cuvier, li fanno dipendere da una specie d'industria soltanto meccanica, od istintiva. Ma il Leuret (Vol. I, *pag.* 508) ossequioso a Buffon contraddice apertamente a Cuvier, affermando che comunque l'impulso al fabbricare dei castori sia istintivo, ciò nondimeno a cagione della varietà dei lavori e delle difficoltà che quelle bestie sormontano, viene diretto e presieduto dall'intelligenza, quello come primo movente, e questa come stimolo concomitante e consecutivo. Il fatto che, a detta dei Naturalisti, proverebbe l'intelligenza de'castori nella formazione

delle loro colonie e della loro società, è quello del concorso unanime di sforzi e di mire comuni nel fabbricare, il qual concorso è inseparabile da un accordo o intendimento tra molti individui per un fine o scopo comune. Il fatto del concorso dell'intelligenza nel talento costruttivo dei castori consisterebbe nella varietà, nella previdenza, nella scelta e nell'aggiustatezza dei lavori a riuscimento delle loro fabbriche. Il fatto comprovante ne'castori l'idea od intelligenza del diritto di proprietà è riposto nell'appaiarsi dei maschi e delle femmine nelle case rispettive, e nell'adunamento di tribù separate con un proprio magazzino di provvigioni (1).

Io mi fermo più a dilungo ed a bello studio sui prodigii dei castori e perchè è questo l'argomento più forte e prediletto dei Naturalisti a sostegno dell'intelligenza negli animali, e perchè una volta che sia dimostrato anche questi dipendere dall'istinto e dalle altre facoltà inferiori loro proprie od esclusive, non si pretenderà più di spiegare gli altri, che sono da meno, coll'ajuto dell'intelligenza.

(1) V. Buffon, Storia Naturale nuovamente ordinata e continuata per opera di C. D. Lacépède. Tom. XIX. Livorno 1830 pag. 620, — Fleming, Filosofia Zoologica già citata. Vol. I, pag. 446. Quest'ultimo Zoologo parlando della differenza tra la *ragione* e l'*istinto* insinua che una tale differenza non sia di costituzione e natura mentale, ma soltanto di superiorità e di grado. Ma questo è un dire strafalcioni in Psicologia; giacchè la ragione differisce dall'istinto non nel grado, ma sibbene nell'essenza e nella costituzione. L'*istinto*, lasciando a parte tutte le velleità di quelli che vorrebbero cancellarlo dal Dizionario filosofico e per l'insignificanza ed inesattezza del nome e per la paura di non ammettere con esso idee innate, è reale ed esistente non perchè il dicano i filosofi, ma perchè più di loro lo dicono ed affermano tutti i Naturalisti, all'appoggio dei fatti. L'istinto qualunque sia la varietà delle sue definizioni, e la suddivisione delle sue specie, comprende essenzialmente, come ha già detto il Leuret, tutte le azioni negli animali anteriori all'esperienza, e indipendenti da disegno o da intelligenza. Esso come tale è cieco e necessario, e perciò diverso dalla ragione sempre illuminata e libera. Sicchè l'istinto è l'opposto della ragione. Nè valga il replicare in contrario che tale opposizione e differenza tra l'istinto e la ragione deriva dalla ambiguità dello stesso vocabolo *istinto*, essendochè talvolta esso si riferisce soltanto alle potenze attive del bruto, e tal'altra anche alle intellettuali; mentre nell'un caso l'istinto è sempre un principio necessario e non libero com'è la ragione, e quindi la volontà, e nell'altro è un principio sempre cieco e senza previsione e disegno e perciò negativo dell'intelligenza e della ragione. Così chiarita la vera natura dell'istinto, e la sua differenza dall'intelligenza e dalla ragione, si comprenderà meglio com'esso concorra alle mirabili costruzioni de'castori, senza supporre in essi le idee di spazio e di tempo, come sì stranamente sentenziano alcuni scrittori chiarissimi di Storia Naturale e di Zoologia.

§ 24. Io non vo' mettere in dubbio quanto si magnifica, particolarmente dal Buffon, intorno all' industria dei castori; e sì ne avrei ben d'onde, dopo chè ei medesimo confessa essersi favoleggiato non poco in proposito, e dopo chè questi loro fatti miracolosi sarebbero avveniticci, perchè avveratisi nell'America settentrionale. Ma si ammettano pure per incontroversi e la raunata de'castori in forma di società, ed il loro affaccendarsi in fabbricare, ed il loro costume di separate abitazioni; e onde sarà per ciò solo l' intelligenza? L'affoltarsi de' castori lunghesso i fiumi nei mesi di giugno e di luglio è tutto opera del senso e dell' istinto. Essi sono per natura nuotatori ed avidissimi dell' acqua, e dove li premano e la vista di quella, e la sferza dei calori, non è strano il vederli concorrervi a frotte, senza che perciò abbiavi indizio d' un comune accordo, o d'uno stimolo che non sia quello del semplice incitamento. Una volta ch' essi sieno così assembrati, tratti tutti dal medesimo istinto di rodere e di segare, non è difficile che insieme si mettano quali a rosicchiare alberi alla radice, quali a sbarbicare i rami ed a sfrondarli, quali a reciderli e digrossarli, quali a piantarli ed affondarli a modo di palafitte, interponendovi quell'argilla che compressa ed appianata dalla lunga coda piatta venga a dare le sembianze di casuccie a cupola ai monticelli di terra così preparati e disposti. Nè l' istinto di costruire è nuovo negli animali. Gl' insetti si scavano da sè le tane colle proprie mandibole, trasportando all'uopo la terra a grandi distanze. I quadrupedi che hanno l' istinto del foracchiare o col muso o colle zampe, s' internano nel suolo, gittano coi piedi anteriori o deretani il materiale superfluo o d' ingombro, e sanno imitare benissimo i cementi di terra circostante. Non è perciò nè da trasecolare, nè da dar nelle maraviglie se anco i castori spinti dal medesimo istinto, famigliari all'acqua e alle rive dei fiumi, e forniti di naturali strumenti a nuotare, a rodere, ad accumulare, a premere, a battere ed a spianare giungano a fabbricare tane a forma di case o capanne. Se la fabbricazione di queste case, non altrimenti che ad istinto, si volesse attribuire ad intelligenza, che direbbesi allora della uniformità e rozzezza di queste case tanto contrarie al progredire dell' intendimento che perfeziona ed abbellisce sempre i proprii lavori, dell' inettitudine dei castori all' identico fabbricare, a mala pena mutate le circostanze, dell'assoluta incapacità architettonica del castoro solitario e domestico del Canadà posseduto dal Buffon, e che aveva conservato il solo istinto di rodere? D'altra parte l'appaiarsi dei castori in numero uguale di maschi e di femmine, e la loro usanza di escludere le altre famiglie, lungi dal far presu-

mere in loro un principio d'intelligenza e l'idea della proprietà, si risolvono e si spiegano benissimo coll'istinto della propagazione, il quale tra per la sua tendenza elettiva, tra per il suo maggior eccitamento nello stato di abituale dimestichezza rende incompatibile la dimora comune con altri, e così il fatto d'una materiale segregazione va a dare il colore di quell'esclusivo possedimento che costituisce l'idea elementare della proprietà e del dominio. Tutto l'operato pertanto così stupendo dei castori parmi assolutamente chiaro ed intelligibile coll'istinto e col semplice concorso del senso, della memoria, dell'imaginazione, e dell'associazione congiunta allo stimolo del piacere e del dolore, ed al movimento spontaneo e volontario, le quali tutte sono facoltà ben diverse da quella dell'intelligenza.

§ 25. Che se il castoro, detto per antonomasia l'animale architetto fra gli animali, opera soltanto per istinto e col sussidio delle facoltà inferiori, come potrà prendere mai più adito l'intelligenza nel riconoscimento del cavallo e dal bue della propria stalla e del proprio padrone, nelle altre tendenze ed azioni dell'asino, del ciacco, del rinoceronte, della foca e della balena, dell'elefante e della scimia? Il bue ed il cavallo al vedere la propria stalla la ricordano per un'associazione di analogia; e per tal modo si spiega com'essi entrino da sè in quella, come rifuggano dalle altre in cui non sono mai stati, come alla voce ed al gesto del padrone, a cui sono famigliari, s'inducano a seguir questo piuttosto che gli estranei. L'asino è docile e paziente per natura e per temperamento, come è feroce e sanguinaria la jena, traditore e disaffezionato il gatto. Il porco, o ciacco appetisce la belletta e le sozzure, perchè non ha nè delicati nè fini i nervi del gusto, com'è leccardo il rinoceronte, appunto perchè ha troppo squisito il palato. La foca e la balena se sono arrendevoli e dimestiche, se hanno un'apparente docilità per lo stesso lentore della loro mole, divengono subito feroci, ed immansuete allorchè vengono attaccate, e si desta in loro il naturale istinto. L'elefante e la scimia, che pur simulano cotanto l'umana intelligenza, sono ben lungi dal possederla effettivamente. Gli elefanti attruppano solo per gl'istinti della sociabilità e dell'imitazione, che hanno per loro comune fondamento, quello del piacere. La bontà e dolcezza dell'elefante dipende in parte dalla sua abitualezza al cibo vegetabile, ed in parte dal suo dimesticamento coll'uomo. La sua verecondia, onde s'asconde nelle foreste colla femmina, è un fatto non ancora comprovato, perchè nessun naturalista ha assistito alle sue nozze. Tutte le altre abilità o destrezze dell'elefante nel tra-

sporto dei pesi, nel prender vendetta di chi lo sbeffeggia, nello sgruppare le corde, nell'aprire le porte, nella musica e nelle teatrali rappresentazioni, hanno la loro ragione nelle facoltà sopra enunciate, e proprie soltanto degli animali, ma non nella intelligenza. Se l'elefante trasporta pesi, li trasportano pure l'asino ed il bue, che non gli soprastanno certo nell'intelligenza. Il pigliarsi vendetta ed il riconoscere la persona dell'offensore sono in lui l'effetto di sensazioni attuali, congiunte a memoria, ad associazione, e ad imaginazione. Le altre mirifiche azioni dell'elefante ei non le compie se non sempre alla presenza ed al suggerimento del padrone, e dopo esservi stato istruito; e questo annunzia tutt'altro che intelligenza. Il diletto che esso ritrae dalla musica, il mostrarsi intendevole del linguaggio del padrone sono due fenomeni originati l'uno dalla finezza dell'udito, e l'altro dall'acume della vista accompagnato da un gioco di associazioni. Finalmente la mobilità, l'accorgimento e la malizia della scimia fino all'intendenza dell'*Orang-Outang* o dell'uomo selvaggio, si convertono ad uno ad uno in tanti moti ed in tante azioni dell'organismo, dell'istinto e della sensazione primitiva, o ricordata ed associata mediante l'abitudine, o la educazione. Lo stesso Buffon mentre all'aspetto esterno dell'*Orang-Outang* il considera quasi come un mostro od una degenerazione dell'umana specie, si guarda bene dal collocarlo in questa, non tenendolo nemmeno per il primo nell'ordine degli animali; tanto egli è persuaso che l'anima, il pensiero e la parola non dipendano dalla forma, o struttura del corpo. (V. Buffon, *Storia Naturale* Ediz. già citata *di Livorno*, Tom. XX). E di vero se si analizzi ben bene anche tutto quello di mirabile che riferisce il Leuret del *Makis* e delle scimie, tutto ne parrà spiegabile in loro col solo istinto e colle facoltà inferiori già ricordate. Il Makis si sdraja al sole colle braccia incrocicchiate scimiotteggiando l'uomo per l'istinto d'imitazione, ed ingabbiato muore di malinconia, perchè sente l'istinto della libertà, e della vita selvaggia; e dove venga represso e soffocato quest'istinto, qualunque animale deve patirne. I decantati portenti delle scimie disgradano assai a petto di quelli dell'*Orang-Outang* veduto e riveduto a Parigi dal Buffon. Quest'*Orang-Outang* stavasi ritto e pensoso, mostravasi docile ed obbediente ad ogni cenno del padrone, riconduceva per mano ed assai di buon garbo i suoi visitatori, sedeva a mensa col mantile dispiegato mangiando col cucchiajo e colla forchetta, e mescendo nel bicchiere. La scimia è così facile imitatrice e per la mobilità del suo corpo e delle sue giunture, e per l'istinto o talento dell'imitazione che in lei è più energico ed attivo che non negli altri

animali; ma i suoi imitamenti non partono da intelligenza, perchè altrimenti non sarebbero nè sciocchi, nè goffi o sconci, ed inopportuni al segno di tirarle addosso il castigo. La scimia intende il linguaggio umano perchè è fornita di udito e capace di connettere con certe voci certi gesti o certe azioni; nè perciò essa trasnatura, quando sappiamo dal Gordon che un *Orang-Outang* del Bengala non solo capiva le parole, ma era capace di emettere o pronunziare di seguito le sillabe *Yua-hou*. Essa mostrasi amica a chi le porge ghiotto cibo per il solo stimolo della fame e del piacere. L'affetto e la pulitezza per la prole hanno radice nell'amore ai nati comune a tutti gli animali; ed ove massimamente la pulitezza s'originasse da intelligenza, non farebbe così le pugna con altre usanze indecenti e schifose, tra cui quella dello spiluzzicare in testa. L'andare delle scimie in compagnia per rubare le frutta ne' giardini chiusi, l'entrarvi di alcune che le dispiccano, mentre altre stanno di fuori per farsele passare, non è come ha sognato qualche Economista anche Italiano, un esempio del gran principio nè della associazione nè della divisione del lavoro, ma un assembramento dovuto ai soliti istinti della sociabilità, dell'imitazione, e della conservazione. Quindi tutto ciò che di maraviglioso operano anche le scimie si riduce alla fine ad una serie di sensazioni, di ricordanze, di associazioni, di movimenti parte istintivi, parte spontanei, e d'imitazione sopra oggetti soltanto concreti, materiali e corporei, dai quali oggetti vanno così lunge l'intelligenza, e la ragione.

§ 26. Non pago il Leuret di aver consentito ai mammiferi e idee ed intelligenza, li vuole abili altresì al giudizio, ed all'affetto, e capaci di passioni, del linguaggio, e del senso del dovere e della giustizia, senza avvedersi che in tal guisa essi vengono nonchè a pareggiare, ma a soprastare all'uomo. Non è primo il Leuret che accordi al bruto il giudizio, ma v'ha taluni, anche tra filosofi, che non esitano ad asseverarlo. Se il cavallo trovasi ad un bivio sceglie in tra due la strada. Il bue tra fieno e fieno preferisce quello che meglio odora e che più gli gusta. E che altro è mai tutto questo, se non il giudizio? Ma io rispondo che anche qui si sdrucciola nell'errore per seguire l'apparenza. Non si può giudicare senza intendere, e se le bestie mancano d'intelligenza, come potranno elevarsi ad un atto di giudizio? Il giudizio sta essenzialmente nel subordinare il particolare al generale, e se i mammiferi non sanno nè astrarre, nè generalizzare, come sarà loro dato il giudicare? Il cavallo elegge la strada tra il bivio non a disegno, ma o perchè è memore di quella, o perchè

la vede somigliante alla consueta, o perchè va a casaccio sì per l'una che per l'altra. Il bue non confronta nè paragona tra le due sorta di fieno, ma appetisce l'uno piuttosto che l'altro solo perchè odora meglio, e lo ricorda il migliore. Laonde un pensare diverso procede dall'abitudine in noi stessi inveterata di riferire al di fuori quello che accade dentro noi stessi; di maniera che veggendo il cavallo ed il bue scegliere infra due oggetti, tosto riteniamo che il facciano al pari di noi a modo di deliberazione e di giudicio. Sicchè ingannati dalle apparenze prestiamo loro la stessa nostra facoltà di giudicare, ed i nostri medesimi modi di operare.

§ 26. L'affetto e la passione, l'uno come sentimento forte e veemente quali sono l'ira, l'entusiasmo, l'indignazione, l'altra come inclinazione preponderante e continua, quali sono l'orgoglio, la vanità, la voluttà, l'inimicizia, sono proprii soltanto dell'uomo, a motivo ch'egli solo conosce e pensa sulle cose anche astratte per esaltarsi, per accarezzarle e idoleggiarle, ovvero per avversarle e per abborrirle premeditatamente e volontariamente. Il bruto invece eccitato soltanto dall'istinto e dalla sola rappresentazione o sensazione di oggetti fisici, incapace di astrazione e quindi d'entusiasmo e di previdenza, non gli appetisce od avversa se non perchè allettano o disgustano il senso; prova modificazioni piacevoli e dispiacevoli solo per la fame e per la sete, per il diletto o per la molestia che recano gli elementi della natura, per le sofferenze o per le malattie alle quali soggiace qualunque corpo vivente. Quindi, non può darsi ch'ei senta un vero affetto o che venga preso da vera passione. E chi potrebbe qualificare seriamente per ira la rabbia del leone, per indignazione la collera dell'elefante, per pietà o compassione la sollecitudine de'cani del S. Bernardo in rintracciare i viaggiatori, per amicizia la tristezza de'cani alla morte de'loro padroni, per amore materno le cure delle scimie verso la prole, per gelosia il nascondimento che fa della femmina l'*Orang-Outang*, o per innamoramento la pugna della foca nell'ardore della sua libidine? Questi non sono affetti, almeno come allignano nel cuore umano, ma semplici piaceri e dolori fisici procedenti dal senso e dall'istinto, sentimenti inferiori e bassi che non nobilitano, nè innalzano a dignità ed a libertà le specie anco più elette degli animali. L'ira del leone a sembianza di generosità è sempre un acquetamento della ferocia dell'istinto e della sete naturale del sangue. L'indignazione dell'elefante non è quel santo sdegno che in noi si suscita alla vista del male o del bene immeritato, ma la rimembranza del male sofferto alla presenza dell'offensore. Il cane del

S. Bernardo condotto dall'odorato e dall'abitudine a ricorrere sulle orme dei viaggiatori, li salva anche col proprio disagio, ma non mai per l'idea sublime del dovere e del sagrifizio di sè stesso, mancando d'ogni nozione di virtù e di moralità. L'amore materno delle scimie è tutto fisico, sensuale ed istintivo, scalda solo per essere piacevole, e non ha nulla di comune con quel sentimento disinteressato e virtuoso che muove la madre tra' dolori a nutrire il bambino, i genitori a torsi di bocca il pane per darlo a' figliuoli, e che serbasi equabile anche nel rigore del gastigo. La gelosia dell'*Orang-Outang* si desta all'istinto del sesso, è sempre cieca e indomita nel contrasto, nè si eccita proprio al temuto rapimento di altri piaceri. E come gli animali o i mammiferi sono alieni dall'affetto umano, così eglino non sentono nemmanco le umane passioni. Gli è un travisamento quello di pigliare per passioni l'inimicizia del lupo o della jena coll'uomo, la vanità delle monne in abbigliarsi, l'orgoglio del cavallo al solito sprone del cavaliere, l'invidia delle scimie alle carezze delle compagne. In questo travisamento o scambio sta tutto l'errore di Leuret e di altri Naturalisti. Siccome la passione è un'inclinazione od avversione preponderante e continua verso gli oggetti piacevoli o dispiacevoli, così essa è guidata sempre dal lume dell'intelletto o del giudizio, onde discernere come suo scopo l'oggetto che ama o che odia, e trovar modo a raggiungerlo e satisfarlo. Oltredichè la passione essendo per sè un movimento sempre spontaneo e deliberato dell'animo verso un dato oggetto, così suppone necessariamente l'intelligenza e la libertà; senza di che la passione non sarebbe più in colpa, nè degna di biasimo e di riprovazione. Adunque è impossibile che i mammiferi siano dominati da vere passioni. Di fatti l'inimicizia del lupo e della jena verso l'uomo altro non è che la brama istintiva del sangue connata in tutti gli animali feroci o nelle fiere bestie. La smania delle monne in adornarsi ed abbellirsi non è vanità diretta dal fine di piacere ad altrui cogli adornamenti, ma un semplice impulso od istinto meccanico all'imitazione degli altrui atti o gesti; tanto che le scimie e la monna in ispecialità si mettono addosso indistintamente tutte le robe, e perfino quelle disconvenevoli, e che le pongono in ridicolo. Il così detto orgoglio del cavallo lungi dall'essere una stima soverchia di sè e delle sue qualità, è una semplice manifestazione della snellezza delle sue membra, de'suoi muscoli e de'suoi movimenti, una voglia o disposizione a correre ed a nitrire; onde ch'egli nè sente, nè intende il desiderio di maggioreggiare o d'insuperbire. Il dispiacere delle scimie al vedere blandite ed amorevoleggiate le compagne non è l'invidia che le

innaspi, ma l'ingenita mobilità che le porta a varie contrazioni muscolari, e lo stimolo della ghiotteneria che le rende ostili alle altre. In una parola, se non fosse molesta la ripetizione, deve conchiudersi che anche queste passioni attribuite dal Leuret agli animali, non sono che ingannevoli apparenze; giacchè secondo la Psicologia non è fatalmente che l'essere pensante, ragionevole e libero che sia suscettivo di passioni.

§ 28. Eppure il nostro Autore dimentico di queste dottrine filosofiche e psicologiche procede assai più innanzi, affermando che i mammiferi sono capaci eziandio di linguaggio e del senso del dovere e della giustizia, e ne cita a prova l'esempio del cane di Mompellieri veduto dall'*Arago*, e ricusante di far correre le girelle dello schidione finchè non fosse venuto il suo torno, e dei mastini rammentati da *Dureau de Lancalle*, i quali voltolavano pure lo spiedo in un collegio, nè stavano più ad ubbidienza alla minima parzialità o sopraffazione (1). Parlando del linguaggio, è da osservarsi che la sua sostanza non istà ne' puri suoni o segni, ma nell'intenzione di significare con questi i proprii sentimenti o pensieri. I primi sono semplici sensazioni o rappresentazioni alle quali bastano gli organi della loquela, della vista e dell'udito, e la coscienza per avvertirli ed associarli. La seconda è un atto di deliberazione e d'intelligenza. Se ciò è, non si darà più nelle maraviglie, che il cavallo e l'elefante percepiscano ed associno i suoni od altri segni formanti il linguaggio, e che il cane giunga a ripeterli e vocalizzarli. Ecco a che si riducano tutta l'intelligenza e tutto l'uso del linguaggio ne' mammiferi. Eglino all'udire quelle date voci e al vedere que' dati gesti con cui hanno associato dati movimenti e date azioni, o per l'istinto della imitazione od anche coll'esperienza e colla educazione, non possono a meno di non rinnovarli e riprodurli. Di guisa che se cambiano quelle parole o quei gesti, o se non è più la consueta voce o persona che pronunzii le une o che eseguisca gli altri, cessano ben presto gli atti o i moti corrispondenti. Perlocchè un tale linguaggio si risolve in una mera combinazione di associazioni, ma non mai in atti d'intelligenza. Egli è per questo che incontrasi tanta difficoltà ad istruire il cane e l'elefante in qualche atto o movimento per mezzo delle parole e dei gesti. Egli è per questo che il pappagallo ripete macchinalmente le parole che imparò a fatica, replicandole anche quando per essere ingiuriose o moleste gli sarebbe bello assai il tacere. In quanto al senso del dovere o della giustizia,

(1) Quest'Autore nell'operetta: *Les chiëns célèbres*. Paris.

come si può mai riconoscerlo col Leuret nel cane di *Arago* e nei mastini del *de Lancalle* per il semplice fatto della loro contrarietà a volgere lo spiedo innanzi che i compagni avessero compiuto il loro giro? Questa riluttanza, anzi che una prova del sentimento che avessero que'cani di non voler lavorare più del dovere o del giusto, parmi una conseguenza della stessa materialità del loro lavoro, talchè interrotto od impacciato il solito giro, non erano più in caso di proseguirlo. D'altro canto il senso del dovere e della giustizia si genera dalle idee astrattissime del giusto e dell'onesto; e perciò esso diventa impossibile in esseri, come sono i mammiferi, inetti affatto all'astratteggiare, e destituti di qualsiasi intelligenza. Che se gli animali od i mammiferi fossero capaci di questo senso, perchè la società non li premia e non li punisce, perchè i Tribunali ed i Legislatori non si richiamano delle loro colpe, perchè gli educatori non si danno all'opera di allevarli ed istruirli, perchè noi gli uccidiamo e li mangiamo così impunemente? Laonde è d'uopo stabilire che i mammiferi difettando assolutamente d'intelligenza non sono nemmeno atti alle idee, al giudizio, al linguaggio e tanto meno al senso del dovere e della giustizia. Questa mia conclusione s'appoggia al doppio ed incrollabile argomento: che l'intelligenza è tutt'altro che la semplice coscienza delle interne od esterne impressioni; che i fatti i più maravigliosi addotti dal Leuret a conferma dell'intelligenza ne'mammiferi, qualora siano ben interpretati ed intesi, lungi dal provare in loro l'intelligenza, attestano soltanto l'istinto, il senso, la memoria, l'immaginazione e la spontaneità del movimento: cose tutte che non travarcano il limite delle facoltà sensuali od inferiori. Talchè dissentendo da una simile conclusione si è costretti o di cambiare il nome d'intelligenza per rispetto agli animali, o di ritenere che gli animali fanno tutt'altro che l'uomo sotto l'appellativo comune d'intelligenza.

§ 29. Per dare maggior fondamento a questi miei ragionamenti non rifuggirò di affrontare alcune obbiezioni che in parte io stesso mi venni creando, e in parte passano d'ordinario per la bocca di quelli che accusano un simile modo di filosofare di oscurità e di sottigliezza. E queste obbiezioni nel loro complesso mi parrebbero le seguenti. 1.° L'analogia tra le azioni degli animali e quelle dell'uomo è troppo aperta, perchè si possa escludere l'intelligenza negli uni per ammetterla soltanto nell'altro. 2.° L'intelligenza degli animali sarà di grado inferiore, sarà un *principio* od *un pò* d'intelligenza a petto di quella dell'uomo; ma sarà sempre intelligenza; 3.° Se gli animali s'accorgono delle impressioni esterne è segno che intendono e che conoscono, ossia che sono intelligenti.

4.° Gli animali privi d'idee astratte e quindi morali saranno estranei al mondo morale, conservandosi però intelligenti. 5.° Se gli animali sentono e ricordano, debbono anche intendere, essendo inseparabili il sentire ed il ricordarsi dalla intelligenza. 6.° L'educazione e l'esperienza migliorano le facoltà dei bruti; ed è questa una prova della loro intelligenza. 7.° È ipotetica o solo di parole la tanto vantata distinzione o separazione fra il senso e l'intelletto o l'intelligenza. 8.° È un'ipotesi od una sottigliezza quella di starsi alle apparenze e non alla realtà in coloro che attribuiscono l'intelligenza agli animali. 9.° Non sussistere il senso comune che considera gli animali per esseri non intelligenti, oppure non avere desso alcuna autorità od autenticazione. 10.° Nel conflitto tra il senso comune e la scienza deve prevalere questa a quello. Io ho voluto rinvesciare e porre in tutta luce anche queste obbiezioni nella fiducia che dal confutamento loro verrà sempre più rischiarata la limpidezza delle già esposte dottrine.

§ 30. L'argomento dell'analogia non è buono, nè fa prò alla dimostrazione, se non quando essa sia così esatta e precisa da accostarsi all'identità, senza di che non ha luogo la induzione o deduzione *a pari*. Ora quanto divario non corre tra il conoscere e il volere del bruto, ed il conoscere e il volere dell'uomo? Il bruto non conosce, ma s'accorge soltanto delle impressioni esteriori, ed a seconda ch'esse sono piacevoli o dispiacevoli appetisce ed opera in isvariate maniere. L'uomo nel punto che si accorge od avverte queste impressioni, le discerne da ogni altra, comprende che sono, e da quali oggetti vengano prodotte, vi pensa e vi riflette sopra, le paragona e ne determina le qualità e le relazioni colla riflessione e col giudizio, resiste colla volontà alla loro rappresentazione o modificazione piacevole e dispiacevole, e bene spesso invece di secondarle, le contrasta ed opera per impressioni opposte o diverse. Quindi se manca l'analogia nel semplice accorgimento, ch'è l'infimo degli atti umani, come si potrà ricercarla nelle altre operazioni più elevate del giudizio, del ragionamento, dei sentimenti superiori, del volere libero o del libero arbitrio? Eppure non meno si richiede a tenere gli animali per esseri dotati d'intelligenza. Tale analogia poi è uno scambio deciso delle apparenze colla realtà. Siccome noi veggiamo per solito gli animali più perfetti andar forniti di organi sensorii o d'un sistema cerebro-spinale, e della capacità o facoltà sensitiva per la quale, data un'impressione su quegli organi, essi non possono a meno di non accorgersene o di avvertirla. Siccome li veggiamo altresì dietro quest'accorgimento muoversi da sè, eseguire certi atti e certe funzioni esterne che adombrano quelle dell'uomo;

così siamo indotti a supporli eziandio intelligenti al pari di quello, per quantunque l'intelligenza vada lungi le mille miglia da quel tanto che fanno gli animali. Oltredichè non sarà difficile il mettere in dubbio anche quest'analogia, allorchè distaccandoci dalle apparenze, e mettendoci più addentro nella realtà ci faremo a considerare i fenomeni della supposta intelligenza negli animali non da ciò che appariscono, ma da quello che sono effettivamente. Allora vedrassi disparire quest'analogia sulla quale si fa tanto assegnamento, e ridursi tutto al più ad una sfuggevole e mentita sembianza, dalla quale nulla si può conchiudere per la troppa disparità degli oggetti cui si vorrebbe applicarla.

§ 31. I più caldi parteggiatori dell'intelligenza nei bruti si veggono loro malgrado costretti ad impicciolirla, a confessarla di grado inferiore, a qualificarla non già per vera intelligenza, ma per un *principio* o per un *pò* d'intelligenza a confronto di quella dell'uomo; ma così mentre credono di far giuoco per sè, lo fanno pegli altri. Primamente l'intelligenza anco negli animali non può smettere alcuno de'suoi caratteri, quali sono il discernere, il generalizzare, l'ordinare, mediante il giudizio ed il raziocinio. Quindi per essi bisogna o scambiarne l'indole e l'essenza, od abusare stranamente del significato d'un tale vocabolo. Secondariamente l'intelligenza, anche a grado inferiore, indica un'imperfezione, un mancamento, una diffalta nella sua qualità o condizione, ma non mai un'alterazione o mutamento nella sua sostanza o natura. I corpi tuttochè piccoli o grandi, più o meno pesanti, più o meno figurati o modificati conservano sempre l'estensione. L'uomo anche ignorante ed illetterato è tuttavia capace di distinguere, di generalizzare e di mettere in assetto le proprie idee. Terzamente è assurdo il dire in Filosofia un *principio* od un *pò* come dell'intelligenza, così di qualunque altra facoltà; giacchè il più ed il meno ripugnano colle entità spirituali od incorporee, e giacchè l'intelligenza anche nella sua primissima origine o formazione ha gia in sè e virtualmente tutto quello che può essere o divenire in seguito coll'educazione, coll'esercizio e coll'esperienza. Per ultimo una differenza di grado nelle facoltà non importerà giammai una differenza di essenza o di natura. Per lo chè se gli animali avessero anco un principio od un pocolino, come si dice, d'intelligenza dovrebbero mostrarsi sempre atti a distinguere, ad astrarre, a generalizzare, a giudicare e ragionare sopra quei pochissimi oggetti che toccano per lo meno i loro sensi. Quindi il concedere loro un principio od un pò d'intelligenza parmi un sotterfugio per non convenire che ne mancano assolutamente.

§ 32. Come mai si può difendere o quistionare che l'accorgersi o l'avvertire sia il medesimo che intendere o conoscere? L'accorgersi o l'avvertire una impressione esterna è l'effetto della natura semplicemente sensitiva degli animali. Se le impressioni sui loro organi trapassassero inavvertite, essi non sarebbero nemanco senzienti. L'accorgersi o l'avvertire è sempre qualche cosa di vago, d'indeterminato, di oscuro, che non reca a veruna cognizione, nemmeno a quella dell'impressione che lo cagiona, sebbene questa per il piacere o per il dolore che la accompagna, valga a far muovere ed appetire gli animali. L'intendere o l'intelligenza all'invece è sempre alcun che di chiaro, di distinto, di determinato, o di conoscitivo, senza di che non sarebbe neppur vero che coll'intelligenza si distingua, si conosca, si comprenda, ossia che si abbiano una o più idee, una o più cognizioni. L'accorgersi o l'avvertire è tutto soggettivo, e il conoscere o comprendere oggettivo. L'accorgersi o l'avvertire cessa al cessare dell'impressione, e l'intendere o il conoscere dura al di là di quella. Si può accorgersi ed avvertire senza intendere; ma non si può intendere senza accorgersi od avvertire. Per tanto divario fra l'accorgersi e l'intelligenza non è più lecito di dedurre l'uno dall'altra, essendo incontrastabile che gli animali come esseri animati o senzienti quanto sono idonei ad accorgersi o ad avvertire le esterne impressioni, sono altrettanto inetti a trarne idee o cognizioni, a motivo che in loro difetta l'intelligenza.

§ 33. Ammettendo che gli animali sieno privi d'idee astratte, essi devono necessariamente mancare eziandio d'idee morali; ed è perciò ch'eglino sono affatto estranei all'ordine morale, a cui appartengono soltanto gli esseri ragionevoli e liberi. Ma da tutto questo peraltro non conseguita che gli animali possano ciò nondimeno ritenere l'intelligenza. L'intelligenza, come facoltà o potenza comprensiva, s'intrinseca e s'immedesima talmente colle idee astratte, che dove non esistono queste, ivi non può esistere neppur quella. Guardate al fanciullo ed all'uomo del volgo alieno da ogni scienza o studio, e vedrete sempre sì nell'uno che nell'altro starsi come nota indelebile della loro intelligenza l'astratteggiare o il procedere per astratti sulle cose stesse materiali o sensibili, e che sono più alla portata del loro limitatissimo intendimento. Noi stessi non possiamo nè concepire, nè tramandare alla mente la nozione dei concreti se non per via di generalità o di astrazioni: tanto che altrimenti non potremmo idearne nè l'indole, nè le qualità, nè le relazioni. Sicchè il guerreggiare di taluni alle generalità per sospetto che nuocano alle scienze, è un farsi paura del-

l'ombra, è un combattere le scienze stesse che si nutrono e si vivificano delle generalità o delle astrazioni per legge suprema dell' intelletto o della mente intenditrice. Per la qual cosa è evidente che se gli animali sono sforniti d' idee astratte, non solo saranno difettosi delle morali, ma dovranno benanco mancare d' intelligenza. Laonde niegando agli animali l'astrazione o le idee astratte, in buona logica equivale al toglier loro affatto l' intelligenza.

§ 34. È verissimo che gli animali sentono e ricordano; ma da questo non consegue essere eglino intelligenti a motivo che il sentire e il ricordarsi vadano inseparati coll' intelligenza. Altro è che il sentire e il ricordarsi si uniscano coll' intelligenza, altro che il sentire e il ricordarsi siano tuttuno con quella. Il primo è un effetto della legge di simultaneità o di mutua dipendenza delle facoltà umane. Il secondo è un fare d'ogni cosa fascio, un confondere insieme le cose più disparate in Psicologia. Il sentire è un accorgersi delle impressioni. Il ricordare un riprodurle senza mutamento. Dunque si può concepire benissimo e il sentire e il ricordare senza l' intendere. Il sentire e il ricordare porgono materia all' intendere, ma l' intendere è un atto successivo o contemporaneo, sempre diverso da quello di sentire e di ricordare. Quante impressioni si avvertono senza sapere che siano, senza distinguerle nè in sè stesse, nè in relazione ad altre? Quante rimembranze non si appresentano alla mente che riescono per essa sbiadite, indeterminate od oscure, e senza che vi s' intrometta alcun riconoscimento nè dell' identità o della differenza loro con sè o con altre. Tutto ciò comprova che si può staccare l' intelligenza dalla memoria e dalla sensazione. Che se questo distacco è più mentale che reale in forza dell'astrazione, ed a cagione che col sentire e col ricordarsi si congiunge in concreto e sempre l' intendere o l' intelligenza, ciò addiviene non perchè siano queste tre facoltà un tutto, e fatte le une a simile delle altre, ma perchè è legge e proprietà che le potenze o facoltà dell'anima, quali attributi d' un solo ed unico soggetto non possano operare e manifestarsi che tutte insieme. Con chè parmi chiarito abbastanza il punto che gli animali non sono da stimarsi intelligenti a motivo che sentono e ricordano.

§ 35. Non è da disdire che l'educazione e l'esperienza conferiscano allo svolgimento delle facoltà degli animali; ma l' influsso loro è di sì poco momento che non monta nè il niegarlo, nè l'ammetterlo. Gli animali dotati d' istinto, estranei all'ordine morale, perchè irragionevoli e privi di libertà, sono più perfetti che perfettibili. L'esperienza e l'educazione anche in loro non alterano, nè

disguisano l'indole delle facoltà originali, ma si limitano ad isviluppare e coltivare le semplici disposizioni del senso, della memoria e dell'immaginazione; laonde essi mentre sono più pronti e più atti a sentire, a ricordare, a muoversi per quelle, ciò nondimeno non arrivano a mostrarsi intelligenti. Quindi l'influire dell'esperienza e dell'educazione sullo sviluppamento delle facoltà de'mammiferi, per quanto grande ed efficace si voglia immaginarlo, non sarà mai un argomento od un indizio qualunque della loro intelligenza.

§ 36. È uno stravolgimento dell'analisi psicologica, ed una manifesta falsità quella di dichiarare ipotetica o tutta di parole la distinzione e separazione del senso dalla intelligenza. Gli è fatto che nell'uomo adulto il senso si lega così intimamente coll'intelletto, che riesce arduo lo sceverare l'uno dall'altro. Se non che tale difficoltà non s'incontra soltanto in questo, ma in pressochè tutti i fenomeni dello spirito umano a motivo che mentre in apparenza sembrano semplicissimi, in realtà sono complicati o complessi, e ad un tempo sfuggevolissimi; sicchè bisogna durar fatica nel coglierli e nel deciferarli. Ciò non pertanto ove si dia mano anche nell'analisi psicologica al coltello anatomico, ove lo si spinga nelle più riposte latebre della coscienza per iscomporre e sgretolare ad uno ad uno questi fenomeni ne' loro primissimi elementi, segregando da ciascuno tutto ciò che v'ha di eterogeneo e di diverso, presto si giunge a far ricolta. E che è egli mai quel primo momento nel quale un quadro mi viene a vista, od un suono mi percuote l'orecchio? In questo momento ch' è un attimo, io non fo altro che accorgermi dentro di me dell'impressione del quadro o del suono, senza distinguere o conoscere che siano il quadro e il suono, nè tampoco l'impressione o la modificazione che in me ne viene prodotta. Ecco i limiti del senso ristretto al semplice e nudo accorgimento delle impressioni esterne od interne. Qui non c'è orma di discernimento o d'intelligenza. Ma allorchè a tale accorgimento succede d'un subito, o per via di percezione o per via di giudizio, la conoscenza o del quadro o del suono, oppure della loro impressione o modificazione, allora questo momento è diverso dall'altro per l'atto dell'intelligenza che il distingue e contrassegna. In questo secondo momento dico di conoscere, di comprendere od intendere; ed ecco l'opera o l'intervento dell'intelligenza. Dunque la distinzione e separazione del senso dall'intelligenza è fondata sulla mentale astrazione di due momenti così rapidi ed impercettibili che sembrano un solo. Ma dessa non è solo artificiale o mentale, ma benanco naturale e reale secondo l'analisi di noi stessi e degli altri. E non è il senso separato o distinto naturalmente

dall'intelletto nell'infante e nell'idiota o imbecille dalla nascita? E noi medesimi non distacchiamo il senso dall' intelletto, quando assorti in un grande pensiero ed insensibili alle stesse impressioni esterne non contempliamo altro che quell'oggetto astratto ed intellettuale che ci sta dinanzi alla mente come un fantasma, come una imagine, come un' idea? E chi, dedito alle sublimi astrazioni della scienza, non ha provato in sè queste estasi della mente, che separano lo spirito dalla materia, il senso dal pensiero, come se fossero due vite e due modi d'un essere diverso? L'infante che non articola ancora le parole, s' accorge degli oggetti esteriori, ma non li conosce, nè li discerne. Ei vede la luce della candela, e se ne diletta; vorrebbe coglierla, ed ignaro della distanza, si scotta e piange. L'imbecille o l'idiota guarda le persone e le cose che lo attorniano, sente lo stimolo della fame e della sete, ricorda la bevanda ed il pane, gesticola e si muove a seconda delle impressioni che riceve; ma tutto questo sì nell'uno che nell'altro annunzia la somma attività del senso, ma non mai quella dell' intelligenza. Il perchè io tengo per un fatto e non già per un' ipotesi la distinzione e separazione del senso dall'intelletto. Onde non è più strano, ma assai naturale che negli animali esista quello e non questo. Io mi guarderei poi bene dal sentenziare una tale distinzione o separazione per una quistione tutta di parole, e per la quale non torni conto il darsi piato; giacchè con tal fatta di sentenza si andrebbe troppo grosso nella scienza, e si direbbero farfalloni in aria, mentre si pretende di far solco in quella. Se il senso non è diverso dall' intelligenza, l' uno e l' altra non sono più che la medesima, anzi l'identica cosa, l'uomo è intelligente perchè sente, e sente perchè è intelligente. Dunque l'intelligenza al pari del senso non è più che un moto di fibre cerebrali; una reazione della fibra sensifera, un mero avvertire od accorgersi, una semplice trasformazione della primitiva impressione o sensazione. Se il senso s'appareggia all' intelligenza, quale soprastanza può mai più vantare l'uomo sull'animale od anche sulla natura organizzata? Se il senso non è che intelligenza, e l' intelligenza il senso, di quale carattere di moralità e di libertà potranno mai improntarsi le umane azioni messe a paragone con quelle del bruto? Se il senso e l'intelligenza non differiscono per nulla fra di loro, e perchè gli esseri forniti solamente di quello non imitano e non emulano coloro che vanno segnalati per questa? Ma più che da tali assurdità, dalle note caratteristiche del senso e dell' intelligenza si rivela l'errore in confondere o identificare l'uno coll'altra. Il senso è qualche cosa di materiale ed organico, e l' intelligenza come spirituale è priva d'ogni elemento d'organismo. Il senso incomincia e termina

all'accorgimento delle impressioni esteriori, e l'intelligenza a quest'accorgimento unisce la piena conoscenza o distinzione, il giudizio ed il raziocinio. Il senso è passivo; e l'intelligenza, tuttochè spettatrice, è attivissima per la spontaneità delle forze o facoltà che l'animano ed avvivano. Col senso non si percepiscono che oggetti individuali o particolari, e coll'intelligenza si astraggono e si generalizzano gli stessi concreti. Il senso nulla comprende per sè, nulla paragona o confronta, ed è inetto a qualsiasi deduzione o ragionamento. L'intelligenza invece comprende, discerne e giudica, ed elevando le sue nozioni ai principj od agli universali ne trae illazioni o conseguenze. Il senso soggiace ad illusioni e ad errori. L'intelligenza dischiude la verità, la certezza, la scienza. Il senso abbassa e disgrada l'uomo alla condizione delle bestie e delle piante. Per l'intelligenza ei tiene il primato sull'universo, e s'illumina alla sapienza di Dio. E a fronte di così grandi ed essenziali differenze tra il senso e l'intelligenza come si avrà coraggio di appareggiarli e confonderli in una sola facoltà o potenza operante in diverse guise? Una tale filosofia se non pecca di conscienziosità, manca al certo di verità, di dignità e di rigore scientifico nelle due analisi; e se nelle altre scienze riescono intollerabili gli scerpelloni, non si dovrebbe comportarli nemmeno in Filosofia. Nè ad iscusarne il torto potrebbesi allegare la reciproca relazione tra il senso e l'intelligenza, onde alterato l'uno si altera eziandio l'altra; imperciocchè da questa relazione all'identità è troppo lunga la tratta per trapassarvi così facilmente. Una cosiffatta relazione altro non prova se non che nell'uomo appunto per il senso e per l'intelligenza trovansi due sostanze o due principj corrispondenti mutuamente tra loro. Queste due sostanze o principj possono coesistere benissimo in un solo individuo senza confondersi o identificarsi. Il senso e l'intelligenza cooperano ai fenomeni comuni o misti; ma il senso non si converte mai nell'intelligenza, come l'intelligenza non si trasforma mai nel senso, essendo due oggetti d'indole o natura differentissimi. Che se è indubitabile il fin qui detto, ognuno dovrà convenire esser tutt'altro che quistione di parole la distinzione tra il senso e l'intelligenza, ma una di quelle controversie vitali e decisive che mettono in forse la sorte dalla filosofia. D'altra parte che sono mai le parole per la scienza della filosofia? Essa siccome scienza razionale o d'idee, abbisogna necessariamente delle parole a significare i suoi principj, le sue investigazioni ed i suoi ragionamenti. Le parole pertanto in filosofia sono il tutto in quanto esprimono idee e cose. Le parole per il filosofo equivalgono alle roccie ed ai petrefatti per il geologo, alle stelle per

l'astronomo, ai corpi per il fisico, ai nervi ed ai muscoli per l'anatomico, alle piante per il botanico, agli animali per il zoologo. Quindi bisogna farne quel conto medesimo che si fa di simili oggetti in tutte codeste scienze. Che se il senso e l'intelligenza differiscono cotanto ed essenzialmente fra di loro, come si potrà, senza mancanza di senno, pigliare indifferentemente l'uno per l'altra? In ciò mostrasi assai più logico e critico il senso comune della scienza, allorchè in tutte le lingue del mondo ha registrato due vocaboli così diversi per designare chiaramente la differenza fra ambidue. È comodo assai il partito di disimpegnarsi dalle gravi e fondamentali ricerche della filosofia colla solita antifona di quistioni di parole. Ma a questo modo per non impedicare nella scienza, c' impigliamo nell' idiotaggine.

§ 37. Non è per nulla fuori di proposito l'accagionare di fallaci apparenze la opinione di coloro che vogliono gli animali dotati d' intelligenza; giacchè consultando un po' meglio la realtà, si viene in tutt'altro parere od avviso. E di vero ci sono o non ci sono queste apparenze che sfigurano i fenomeni o le azioni degli animali al punto di colorare l'intelligenza là dove non c'è che istinto, senso, memoria ed immaginazione? Questa è la domanda alla quale bisogna soddisfare prima di tacciare d'ipotesi o di sottilità la industria di riferire all'apparenza e non alla realtà la supposta intelligenza de' mammiferi. Io non vo qui ricordare come e quanto spesso intervengano le apparenze ad alterare pressochè tutti i fenomeni naturali, bastando all'uopo addurre quella del moto del sole intorno alla terra e di tutte quante le illusioni cui soggiacciono i sensi, incominciando da quello della vista. Che se tanto si avvera in ordine ai fenomeni materiali e fisici, quanto più non dovrà avverarsi riguardo ai psicologici o spirituali, che sono al tutto interni e sovrasensibili, massimamente qualora si consideri alle attinenze loro colla materia e coll' organismo, sempre infedeli riferitori di quanto succede dentro di noi? Ciò serva a confermare la possibilità in astratto delle apparenze alteratrici eziandio delle funzioni od azioni intellettive degli animali; ma al mio assunto sarà più concludente l'effettivo ed il concreto. E per verità se noi stiamo osservando il gatto, allorchè guata fiso ed immobile un oggetto qualunque, ei ci parrà a prima giunta meditabondo e riflessivo sopra di quello. Se veggiamo il cane istruito stare in ascolto dei comandi o della voce del padrone, ed operare lesto e preciso a seconda di quelli, sembra che il cane intenda ciò che gli vien detto, che si soffermi a pensarvi, e che poscia con un atto deliberativo si metta all' azione. Se l'elefante, ne' giuochi del ciurmadore,

danza al suono della musica, si alza e si corica all' altrui cenno, va in giro tra la ragazzaglia per riconoscere il monello od il buono, il vecchio od il giovane, certo che a questi raffinamenti preparati dalla ciarlataneria per sorprendere ed uccellare i gonzi, il volgo stando alle apparenze non potrà a meno di non istimarlo assai destro ed intelligente. Ma meglio ponderando e staccando accuratamente l'apparenza dalla realtà, si comprenderà essere questo un inganno, od un travisamento. L' apparenza sta nella falsa analogia tra l' intelligenza operante all' esterno e l' intelligenza operante all'interno siccome è in effetto o realmente. La realtà sta nell'interno principio diverso da cui muove l'una e l'altra. Il gatto, il cane, e l'elefante provveduti di organi sensorj s'accorgono della voce e del comando altrui. A questo accorgimento accompagnato da piacere o disgusto, o per opera del senso stesso o della memoria e dell'immaginazione, vi fanno corrispondere alcuni moti spontanei e quindi quelle date azioni. Perciò non è difficile che anche i savj sedotti da questa esteriore conformità d'impressioni e di atti esteriori argomentino al comune principio interno dell' intelligenza, siccome propria tanto all'uomo quanto agli animali. Ma allora l' intelligenza è tutta esterna, mentre la sua realtà è tutta interna. Quindi innalzandoci sull'una per cogliere ed avvisar meglio l'altra, ci sarà facile di sfuggire ad un così grande errore. Quindi è che disceverando l'apparente intelligenza esterna degli animali da ciò ch'essa è in realtà o nell' interno, si troverà più ragionevole che l' istinto ed il senso siano i moventi delle azioni e delle tendenze loro, anzi che l' intelligenza. Nè questo distacco dell'apparenza dalla realtà può incolparsi al solito di scolastica sottigliezza per lo sforzo che deve far la mente in effettuarlo; giacchè un simile sforzo è inevitabile per chiunque voglia profondarsi un po' nello studio della Psicologia. D'altra parte il distinguere la realtà dall' apparenza è il primo precetto d'ogni buon metodo di filosofare nelle stesse scienze della natura. Il volgo ha comune l'apparenza dei fatti col dotto; ma quegli solo è dotto che sa discioglierli e stenebrarli da ogni velamento e da ogni fallacia di apparenza. Oltracciò le scienze finchè riposarono sulle apparenze, di quanti errori non si vennero ingombrando e screditando? Infine non sarà mai una vana sottigliezza, ma un' importante ricerca per la Psicologia comparata quella di sapere se gli animali apparentemente intelligenti lo siano in effetto ed in realtà, ovvero se in realtà tutte le loro funzioni od azioni le più maravigliose considerate internamente non si possano spiegare coll' istinto, col senso, colla memoria, coll' immaginazione e coll'associazione, e perciò indipendentemente da ogni principio di vera intelligenza.

Questa ricerca è poi tanto più naturale e ragionevole in quanto che gli animali, predicati da alcuni come esseri intelligenti, stanno tanto al dissotto dell'uomo stesso il meno intelligente o il più ottuso.

§ 38. A compiuta risposta delle soprallegate obbiezioni, non mi rimane più che di replicare alle due ultime che sono anche le meno incalzanti e speciose. Si dice non essere vero che esista il senso comune toglitore della intelligenza agli animali, o che esso per lo meno non faccia fede od autorità. Certo che se per senso comune s'intendono quelle volgari espressioni con cui si chiamano furba od astuta la volpe, fedele ed affettuoso il cane, timorosa la lepre, buono ed intelligente l'elefante, bravo e destro il cavallo, allora non solo mancherà questo senso comune, ma si dovrà convenire che il senso comune attesta e depone il contrario. Ma se, all'incontro, si piglierà per senso comune l'assenso universale nel ritenere gli animali destituti d'intelligenza, attestato non già da volgari espressioni, ma dal significato proprio ed etimologico degli appellativi adoperati in tutte le lingue per denominare in generale le bestie, gli animali, il bruto, dal trattamento che tutte le nazioni anche più culte usano agli animali, dalla loro classificazione tra le cose nel Diritto Romano sino a' Codici moderni, allora questo senso comune diventa un fatto costante e generale, e come tale non può più essere accagionato d'un errore o pregiudizio popolaresco, e che non faccia caso moltissimo anche per il filosofo. Egli è in questo preciso significato ch'io sostengo essere già sentenziata dal senso comune la niuna intelligenza degli animali. Talchè la scienza non potrebbe se non a patto di sofisticherie e di trapassi mettersi in contraddizione con quello. Sebbene io non sia nè possa essere seguace del principio dell'autorità nelle cose di puro raziocinio, ciò nondimeno non posso non considerare di gran peso il sentire comune od universale per rispetto all'intelligenza degli animali. Il mancare questi d'intelligenza è una di quelle idee intuitive od immediate che si rivelano d'un tratto anche alla mente più ottusa e volgare. Questa idea, splendente all'intendimento di tutti, è una di quelle verità di senso comune che la scienza registra, per modo di dire, tra le tendenze e gl'istinti della stessa umana natura, e nelle quali è logicamente impossibile un perpetuo inganno. Sotto questo punto di vista il senso comune meritasi tutta la fede o credenza; ed io ho per fermo che la filosofia debba averlo a capitale. Altro discorso terrei se si trattasse di spiegare il come ed il perchè l'uomo sia intelligente e non il bruto, come debbano diversamente interpretarsi le azioni degli animali tuttochè in apparenza così somiglievoli alle altre dell'uo-

mo, e come tutte quelle e non queste si possano risolvere nell' istinto e nelle altre facoltà inferiori tanto differenti dalla vera intelligenza, poichè allora il senso comune tace o trasvia in un labirinto d'indagini e di sottili analisi, che sfuggono necessariamente alla sua veduta corta di una spanna, e ad uscire dal quale non è che la scienza co' suoi oracoli che possa additare il giusto filo. Chiarita per tal modo la competenza scientifica del senso comune circa alle verità intuitive ed immediate, com' è quella della non intelligenza degli animali, cade da sè l'obbiezione che nel conflitto tra la scienza e il senso comune debba prevalere quella a questo. L'oggetto su cui cade questo conflitto, è assolutamente diverso, e quindi manca il titolo alla prevalenza. Il senso comune ritiene per intuito gli animali per irragionevoli e perciò non intelligenti, e questa cognizione è a portata della mente di tutti. La scienza invece parte falsificando, parte sofisticando si conduce all'opposta sentenza, che gli animali cioè sono intelligenti. Una volta che sia stabilito essere l' intelligenza, o la non intelligenza degli animali un vero intuitivo o di cognizione immediata, il senso comune va di pari passo colla scienza, perchè esercita in questo il suo buon diritto, e la scienza nel contrariarlo fa sospettare di mettere il piede nel falso, in quanto s' argomenta di vedere più in là del genere umano. Perlocchè io porto fiducia essere più dalla parte del vero l'opinione degli animali sforniti d' intelligenza, che non quella degli animali intelligenti, anche perchè la prima e non la seconda si conforta del voto o dettato del senso comune, stando per me ed in questa e in altre quistioni fisso ed ineluttabile il principio: Essere falso o sospetto quel sistema o dogma fondamentale di filosofia, che trovasi in manifesta contraddizione col senso comune.

§ 39. Ma se persino il senso comune concorre a qualificare i mammiferi privi d' intelligenza, perchè mai il *Leuret* e molti altri, specialmente Naturalisti, insistono cotanto sull' intelligenza degli animali da far vanto d'una tale dottrina come d'un assioma di Psicologia o d' Ideologia? Quali saranno le cause che li trae a cosiffatta sentenza? Io non credo superfluo l'esplorare anche queste cause a motivo che ne verrà fuori un nuovo argomento per meglio riconoscerne l' insussistenza e la fallacia. Le cause che tanto in filosofia, quanto nelle altre scienze possono indurre a paradosseggiare e a farsi propugnatori di sofismi o paralogismi, o di erronei principii o sistemi si restringono tutte a tre: all'*interesse*, alla *passione* che dipendono dalla volontà, all' *errore* che sta tutto nella mente o nel giudizio. Ma come mai l' interesse o la passione conferiranno a persuadere dell' intelligenza negli animali, se questa opinione disgrada dall' al-

tezza alla quale si destina l'uomo per la dignità della sua natura, se l'appareggiarlo al bruto più che follìa è ingiuria, più che vanità ed orgoglio, è segno di abbassamento e di umiliazione? Per ciò l'errore della mente è quello solo che può far gabbo onde inchinare all' altrui detto e mettersi in cosiffatta opinione. Quest'errore può essere originato forse dal metodo de'Naturalisti di attenersi ai soli caratteri esterni nella determinazione delle stesse facoltà dell'uomo; forse dall'abitudine di vedere anco nelle scienze psicologiche sotto l'unico prisma del senso quello che trascende di lunga mano la sua cerchia angustissima; forse dalla negletta e mal riuscita istituzione primitiva in filosofia, dacchè pur troppo questa scienza non è ancora tra noi abbastanza apprezzata, od abbastanza perfetta nella sua forma metodica o didattica; forse dall'obbliviare in che cadde la controversia così acremente dibattuta da'Cartesiani nella prima metà dello scorso secolo intorno all'automatismo delle bestie; forse dal poco o niun progresso della Psicologia comparata che tuttavia si cancella ne' Gabinetti di Zoologia, senza che nè i Naturalisti, nè i Psicologisti s'approfondino nello studio di que'fenomeni di che s'improntano così diversamente le facoltà umane e quelle degli animali; e forse, e questo è più vero, dal principio o sistema filosofico del sensismo che ci venne in retaggio da Condillac, da Destutt de Tracy e da altri filosofi del secolo 18.° e che è tuttora accarezzato e difeso come una fede od una religione da chiarissimi ingegni, avversi ed osteggianti qualunque filosofia che odori di metafisica o di psicologia, trascendente l'esperienza. Io dicevo che quest'ultima causa è la più vera, e perchè me ne certifica lo stesso Leuret, che in definire l'intelligenza sì nell'uomo che ne'mammiferi attinse apertamente a quella fonte, e perchè l'idea dell'intelligenza degli animali non può essere che la indeclinabile conseguenza del sistema delle facoltà umane derivanti tutte dalla sensibilità o dalla sensazione. E di fatto una volta che in psicologia siasi piantato il principio o sistema che ogni idea o nozione deriva dai sensi; che il ricordarsi non è che sentire di sentire, che l'intendere e il giudicare è un sentire la differenza tra due o più sensazioni; che il conoscere, il pensare, il desiderare ed il volere non sono che tante modificazioni o trasformazioni della sensazione, non può più negarsi che gli animali appunto perchè sentono e sono capaci di sensazioni non debbano possedere puranco l'intelligenza. Talchè, a mio credere, la presupposta intelligenza negli animali è una logica e necessaria conseguenza del sensismo, alla quale sono forzati ed il Leuret e tutti quelli che nella loro professione filosofica soscrivono al sistema o principio della sensazione o del sensismo. Laonde

chi vuole evitare o sfuggire a simile conseguenza o deve contraddirsi in logica, o rinunziare al sensismo in psicologia. Questa è la più vera e costante cagione onde sono tratti gli scrittori ad attribuire l'intelligenza ai mammiferi od agli animali; e sarà una ragione di più tanto per rigettare l'opinione degli animali intelligenti alla quale conduce una dottrina superficiale e manchevole sì delle loro facoltà, come di quelle dell'uomo, quanto per ripugnare alla filosofia sensistica, che per essere logica e consentanea ne'suoi principii non può a meno di non farci discendere suo malgrado alla condizione de'bruti.

§ 40. Ricapitolando ora il fin qui detto e da me e dal sig. Leuret intorno all'intelligenza ed alla sua relazione colle circonvoluzioni cerebrali, evidentemente si deduce: 1.° che egli altera e falsifica il vero concetto dell'intelligenza e de'suoi prodotti, in quanto la limita alla pura coscienza delle interne ed esterne impressioni, dalla quale non iscaturisce mai un'idea o cognizione, mentr'io la ripongo nella distinzione d'un oggetto determinato per via di astratti o generalità, ed in alcuni atti o caratteri essenzialmente diversi, sebbene successivi o contemporanei all'azione della coscienza; 2.° che falsificato il concetto della intelligenza, viene rotta ogni pretesa relazione colle circonvoluzioni cerebrali; giacchè non essendo per i filosofi l'intelligenza quello ch'è per il Leuret, manca uno dei termini od elementi ad una cosiffatta relazione, rendendosi con ciò impossibile ogni riscontro o raffronto tra l'una e le altre; 3.° che, prescindendo anche da questo difetto, sarebbe troppo scarsa ed imperfetta la serie dei fatti o fenomeni psicologici che il Leuret contrappone alle circonvoluzioni cerebrali, mentre per questi non si conferiscono loro atti o funzioni intellettive, ma soltanto istinti e percezioni di oggetti sensibili, che sono cose tutte assai diverse dall'intelligenza; 4.° che ad ogni modo la relazione tra questi fatti psicologici e le circonvoluzioni cerebrali è zoppicante ed interrotta come legge, per confessione dello stesso Leuret, mentre in alcuni mammiferi o non esistono del tutto circonvoluzioni cerebrali intanto ch'essi si mostrano intelligenti al modo dell'Autore, o non esistono nel numero e nella qualità appartenenti alle specie più perfette, mentre continuano in loro i fatti o fenomeni psichici allegati a conferma dell'intelligenza; 5.° che la relazione tra l'intelligenza e le circonvoluzioni cerebrali del Leuret è fondata sopra mere accidentalità, come sono le circonvoluzioni stesse quali addossamenti o ripiegature della sostanza del cervello; ondechè male se ne potrebbe dedurre una vera legge; 6.° che le stesse circonvoluzioni intermedie o trasversali mentre non si scorgono che nell'uomo e nella scimia, altro non sono

che un prolungamento od una continuazione delle fondamentali o primitive; talchè esse non potrebbero mai costituire la causa speciale ed immediata organica ad una cosiffatta relazione da stabilirsi come legge dell'intelligenza; 7.° che data anche tutta la relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza riuscirà sempre misterioso od inconcepibile come i mammiferi aventi più o meno di circonvoluzioni, non abbiano più o meno d'intelligenza corrispondentemente a quelle. Laonde la relazione ideata o proposta dal Leuret tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza sarebbe difettiva non solo dal lato dell'intelligenza, ma benanco da quello delle stesse circonvoluzioni. Per la qual cosa parmi giusto il conchiudere che se per l'opera del Leuret avanza di un passò l'anatomia delle circonvoluzioni cerebrali, retrocede d'un altro la filosofia per le fallaci applicazioni della dottrina psicologica sull'intelligenza, e per essere tuttavia impigliato come prima il problema sulla relazione tra l'intelligenza e le circonvoluzioni cerebrali. Se non che dalla dimostrata incostanza ed insufficienza di questa stessa relazione in una serie così numerosa d'individui di differenti specie, può trarre guadagno la psicologia, essendochè per l'opera del Leuret non potrebbesi più riputare sì grande l'influsso del cervello o delle sue circonvoluzioni sulle facoltà intellettive o dell'intelligenza. Un simile guadagno è al tutto negativo, ma però sempre fruttifero per la scienza.

PARTE TERZA.

Conclusioni sulla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l' intelligenza.

§ 41. Le conclusioni che qui intendo di porre intorno al problema sulla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l' intelligenza, debbono comprendere quanto io ho pensato e raccolto circa a quello, debbono significare quanto di vero e di certo può insegnare la scienza in una cosiffatta investigazione, debbono essere, a mo' di dire, l'ultima parola che può pronunziare a mio credere una saggia e temperante filosofia. Al qual uopo gioverà recarsi a mente i tre punti o capi che riassumono tutto il problema, e che vennero già proposti al principio della parte seconda (§ 9).

Questi tre capi o punti sono: 1.° Come e perchè le circonvoluzioni cerebrali a preferimento d'ogni altra parte del cervello tengonsi in così stretta relazione coll' intelligenza: 2.° Quale sia la sede o causa immediata ed organica a simile relazione: 3.° Se questa relazione sia così costante e continua da valere come legge.

Io farò di stringere in breve sì, ma nel suo tutto questo viluppo, poichè in esso s'appunta la parte dottrinale e conclusiva del presente lavoro.

§ 42. A dire il perchè le circonvoluzioni cerebrali stiano in così stretta relazione coll' intelligenza, non v' ha bisogno di molto cercamento. Le circonvoluzioni cerebrali, qualunque sia la loro origine e formazione, o vuoi dallo svolgimento vescicolare della membrana cerebrale che penetrando nella teca più angusta del cranio s'addoppia e si ripiega sovra sè stessa, intercisa da tanti solchi quante sono le circonvoluzioni, o vuoi dalla membrana liscia del cer-

vello che soprapposta in falde si dispiega e si rincrespa a foggia d' una guarnizione, o vuoi dalla insinuabilità della meninge vascolare per entro la sostanza del cervello, od anche da due nappe nervali, la più esterna delle quali ricuopre colla sua sinuosità i piani trasversali dell' altra più intima e più profonda, o vuoi infine da tante lamine parallele al grande asse del cervello, e che senz' altro intermezzo si recano sino al piano verticale del medesimo; qualunque sia tra queste ipotesi la prescelta, o che più attaglia, sarà sempre vero ed incontroverso constare le circonvoluzioni di sostanza cerebrale, e quindi delle fibre primitive ed elementari delle quali essa sostanza è costituita. Per lo chè se le circonvoluzioni cerebrali altro non sono, salvo il divario della forma, che il cervello medesimo, egli è evidente che l' intelligenza al pari di tutte le altre facoltà e potenze dell'anima debba trovarsi in corrispondenza ed in relazione con quelle, e perchè il cervello è l'organo la cui mercè si manifestano ed operano tali facoltà, e perchè l' intelligenza medesima non compie il suo uffizio che al cooperamento del sistema cerebro-spinale, il cui centro o sensorio comune si è per l'appunto il cervello. Con che si chiarisce d'un tratto la ragione per la quale le circonvoluzioni cerebrali con preferimento ad ogni altra parte dell'organismo si tengono in connessione coll' intelligenza, sono più o meno numerose, secondo che è più o meno ampia e voluminosa la massa cerebrale, e dove più esse spesseggiano ivi spicca più presto attiva ed aperta l'intelligenza. Tale relazione peraltro delle circonvoluzioni cerebrali coll'intelligenza non è costante ed universale, ma variabile tra molti gruppi di mammiferi, deficiente in certi altri, e limitata alle specie più perfette, mentre all'opposito il cervello, qual causa alla loro formazione ed origine, si mantiene in tutti gli animali, in quanto però siano provveduti d'un sistema cerebro-spinale. Conseguentemente per questi fatti devesi derivare una tale relazione dal cervello e non dalle circonvoluzioni, nè si può mai qualificarla per una vera legge, mancandole il doppio carattere della necessità e dell'universalità. — Che se è così facile il rinvenire il perchè le circonvoluzioni cerebrali si tengano in relazione coll' intelligenza, non è altrettanto facile il trovare la causa o sede organica ed immediata a cotesta relazione, sì nelle circonvoluzioni come nel cervello. Anzi questo è uno dei punti più ardui e meno accostevoli dell' anatomia e della psicologia.

§ 43. Allorchè vuolsi indagare quale sia la causa o sede organica ed immediata nelle circonvoluzioni o meglio nel cervello alla relazione loro coll' intelligenza, si ha in mente nientemeno che di determinare in modo indubitato e

preciso quale sia la parte o l'organo nelle une o nell'altro, così condizionata e disposta da servire, ad esclusione di qualsivoglia altra, alle funzioni dell'intelligenza per modo che questa non possa più operare senza di quella, tanto nel caso che manchi assolutamente, quanto in quello che venga alterata e viziata solo accidentalmente. Ciò premesso, egli è sicuro che non possono essere questa causa o sede nè le circonvoluzioni intermedie o trasversali, nè la forma *ondulata* di esse circonvoluzioni secondo il *Leuret*, nè gli organi *mediatori* della fantasia di *Hartmann*, nè la *sostanza grigia* della midolla spinale del dott. Brown-Séquard, nè il volume o la massa, oppure la forma del cervello, nè la consistenza delle sue fibre, nè le altre parti od organi del medesimo, secondo altri fisiologi o naturalisti più recenti. Ove ciò sia dimostrato, sarà d'uopo rivolgersi d'altra banda per rintracciarlo con più di verità e di fidanza.

§ 44. Le circonvoluzioni intermedie o trasversali del Leuret non esistono che nell'elefante, nella scimia e nell'uomo; e mentre in quest'ultimo mostrasi l'intelligenza, negli altri due essa manca, almeno com'io l'ho intesa e definita (§ 17).

Oltredichè le circonvoluzioni trasversali sono in sostanza il cespite delle primitive e fondamentali; poichè da quelle traggono tutte la loro origine primissima come una loro continuazione od un loro prolungamento. Dunque, data l'esistenza loro, non si fa chiaro come non debbano quelle tre specie di mammiferi possedere del pari l'intelligenza. La forma ondulata delle circonvoluzioni propria delle specie più perfette e intenditive degli animali nasce dalla maggior massa cerebrale comparativamente al cranio che deve contenerla, ed è perciò una mera accidentalità. Ripugna pertanto che sopra questa accidentalità debba fondarsi un dato fisso e costante, siccom'è quello della causa o sede organica ed immediata dell'intelligenza. Si aggiunga che la forma ondulata tuttochè sussistente nell'elefante e nelle scimie non genera mai in loro un'intelligenza che s'agguagli a quella dell'uomo. Dal che si deduce non essere tal forma per niun conto cagione o sede all'intelligenza; imperciocchè altrimenti in tutti gli animali ne'quali apparisce una simile forma di circonvoluzioni, dovrebbe appalesarsi egualmente l'intelligenza (1). Il Professore *Hartmann* nella sua

(1) Non posso qui a meno, parlando del dott. *Leuret*, di non lamentare la sua morte immatura ed acerba annunziata già dal Giornale di Milano intitolato il *Crepuscolo*, N.° 31, 10 agosto 1851, e perchè ci è tolta così la speranza di veder compiuta la sua opera sulle *circonvoluzioni cerebrali*, specialmente nella parte sì importante che riguarda all'uomo, e

opera accreditatissima = *Lo spirito dell'uomo ne' suoi rapporti colla vita organica* = s'avvisa che l'intelligenza, quale facoltà superiore, non possa immediatamente corrispondere coll'organismo, per il principio psichico della libera attività onde questa si disperde tostochè si voglia assegnarle limite di spazio o leggi di vita fisica; e quindi partendosi egli dall'idea che esistano al centro del cervello organi speciali della fantasia e che questi soltanto possano rappresentare alla conoscenza immagini sensibili, senza le quali non si dà alcun atto di attenzione o di giudizio, venne a dichiarare questi organi i *mediatori* tra la fantasia e l'intelligenza, e quindi la causa della mutua loro comunicazione o corrispondenza (1). Non è da niegarsi nè il principio della libera attività delle potenze umane, nè la conseguente impossibilità che con esse potenze o facoltà essenzialmente libere nella loro attività sia compatibile un immediato e diretto influsso dell'organismo. Ma non pertanto non è sì agevole l'ammettere che ci siano organi speciali della fantasia al centro del cervello, quali mediatori dell'intelligenza. Gli organi speciali della fantasia al centro del cervello, oltre chè ipotetici ed immaginati all'uopo, contrastano assolutamente coll'omogeneità delle fibre nervali della gran massa del cervello, suppongono alcune località ripugnanti coll'unità della nervazione diffusa ed uniforme per tutta la superficie cerebrale, e circoscrivono allo spazio la forza stessa fantastica che per la sua libera attività tende ad espandersi e a disciogliersi da ogni limite o vincolo di estensione e di circonvolgimento. D'altra parte come mai debbono esistere organi speciali o separati della fantasia da quelli del senso e della memoria, mentre la fantasia sta così da presso a queste due facoltà da formarne per taluni una sola? E come mai con questi organi speciali alla fantasia e quai mediatori dell'intelligenza, si vorrà pensare che l'intelligenza stessa, sorretta appena indirettamente da simili organi, possa attuarsi da sè sola e dispiegare tanta efficacia quanta ne veggiamo sopra quegli organi medesimi? Tutto adunque conduce a credere all'impossibilità d'una cosiffatta relazione tra l'intelligenza e l'organismo, tanto come diretta, quanto come indiretta, cioè operante col semplice sus-

perchè la Medicina ha perduto in lui uno dei più insigni scrittori sull'*Alienazione mentale*, siccome il provano i suoi *Frammenti* psicologici sulla pazzia dell'anno 1831, ed il Trattato della *cura morale* della pazzia, pubblicato pure a Parigi nel 1846.

(1) V. L'Opera del prof. Filippo Carlo *Hartmann*: *Lo spirito dell'uomo ne' suoi rapporti colla vita organica*, tradotta dal Tedesco. Firenze coi tipi della Stamperia Macheri 1837. Tom. II, § 32 e seguenti.

sidio degli organi speciali e mediatori dell'immaginazione. Ugualmente non regge che la sostanza grigia della midolla spinale, secondo il dott. Brown-Séquard abbia un costante rapporto coll'energia della facoltà riflessiva o dell'intelligenza all'appoggio del fatto da lui osservato e sperimentato in varie specie di animali ai quali tagliossi trasversalmente la midolla, dell'azione riflessa dei nervi posteriori al davanti comprovata dal rigonfiamento lombare, sì perchè un tale rigonfiamento non seguita sì da vicino il crescere dell'intelligenza ne' mammiferi da originarsi l'uno dall'altro; come perchè mentre alla sostanza grigia anche della midolla spinale s'interpone sempre a strati alternanti la bianca, vuolsi dalla più gran parte de' moderni anatomici la sostanza grigia o cinerea composta di fibre trasparenti e granellose, e quale nudrice del sistema ganglionico o del gran simpatico, e perciò causa e strumento alla vita organica e vegetativa e non mai alla intellettuale (1).

§ 45. Ma come non può stare a tanto officio neppure la sostanza grigia o cinerea della midolla spinale, così non vi stanno, sebbene per diversa ragione, il volume o la massa del cervello, o la sua forma, o la sua consistenza, o qualunque delle sue parti o de' suoi organi finora conosciuti. Il volume o la massa del cervello decresce coll'età invece di crescere al pari dell'intelligenza. La massa cerebrale che alla nascita dell'uomo è la sesta parte di tutto il corpo, all'età adulta ne diventa appena la trentacinquesima. La massa cerebrale nell'elefante e nella balena e in certe specie di scimie, è maggiore di quella dell'uomo avuto riguardo alla proporzione del loro corpo. Il rapporto della massa cerebrale essendo una misura della sola quantità, non ispiega più la intensità o qualità eziandio dell'intelligenza la quale ne' varii individui cotanto varieggia. Il fatto più comune per istabilire una relazione tra la forma del cervello e l'intelligenza egli è quello degl'idioti. Le grandi depressioni od avvallamenti del cranio, ovvero la sua forma appuntata od aguzza s'accompagnano sempre coll'idiotismo. Ecco il perchè vogliono taluni la forma della testa o del cervello rotonda e ben proporzionata, acciocchè possa conferire all'intelligenza. Ecco il perchè le belle proporzioni del capo e della testa e quindi del cervello si tengano dall'universale per un esteriore indizio dell'eccellenza delle facoltà intel-

(1) *Des différences d'énergie de la faculté reflèxe suivant les espèces et suivant les âges dans les cinq classes d'animaux vertébrés, par M. Brown-Séquard — V. Annales Médico-psychologiques. Tom. 2.e Paris, Avril* 1850.

lettive. Ma ad onta di ciò ne certifica l'esperienza che la forma ben proporzionata del cervello, e modellata benanco sulla testa dell'Apollo di Pizia proposta a tipo o come l'ideale del capo umano dall'antica scultura, si congiunge col corto intendimento e colle più limitate potenze intenditive. D'altro canto si osserva che la manìa o l'alienazione mentale acquisita ed anche parziale si unisce soventi volte a cerebri di dimensioni regolarissime; che l'intelligenza al più alto grado di perspicuità e di acutezza s'attiene a varietà singolari di forme nel capo o nel cervello; che il più grande sviluppo dell'intelletto o dell'intelligenza si avvera nelle teste sì rotonde che schiacciate, sì grosse che piccole ed esili. Inoltre la forma della testa o del cervello può essere tale per solo accidente, e può dipendere da tutt'altra cagione fuori che dall'impedito od irregolare sviluppamento delle sue fibre o de' suoi organi, ovvero dall'alterazione delle sue funzioni. Per la qual cosa s'annienta o falseggia qualsiasi illazione in costituirla causa o sede organica alla relazione coll'intelligenza. Finalmente si ha per costante che con qualunque forma di cranio o di cervello può congiungersi la demenza o la perdita dell'intelligenza: e quindi quella è impossente alla sua connessione con questa.

Il celebre *Morgagni* fu tra primi ad avvisare che un cervello troppo duro e compatto porta con sè l'incoerenza delle idee, laddove la sua flacidità e mollezza reca al torpore ed alla floscezza di mente. *Fodéré*, ed alcuni altri dopo di lui affermano, la pazzia atonica e l'idiotismo offerire quasi sempre un certo rilassamento ed un grado di rilevante flacidezza nell'organo cerebrale. Il perchè, a detta di questi anatomici, all'integrità della mente o dell'intelligenza sarebbe indispensabile una tal quale energia o durezza nell'organo cerebrale. Dal che si derivò come un principio la consistenza cerebrale in intima relazione coll'intelligenza. Ma anche tale principio vacilla più che mai dal lato dell'osservazione, e da quello del ragionamento. In primo luogo l'inflacidire o l'indurarsi del cerebro e delle sue fibre può essere occasionato dall'ultima malattia onde morirono i pazzi o gl'imbecilli, ovvero sopravvenire dopo la morte, sapendosi da tutti i pratici Autopsisti a quante imprevedute ed istantanee alterazioni soggiaccia il corpo allo spegnersi della vita. In secondo luogo la pazzia succede non di rado in cervelli allo stato normale o fisiologico, o che per lo meno si sono trovati tali all'atto della sezione cadaverica. In terzo luogo la poca consistenza o durezza del cerebro si rinvenne in persone affette da apoplessia, da epilessia o da convulsioni o febbri nervose, e che ciò nondimeno

conservarono ben ordinato e regolare l'esercizio delle intellettuali funzioni. In quarto luogo la polpa cerebrale può essere d'una consistenza assai disuguale; cioè in un punto solida e secca, ed in un altro flacida e molle, senza che per questo si turbino o ne soffrano menomamente le facoltà intellettive. Per ultimo le malattie mentali o le alterazioni dell'intelligenza fanno la loro prova nelle più intime funzioni del cervello, nè lasciano talvolta traccia esterna in quello; tanto è lungi la consistenza delle fibre cerebrali dal legarsi coll'intendimento come sua cagione. Tutto ciò sia detto per il conto in che deve tenersi la consistenza del cervello per rispetto a'suoi rapporti coll'intelligenza.

§ 46. Le parti del cervello, che quasi organi separati e distinti potrebbero sospettarsi sede o causa immediata ed organica all'intelligenza, sarebbero i corpi *striati*, il corpo *calloso*, il *setto lucido*, il *fornice* o *trigono cerebrale*, il grande *ippocampo*, ed il cervelletto, sì perchè diversificano tutte queste parti e nella forma e nella collocazione da quella dei grandi emisferi o lobi cerebrali, sì perchè alcuni fisiologi ne predicano tuttavia per ignote le rispettive funzioni, sì perchè v' ha di autori che quale all'una, quale all'altra sogliono riferire la cagione delle facoltà intellettuali e dei loro alteramenti. Ma anche a siffatti supposti soprastà il vero inconcusso di altri fatti e di altre ragioni. — Non è nè esatto, nè logico il ricercare la sede dell'intelligenza in organi materiali; giacchè bisogna presupporre materiale ed estesa l'intelligenza medesima contro le più rigorose analisi della stessa Psicologia. Ognuna di queste parti, ancorchè differente di forme e di collocamento nel cervello, pure ne ha l'identica intessitura e sostanza. È falso inoltre che siano tuttora sconosciute le funzioni loro; imperciocchè dalla Fisiologia s'apprende i corpi striati concorrere al moto spontaneo o volontario; il corpo calloso avere per uffizio la connessione dei due emisferi; il setto lucido aderire così strettamente al corpo calloso da non potersene far senza; il trigono o fornice essere una specie di sostentacolo alle parti soprastanti; il grande ippocampo o corno d'Ammone corrispondere coi nervi olfattivi per modo da essere destinato più alle funzioni dell'odorato che a qualunque atto dell'intelligenza; il cervelletto appartenere alla parte posteriore del cervello, ed ove venga tagliato o reciso non alterare punto le facoltà percettive negli animali; essendo esso la sede o l'organo della potenza generatrice, ovvero l'organo coordinatore dei moti volontarii. D'altro canto come si può parlar più mai d'una piuttostochè dell'altra di queste parti cerebrali qual causa o sede dell'intelligenza, mentre s'insegna dalla microtomia essere tutte uguali quelle fi-

bre innumerevoli distinte in sensifere ed in motrici, che costituiscono la sostanza del cervello? Come mai si può assegnare ad una parte o ad un organo cerebrale la sede o causa speciale dell'intelligenza, se i fatti anatomici e patologici comprovano che v'ha un consenso, una simpatia o corrispondenza fra tutte le porzioni dell'encefalo o dell'asse cerebro-spinale per guisa che una lesione grave e durevole in una va a sconvolgere le funzioni di tutte le altre? Dal che io deduco essere avventata ed insostenibile, almeno per ora, qualsiasi opinione tendente a localizzare per così dire l'intelligenza in una od in un'altra parte del cervello considerata in separato a sede od organo di quella.

§ 47. Se adunque nè le circonvoluzioni cerebrali, nè la massa, nè la forma o consistenza del cervello, nè alcuna altra sua parte od organo in separato, ponno essere cagione o sede immediata ed organica all'intelligenza, questa cagione o sede dovrà pure ritrovarsi nel cervello medesimo, dacchè al presente è incontravertibile essere l'encefalo l'organo di tutte le facoltà o potenze dell'anima, e particolarmente dell'intelletto o dell'intelligenza. Io non vo' qui ritessere la lunga tela di tutte le prove dirette e indirette, onde si argomenta a questa ineluttabile verità, nè recarvi sopra una novella tenzone, giacchè esse alla mente di tutti parranno risplendentissime; ma mi addentrerò piuttosto nell'intima struttura del cervello medesimo per rinvenirvi quella condizione organica che si presta a cotanto uffizio, e che parmi essere il tutto della quistione. Il cervello consta di due grandi emisferi che stanno alla sommità del capo e quasi a dominatori di tutto il resto dell'asse cerebro-spinale. Essi, tenuti fermi e congiunti alla base mediante il corpo calloso, occupano quasi tutta l'interna superficie del cranio. Ognuno d'essi qualora venga notomizzato all'interno, scorgesi composto di due sostanze, l'una bianca o midollare, l'altra grigia o cinerea, ambedue intrammezzate da strati o piani alternanti, cioè il primo che va dal di dentro al di fuori, *grigio*; il secondo *bianco*; il terzo *grigio*; il quarto *bianco*; il quinto *grigio*; ed il sesto *bianco*. In ciascun emisfero veggonsi fascetti, altri di color bianco contenenti al di dentro del nevrilema alcuni filamenti o fibre primitive ed elementari, al tutto omogenee e di forma cilindrica e tubolosa, della grossezza da un ducentesimo sino ad un quattrocentesimo di linea, ed altri grigi che s'informano delle stesse fibre elementari o primitive, ma più dilicate e trasparenti delle bianche, e disseminate di granelluzzi o globetti per guisa da porgere una forma granellosa o globosa. Di queste fibre elementari o primitive il Müller ne conta un milione o me-

glio (1). Le fibre primitive bianche sono *sensifere*, ossia destinate alla sensibilità generale o al piacere e al dolore. — Le cineree o grigie sono *motrici*, in quanto servono al moto. Nè circa a questa loro opera sì diversa cade più dubbio dopo le decisive esperienze dello stesso *Müller* sulle radici anteriori e posteriori della midolla spinale delle rane, e quelle di *Magendie*, il quale conchiude che il cordone posteriore della midolla spinale, le radici sensitive, il ganglionico, il nervo rachidiano, ed il cordone anteriore o motore della medesima midolla formano una catena circolare nella quale ogni parte ed elemento giova a trasmettere la sensibilità dalle radici posteriori alle anteriori (2).

Oltre a queste due specie o sorta di fibre nervose, ne esiste una terza che è quella delle fibre sensifere speciali o dei cinque organi sensorii, le quali intervengono in particolare alla percezione degli oggetti esterni. Queste fibre speciali o della pura percezione, ove vengano in qualunque guisa stirate, compresse o lacerate non danno segno di dolore, come lo provano le esperienze di Magendie sul nervo olfattivo e su l' ottico. Laonde se succede il contrario, come ne'nervi gustatorii appressati alla lingua de'metalli eterogenei, ciò dipende da alcuni filetti nervei della sensibilità generale che si frammettono in questo organo a quelli del tatto. Così pure se si tiene per falsa la dottrina della trasposizione dei sensi da un nervo all'altro, ne è ragione il quinto pajo proprio della sensibilità generale, che non può supplire all'azione di tutti gli altri nervi delle sensazioni o percezioni specifiche o proprie. Queste fibre elementari o primitive pertanto sono gli organi immediati del senso o dei sensi, della sensibilità e del moto. Ed essendo elleno così estese e varie di numero e di qualità, e messe a contatto nel comune sensorio, ossia nel cervello, ne avviene che oltre alle funzioni proprie ed esclusive le une concorrano in comune a quelle delle altre. Quindi è che scosse le fibre dei nervi ottici od acustici, nell' atto che si ha il fenomeno della visione oppure del suono, si prova eziandio la modificazione piacevole o dispiacevole dell'uno o dell'altro, secondo che vengono vellicate quelle della sensibilità in generale, le quali sono in corrispondenza con le specifiche o proprie della vista e dell'udito. Ma se così ad un colpo ci capacitiamo come il cervello colle sue fibre elementari sia l'organo o la sede imme-

(1) *Müller* = Physiologie du système nerveux, traduite de l'Allemand par A. L. Jourdan. Paris 1840, tom. I.

(2) V. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, N. 20 Mai, 22 Juin. Paris 1839.

diata alla sensibilità e al moto, non sì presto si capisce com'esso sia altresì organo o sede alle funzioni dell'intelligenza tanto diversa dalla sensibilità e dal moto, quanto lo è l'intendere dal sentire e dal muoversi, il senso dall'intelletto, l'organico ed il fisico dall'intellettuale dell'uomo. A ben comprendere questa relazione tra il cervello e l'intelligenza pare indispensabile internarsi di più nella severa analisi dei fatti.

48. L'intelligenza, come qualunque altra facoltà o potenza dell'anima, è talmente condizionata nell'uomo tal qual è nella sua presente realtà da non poter manifestare i suoi atti se non col mezzo del cervello, quale strumento od organo dell'anima in generale. Questo fatto è indubitato tanto per la Fisiologia, quanto per la Psicologia. La difficoltà sta nel discernere come il cervello, organo materiale, sia da tanto di rispondere alle funzioni dell'intelligenza di natura cotanto differente. Il cervello, qualunque sia la sua compage o tessitura, è per sè esteso e limitato dallo spazio, moltiplice, è qualche cosa sempre di sensibile o di sensato. L'intelligenza per lo contrario è alcun che d'inesteso e d'incorporeo, di semplice e di uno, d'immateriato e d'incircoscritto da spazio. Oltracciò le fibre cerebrali sono dotate di pura capacità o mobilità, non si eccitano che ad un urto o ad una impressione interiore od esteriore; talchè la loro azione è sempre passiva e necessaria, sia che avvenga dalla circonferenza al centro, sia che accada dal centro alla circonferenza. Invece l'intelligenza è tutta attività o spontaneità, perchè si attua solamente per un impulso proprio ed interno; ond'essa è essenzialmente libera; unifica e spiritualizza le stesse cose moltiplici, corporee ed estese, e nel punto di giudicare o di ragionare si discioglie da ogni limite di spazio che volesse arrestarla, trascende e si solleva al di sopra della materia, e colla veduta sterminata della sua comprensiva abbraccia e contempla nel suo microsma nonchè tutto il mondo reale, ma benanco il possibile e l'infinito. D'altra parte il comprendere o il distinguere dell'intelligenza è tutt'altro che il sentire ed il muoversi delle fibre cerebrali. La intelligenza tra gli oggetti stessi corporei e sensibili non incoglie che l'astratto ed il pensabile, nè abbisogna di traslocamento per giudicare e per ragionare. L'ammettere quindi qualsiasi legame od accollamento, o qualunque materiale o diretta comunicazione tra l'uno e l'altra, sarebbe un veramente svisarli, un volere l'impossibile, un correre dirittamente al materialismo. Egli è pertanto mestieri concedere sin d'ora che la relazione tra l'intelligenza ed il cervello come suo organo non può essere immediata e diretta, ma solamente

indiretta e mediata. Il che difficolta moltissimo sino da bel principio lo spiegare ulteriormente cotesta relazione. Ma ciò non fa caso. Il vero deve apertamente disigillarsi; giacchè il dissimulare, oltrecchè impruna la via, immola la ingenuità ed il candore della scienza all'orgoglio ridicolo de' suoi scordanti ricercatori.

§ 49. Dappoichè l'intelligenza non ha, nè può avere una relazione immediata e diretta col cervello e colle sue fibre, come mai avviene la mediata ed indiretta, e come questa ridotta a tale mostrasi tuttavia sufficiente all'azione intellettiva? Qui è dove strigne di più il nodo; ed io farò di mettermi nel buon filo od a sgropparlo od a reciderlo. Valgami all'uopo un trivialissimo esempio. Se io guardo fiso ad una rosa, si muovono tosto i nervi ottici, e questi comunicando col cervello vi trasportano in un attimo l'urto o la impressione ricevuta. A questo movimento cerebrale congiungesi la coscienza e l'interna consapevolezza dell'urto o dell'impressione medesima, senza di che non ci sarebbe nemmanco sensazione o percezione visiva; ed alla coscienza succedono di subito uno o più atti d'intelligenza nel punto che la mia mente comprende o distingue la rosa in generale, nel punto che giudico fragrante il suo odore, belle le sue foglie, simile o dissimile la rosa da qualsiasi altro fiore. Che se, in luogo della rosa sottostante all'organo della vista, ricordassi solo la sua immagine od il suo colore, e andassi paragonandoli coll'imagine e col colore di altri fiori, anche in questo caso le fibre cerebrali verrebbero deste e commosse da qualche oggetto attuale che serve di eccitamento alla riproduzione o ricordanza di quell'immagine, di quel colore già trapassati. Laonde all'atto d'intelligenza che conseguita alla rimembranza dell'una o dell'altro, sempre precede l'azione o l'urto delle fibre cerebrali o del cervello. Che se per vaghezza della rosa o delle sue qualità e forme sento il desiderio di averla; e in tale desiderio sospingo la mano ad ispiccarla, allora egli è un atto di deliberazione o d'intelligenza che trasmettesi sull'istante alle fibre motrici del cervello e quindi ai muscoli del braccio, onde s'effettua quel movimento. Da questo fatto od esempio chiaramente apparisce: 1.° Che data un'impressione qualunque sugli organi sensorii, i nervi o fibre sensifere speciali la trasferiscono in un punto al cervello siccome a loro centro, o comune sensorio; 2.° Che tale impressione recata al cervello provoca la coscienza; se no passando inavvertita è come non fosse giammai avvenuta. 3.° Che alla coscienza o al semplice avvertimento dell'impressione rispondono rappresentazioni, immagini, reminiscenze o semplici modificazioni in-

teriori, ma peraltro sempre riferibili all'oggetto che cagionò quella primitiva impressione, o ad altri che ne ridestarono delle consimili o diverse in altro tempo; 4.° Che a queste rappresentazioni, reminiscenze o modificazioni susseguono uno o più atti d'intelligenza, onde la mente intende e giudica in una guisa però diversa dal puro sentire, ricordare od immaginare, e dal muoversi delle fibre cerebrali; 5. Che questi atti d'intelligenza o di giudizio quantunque succedenti al moto delle fibre cerebrali, pure non avvengono mai direttamente per tal moto, ma coll'intermezzo di qualche immagine o rappresentazione o reminiscenza o modificazione sensibile, avvertita ed accompagnata da coscienza. Laonde è certo tra l'intelligenza ed il cervello interporsi il senso, la memoria e l'immaginazione, ed essere quindi indiretta e mediata la relazione tra loro. E tale è per l'appunto la mirabile economia nelle funzioni dell'umano intelletto, che non potendo penetrarvi non pure gli oggetti materiali e corporei ma nè tampoco quelli che sebbene semplici ed immateriali ciò nondimeno sono fuori od estrinseci a quello, deve necessariamente frapporvisi come intermedio qualche cosa d'immateriale e d'inesteso, quali sono le rappresentazioni, le reminiscenze ovvero le modificazioni prodotte dal senso, dalla memoria e dall'immaginazione, essendo impossibile altramente che l'intelligenza colla sua forza od attività meramente contemplativa pervenga a distinguere e determinare gli oggetti che le stanno dinanzi, e in una le loro qualità e relazioni. Che se nel punto del volere o dell'approssimarsi alla rosa per ispiccarla sembra l'intelligenza coll'atto deliberativo stimolare direttamente ed immediatamente i nervi cerebrali motori, pure ciò non è che un'ingannevole apparenza; imperciocchè anche in questo caso l'intelligenza è attratta da una rappresentazione o ricordanza della rosa stessa innanzi che vengano tocchi ed eccitati que'nervi del cervello. La differenza sola che vi si scorge ella è questa: che quando si percepisce un oggetto esterno si muovono le fibre cerebrali e con esse la memoria e l'immaginazione dalla circonferenza al centro, mentre quando si delibera e si vuole, quel moto succede per una via inversa cioè dal centro alla circonferenza; ma sì nell'una che nell'altra guisa tra l'intelligenza e il moto delle fibre cerebrali s'intrappone sempre una qualche rappresentazione, immagine o reminiscenza. Il perchè sta fermo ed inalterabile il già stabilito principio: che la relazione tra l'intelligenza ed il cervello non può essere che mediata ed indiretta, nè mai diretta od immediata.

§ 50. Nè a questo contraddice l'essere tutte le facoltà dell'anima tanti at-

tributi inerenti e radicati nell'anima stessa come loro proprio ed unico soggetto, a motivo che è l'identica anima tanto che sente, ricorda ed immagina, quanto che intende e giudica; giacchè qui c'è modo a rendere colpo per colpo con una semplicissima risposta. Gli è vero che è sempre la stessa anima che sente, immagina e ricorda, e che giudica ed intende; ma altro è l'anima ed altro i suoi atti e le sue funzioni; quella è qualche cosa di fisso e di permanente, e che non muta mai; questi sono alcun che di mutabile o variabile e di successivo. Gli atti poi delle facoltà dell'anima, appunto perchè successivi, cadono in tempuscoli diversi. L'anima, avanti d'intendere e di giudicare, abbisogna del percepire, o del sentire, dell'immaginare o del ricordare. Non è da meravigliare impertanto se l'anima, senza cessare la propria unità od identità, non possa intendere o giudicare senza il sussidio di qualche preventiva rappresentazione o reminiscenza; e siccome al moto delle fibre cerebrali conseguita la rappresentazione o la reminiscenza, così avviene che a qualunque atto intellettivo s'interponga un atto sensitivo o rappresentativo quale intermezzo tra il moto del cervello e la intelligenza. Per lo chè anche allorquando l'anima soltanto sente, ossia s'accorge immediatamente d'un esterno oggetto impressionante gli organi, l'atto comprensivo ed intellettivo è sempre posteriore alla sensazione o rappresentazione, sebbene non ci sia dato di coglierlo e di discernerlo distintamente, a cagione della grande ed impercettibile rapidità onde si compie e si accompagna colla coscienza. Conceduta perciò la identità o medesimezza dell'anima colle sue facoltà, e quindi eziandio coll'intelligenza, non ne conseguirà mai avere quest'ultima una diretta ed immediata relazione col cervello e colle sue fibre. Se avesse a supporsi il contrario, non sarebbe più in salvo la immaterialità o spiritualità dell'anima, nè evitabile la consustanzialità tra due principii di opposta natura. Per lo chè quando dianzi ho affermato io stesso essere la memoria e l'immaginazione in più stretta relazione dell'intelligenza col cervello, non ho inteso di ammettere nemmanco tra queste facoltà inferiori ed il cervello una specie di contatto diretto ed immediato; che ciò sarebbe sempre un che di ripugnante ed impossibile; ma ho voluto indicare solamente che tra loro non esiste quello stesso intermezzo, che s'avvisa tra il cervello e l'intelligenza, essendo ovvio essere altro il moto delle fibre cerebrali, ed altro una percezione, un'immagine od una rappresentazione per quantunque queste dipendano fontalmente da quello. Laonde avvi sempre un vuoto tra l'azione meccanica delle fibre cerebrali e la sensazione, o la perce-

zione o coscienza che ne è ingenerata e prodotta. Tanto è lungi dal vero che per essere l'anima ad un'ora senziente ed intelligente, debba connettersi la intelligenza direttamente ed immediatamente col cervello e colle sue fibre.

§ 51. — Dal detto fino a qui è certissima la doppia conclusione: 1.° Essere il cervello colla totalità o triplicità delle sue fibre concorrenti in un centro o sensorio comune la *condizione organica* all'intelligenza in quanto gli oggetti o la sua materia recandosi dinanzi alla mente sotto forma di rappresentazioni, di reminiscenze e d'immagini o di modificazioni, essa viene eccitata ai varii atti o funzioni del comprendere o distinguere, del giudicare e del ragionare su quelle rappresentazioni, reminiscenze o modificazioni stesse che si destano e si preparano dal moto delle fibre cerebrali. 2.° Che per tale condizione organica non è però da presupporre una diretta ed immediata relazione tra l'intelligenza ed il cervello, essendo questa solamente indiretta e mediata sì per il fatto come per la dimostrazione. Se non che col conchiudere sì stringente e preciso non è spiegato ancora nella sua interezza il complicatissimo problema intorno a così fatta relazione. Se è agevole il concepire come le impressioni degli oggetti esterni trapassino dalle estremità al sommo delle fibre accentrantisi nel cervello, ove s'adunano e riduconsi tutte, formando così quell'unità però sempre estesa e materiale e che è cotanto dissimile dalla psichica o della coscienza, non è altrettanto facile il farsi chiaro come tali impressioni giunte colà, si trasformino in rappresentazioni, immagini, reminiscenze e modificazioni sì da loro diverse; e quel che è più come a tutte queste cose sopraggiunga l'atto intellettivo o comprenditivo sotto forma ora di semplice idea o nozione, ora di rapporto tra nozione e nozione, ossia di giudizio. Ciò a dir vero è un ineffabile mistero, e perchè dal moto ultimo delle fibre cerebrali alla coscienza, e molto più all'atto intellettivo c'è un tratto in cui s'inabissa il pensiero, e perchè l'atto medesimo intellettivo è tanto semplice e spirituale da non ritrarre per nulla nè delle fibre cerebrali, nè del moto suscitato da quelle, e perchè il moto stesso cerebrale è così inadattabile e disproporzionato all'intendere e al giudicare, che sembra assolutamente impossibile l'uno non che generarsi, ma essere neppure in alcuna relazione coll'altro. Nè per quanti sforzi abbia fatto sinora la Filosofia per levarne il velo, può dirsi ch'ella abbia avanzato d'un passo. L'immaginare i nervi o le fibre cerebrali operanti fisicamente sul pensiero o sull'intelligenza, siccome vollero già i parteggiatori dell'*influsso fisico,* è tanto come asserire quello che deve provarsi, è premettere un'ipotesi per sè stessa ripu-

gnante ed assurda, è un volere le pastoje invece della briglia. Il fantasticare che tra la mente e gli oggetti s' interpongano le *idee*, ossia le forme plastiche dei peripatetici, onde l'intelligenza nulla può distinguere o comprendere se non a traverso il prisma di queste idee, che a guisa d' idoletti o d' immagini si dipartono dagli oggetti per collocarsi dinanzi all' intelletto che si converte a quelle, non è ragionare, ma poeteggiare nella scienza, è infingere ed impigliare coi fantasmi là dove si cerca più che mai il fatto o la realtà. Il ricorrere col pensiero sui vieti sistemi delle *cause occasionali* o dell' *armonia prestabilita*, non torna ad altro che saltare a piè pari la difficoltà in cambio di appianarla, che assoggettare la libertà al fatalismo dell'*uomo macchina*, in quanto ei non può più nè pensare, nè volere, se non in quanto pensa e vuole in lui la stessa Divinità, e in quanto tutti gli atti del suo pensare e del suo volere obbediscono alla legge preponderante di una necessaria preordinazione. Lo asseverare, con alcuni moderni, che abbia luogo l'*immediata intuizione* degli oggetti, per la quale niente si intrammette fra loro all' atto della percezione o conoscenza, è un immascherare la petizione di principio, è un crescere difficoltà ad intendere come il semplice o l' incorporeo possa immediatamente percepire il materiale o l'esteso, è un niegare il fatto opposto che noi percepiamo e comprendiamo dentro di noi gli oggetti non per sè stessi od immediatamente, ma per via soltanto d' immagini o rappresentazioni, di reminiscenze e di altre interiori modificazioni. Nè fu di questi più fortunato il tentativo col quale staccando l' intelletto *puro* dall' intelletto operante coi sensi e coll' immaginazione, si va designando l' intelletto puro quale una facoltà che ha l'anima strettamente congiunta con Dio, e quindi eziandio le idee di tutte cose. Per lo chè, al dire di qualche filosofo, noi come enti finiti non potremmo mai percepire enti astratti e generali, e meno poi l' infinito senza la presenza di lui che rischiara la mente nostra in modi infiniti. Quindi è che in tale ipotesi è solo per la vista immediata e diretta di Dio, per l' intima unione del nostro spirito col suo *Verbo*, che siamo fatti capaci di conoscere e di vedere in Lui quelle idee che si riferiscono alle cose, e ch'Egli tutte comprende in sè nella semplicità ed immensità del suo Essere (1). Io ho voluto rapportare più nettamente e fedelmente il sistema del *veder tutto in Dio*, e perchè egli è l'addentellato ad altri sistemi famigerati a

(1) *De la Récherche de la verité* par N. Malebranche, Tom. 2., Liv. 3. *De l'Esprit pur.* Chapitre VI. *Que nous voyons toutes choses en Dieu.* — Paris 1721, Chez Christophe David.

dì nostri, come ad esso lo fu già quello delle *idee* di Platone, e perchè si cessi una volta il romanzeggiare colle idee Platoniche, senza nemmeno il merito della novità. Io lascierò ai teologi il decidere se sia mai possibile nel semplice ordine *naturale* un' immediata ed intima unione delle anime con Dio, o la visione in Lui di tutte le idee delle cose che noi conosciamo; ma limitandomi al puro ragionamento, dirò che quest' intima unione della mente umana con Dio, questo conoscere solo per mezzo delle idee vedute in Dio, parlando sempre nell'ordine naturale, esce dei confini della scienza, scioglie e rinetta troppo presto l' intelligenza o l' intelletto da ogni imbratto organico o cerebrale, rinnova l'antico sistema delle *idee* quai tipi o forme universali delle cose, e riscende ad una specie di panteismo psicologico non meno erroneo del fisico o materiale. Ma non isgomentati alcuni più coraggiosi vorrebbero sostituire alle idee di Platone e di Malebranche come intermezzo tra il senso e l' intelletto l'unica idea universale e connata dell'*Ente;* ondeché l' intelligenza conscia dell'oggetto individuale e concreto, avvertito colla sensazione recatasi al cervello, non può concepirlo e conoscerlo senza l' interponimento d'un mezzo intelligibile, qual è quello dell'idea unica dell'Ente già in lei preesistente ed innata. Non è qui nè il tempo nè il luogo di quistionare sull' idea innata od anticipata dell'*Ente* in universale, nè sulla sua opportunità alla genesi o figliazione di tutte le altre; ma ristringendo il discorso al modo o all' intermezzo con cui adopererebbe l' intelletto nelle sue funzioni, la mercè di quella, basti osservare che l' idea generalissima dell' *Ente,* data anche per vera, non ci farà mai veduto nè come l' intelligenza possa corrispondere col cervello nella semplice sensazione o percezione del concreto indispensabile in ogni modo ad eccitare la stessa idea dell' Ente, qualora si ammetta un'assoluta incomunicabilità tra questa e le fibre cerebrali, nè come la stessa idea dell' Ente tuttochè innata e presente sempre al nostro spirito, essendo di natura semplicissima e spirituale, possa comprendere o riverberare da sè, come da uno specchio, il sensato o materiale, qualora si conceda una corrispondenza o relazione qualunque fra l'una e l'altro (1). Per

(1) La dottrina dell'*Ente* in universale è tirata su quella del *veder tutto in Dio* di Malebranche. Non è fuor di proposito il rapportar qui il giudicio di quest'istesso Filosofo sull'*idea dell'Ente* isolata da tutte le altre, e ritenuta come innata in Psicologia, come criterio della certezza in Logica ed in Metafisica, e come legge suprema del bene o del buono nella Morale e nella Politica. — È lo stesso Malebranche che parla. Chapitre VIII, Liv. 3. Tome 2. =
« La présence intime de l'idée vague de l'Etre en géneral est la cause de toutes les

le quali cose tutte io non esito di conchiudere all' assoluta inesplicabilità del modo col quale si effettua e si mantiene la relazione tra l'intelligenza e le fibre del cervello, quantunque sia certo il fatto di questa relazione ed incontrastato il suo carattere di mediata ed indiretta. Ed a questa conclusione mi persuade così l'inutilità di tutte le ipotesi sin qui ideate per ispiegare il fenomeno, come la manifesta contraddizione od antitesi tra i due principii dell' intelligenza e del cervello, i quali possiamo supporre bensì in armonia od in accordo, ma non mai comunicanti tra loro coll' opera di un intimo e consostanziale congiungimento. Quindi è che piuttosto di andare fantasticando tra ipotesi insufficienti ed assurde, gioverà notare gli altri caratteri che contraddistinguono ancora meglio una così maravigliosa relazione; chè almeno di questa indagine potrà avvantaggiarsi la Psicologia ad un doppio riguardo: e per compiere possibilmente la sua dottrina, e per dar luogo alla spiegazione di altri fenomeni che si riferiscono al problema che forma il soggetto della ormai troppo lunga mia Memoria (1).

» abstractions déréglées de l'esprit et de la plus part des chimères de la Philosophie ordinai- » re. — » Egli prosegue dimostrando nello stesso capitolo. == Che alla mente è impossibile di disfarsi interamente dell'idea generale dell'Essere; talchè anche quando pensa ad enti particolari, non può del tutto perderla di vista, mentre lo spirito vede confusamente ed in tutta la loro piccolezza anche questi esseri particolari in tutta la grandezza dell'Essere universale. Che è impossibile starsi un momento senza pensare all'Essere, ed anche quando ci sembra di pensare a nulla, il pensiero è ripieno dell' idea vaga e generale di quello. Che quantunque una tale idea dell'Essere sia in noi prodotta dall'unione immediata dell'anima col Verbo di Dio o colla sovrana Ragione, ciò nondimeno la presenza continua di una cosiffatta idea è una causa principale di tutte le nostre sregolate astrazioni, e per conseguenza di quella filosofia astratta e chimerica che spiega tutti gli effetti naturali coi termini astratti e insignificanti di *atto*, di *potenza*, di *causa*, di *forme sostanziali*, di *facoltà* o *qualità* occulte; giacchè simili denominazioni altro non fanno che risvegliar nella mente idee che le si presentano senza fatica e senz' applicazione, e che racchiudono l'incancellabile idea dell'Essere, ec.

(1) Confermano pienamente questa asserzione sull'inutilità di tutte le ipotesi tendenti ad ispiegare il modo col quale si congiungano fra loro l'intelligenza ed il cervello, o in altri termini il *mutuo commercio* dell'anima col corpo, anche le dottrine di Spinosa, di Kant, di Herbart e di altri Filosofi Alemanni i più moderni.

Benedetto Spinosa (*Ethica*, pars secunda) dichiarando Dio per un'unica sostanza avente per attributi o modificazioni proprie il pensiero e l'estensione, fa procedere l'unione dello spirito e del corpo dall'*unità originaria* dello stesso pensiero e della stessa estensione in Dio. Ed in tal guisa mentre egli evita ogni difficoltà del commercio fra due sostanze oppo-

§ 52. — La relazione tra l'intelligenza e le fibre del cervello mentre è sempre *indiretta* e *mediata*, come venne già dimostrato, qualora si assottigli di più il suo esame, apparirà altresì *reciproca* e *continua*, ma *disuguale*, non d' *identità* nè di *causalità*, ma di semplice *corrispondenza* e *cooperazione*. È reciproca in quanto si avvicenda ed è scambievole la respettiva azione e cooperazione. È continua in quanto non cessa mai, sebbene sia disuguale, una cotale azione e cooperazione. È disuguale in quanto non si pareggia, ma è più o meno la corrispondenza o cooperazione sì da una parte che dall'altra. Non è però d'identità, a cagione che il cervello e le sue fibre essendo materiali ed estese sono l'opposto dell'intelligenza immateriale o spirituale. È nemmanco di

ste, niega d'un tratto la loro dualità per essere conseguente al suo panteismo, od al sistema della sostanza unica universale.

Kant (*Critica della ragion pura*) fa dipendere la difficoltà del problema intorno al commercio dell'anima col corpo dal supporre il senso interno assolutamente diverso dall'esterno. Ma se tale apparenza non fosse che apparente, e la materia sottostante fosse una sostanza non di diversa specie, allora, ei dice, il problema si ridurrebbe a sapere: Se sia possibile il commercio o l'associazione di due sostanze? Ma in tal caso il problema trascende la esperienza o la psicologìa, e la dualità delle due sostanze non sarebbe più che una pretta supposizione. È evidente adunque che *Kant* con questo ragionamento non ammette che un apparente spiritualismo dell'anima umana.

Herbart (*Istituzioni di Psicologia*) opina che la unione dell'anima col corpo ha un che di maraviglioso, a motivo che si tiene la materia esistente e lo spirito un pensare ed un volere *originario*, e quindi manca tra loro, come tali, l'anello di unione. Ma se invece si cercasse al di là della materia l'essere semplice quale anima puramente rappresentativa, e le sue rappresentazioni quali *abiti* che debbono corrispondere ad altri abiti in altri esseri, per es. negli elementi del sistema nervoso, allora colla catena di questi abiti collegati fra loro s'intenderebbe chiaramente come dall'estremità del piede si propaghi sino al cervello e nell'anima una sequela di stati interni senza indizio di tempo e senza moto nello spazio.

La erroneità dell'ipotesi di *Herbart* è patente, sì perchè l'anima ed il corpo sono per lui due esseri identici, cioè monadi senza rappresentazioni, oppure atomi senza estensione, come perchè a suo avviso l'opposizione fra l'anima e la materia non è più reale, ma un semplice modo di concepire l'una e l'altra.

Schelling (*Essenza della libertà umana*, Vol. I degli Scritti filosofici) ammettendo una perfetta identità tra il soggettivo e l'oggettivo, ossia tra il rappresentante e il rappresentato, oltre che niega il fatto del commercio dell'anima col corpo dal lato psichico, trascorre al panteismo di Spinosa.

Hegel (*Enciclopedia delle Scienze filosofiche*, Heidelberg 1830) reputa incomprensibile il commercio dell'anima col corpo, solo perchè si suppongono ambidue sussistenti per sè ed in una reciproca opposizione, mentre una siffatta supposizione è per lui meramente ideale,

causalità, perchè il moto delle fibre cerebrali occasiona e non produce gli atti della intelligenza. È di semplice corrispondenza e cooperazione perchè sì il cervello che l'intelligenza concorrono insieme ed armonicamente a dati fenomeni, e perchè l'intelligenza non può operare senza delle fibre cerebrali ad onta di tutta la sua ingenita spontaneità od attività. Era necessario dilucidare il senso preciso delle parole colle quali si annunciano cotesti suoi caratteri a scanso di errori o di equivocamenti. Ognuno di questi caratteri è complesso, e comprende sotto di sè alcuni fatti o fenomeni che si legano più o meno strettamente colla relazione tra l'intelligenza ed il cervello. Io farò di ridurre anche questi fatti o fenomeni a classi o serie determinate e fisse per rendere più esatto il compito che mi sono assegnato. Il che sarà nè discaro nè inutile, allorchè si sappia che la Psicologia stassi tuttora sulle generali intorno alla colleganza o relazione tra il cervello e le facoltà dell'anima, nè venne ancora a tutti quei particolari di che pur tanto s'abbisogna ad una vera teoria. Questa scienza sino al dì d'oggi rimane contenta ai tanti fatti che servono a comprovarne l'esistenza; ma non si cura di andare più innanzi nello indagarne i rapporti o le leggi.

§ 53. La reciprocazione tra il cervello e l'intelligenza è un fatto innegabile ed assentito dall'universale. Se il cervello è in istato di elaterio e di eccitamento, anche le nostre idee partecipano al suo impeto ed al suo vigore. Se fiacchi e languidi siano i movimenti cerebrali, illanguidisce e mostrasi fiacco il pensiero. Se il cervello è compresso ed ottuso, apparisce compressa ed ottusa eziandio la mente. Chi s'approfonda nella meditazione o nello studio, raggrinza la fronte che è la superficie più prominente del cerebro, tiene gli occhi fissi e stassi colla persona, per lasciare in piena libertà i soli moti del cervello. La continuità di questa reciprocanza tra il cervello e l'intelligenza è l'espressione di altri fatti incontrastabili e manifesti, e che cadono sotto la regola comune, anche quando sembrano discostarsene. Gli oggetti esterni vanno e tornano, e cagionano mille e mille svariate impressioni sugli organi sensorii e quindi sul cervello. L'anima sebbene non possa avvertirle tutte egualmente e sempre vivamente, ciò non ostante ne incoglie la più gran parte. Queste impressioni trascorse al cervello generano rappresentazioni, immagini e remi-

essendo Iddio soltanto la sola vera identità. Quindi è aperto condurre anche la sentenza di *Hegel* da un canto all'esagerato spiritualismo e dall'altro al panteismo psicologico o spirituale di Spinosa e di Schelling.

niscenze; e su queste lavora di continuo l'intelligenza. La mente umana è agile ed attivissima, quanto lo è il pensiero. Il pensiero si trasforma in giudizii, in deliberazioni, e queste in desiderii ed in azioni. Perciò l'intelligenza stessa altro non fa che operare direttamente sulle immagini e rappresentazioni che occasionano i suoi giudizii e le sue deliberazioni, e per indiretto sulle fibre cerebrali, che si prestano a'moti ed infine all'azione.

§ 54. — Se non che ammettendo la continua reciprocazione tra l'intelligenza ed il cervello, non può ammettersi per questo uguale l'influenza sì dell'uno che dell' altra. Due cose qualunque ponno reciprocare o fare a vicenda tra loro, senza che per ciò riesca ad una misura la loro ragione rispettiva, e quindi la forza ed il grado di mutua azione e reazione che si verificano per quelle. Tanto avviene della reciprocanza fra l'intelligenza ed il cervello. Il cervello è alcun che di corporeo ed esteso, di vario e di moltiplice; e l'intelligenza un che di sempre uno e semplicissimo. L'intelligenza dispiega tutta la sua forza od attività dal cervello; ed il cervello non può fare altrettanto per rispetto all'intelligenza. Quindi alterata l'intelligenza si altera il cervello; ma alterato il cervello non si altera del pari nè sempre l'intelligenza. Un'idea fissa o predominante basta ad irritare e guastare il cervello; ma soltanto gravi ed essenziali lesioni recate al cervello possono offendere e disordinare l'intelligenza. Oltracciò l'intelligenza nella ammirabile sua attività ed energia soprasta naturalmente all'inerzia delle fibre del cervello. Chi è assorto in forti meditazioni non sente, non ode tuttochè si muovano le fibre cerebrali. Nel sonno mentre quietano gli organi cerebrali, non quietano nè la mente nè il pensiero. I pazzi per monomania si hanno per tali non già perchè prendasi abito vizioso il loro cervello, ma sibbene perchè è guasta l'intelligenza, o perchè le facoltà dell'immaginazione e della memoria trasmodano in loro. L'intelligenza è coll'atto riflessivo così forte e prevalente sul senso e sul cervello da far non che soffrire, ma persino dimenticare i dolori, le malattie e le più ingrate sensazioni. Ciò basti per conchiudere che la reciprocazione tra l'intelligenza ed il cervello con tutto chè continua, non è peraltro uguale da ambe le parti, ma sempre prevalente e superiore dal lato dell'intelligenza, e minore dal lato del cervello. Se fosse il contrario la natura andrebbe a ritroso, ponendo lo spirito a servo della materia, e la materia a signora dello spirito. Se il cervello preponderasse nella sua azione e reazione all'intelligenza, chi potrebbe mai più imbaldire della nobiltà e grandezza dell'uomo? Chi ci difende più da tutta l'ignobilità del materialismo? D'al-

tra parte chi v'ha mai che nieghi la forza dell'anima per sommetterla a quella del corpo? Chi v'ha mai che ardisca o disenni al punto da scambiare l'anima col corpo, ed il corpo coll'anima? Eppure si trascorre a tanto, allorchè vogliasi affermare l'uguaglianza nella reciproca relazione tra l'intelligenza ed il cervello. Dalla reciproca e continua relazione tra l'intelligenza ed il cervello vengono ad originarsi come suoi principali fenomeni: *a*) il mutuo *commercio* tra l'anima ed il corpo, od anche il rapporto tra il *fisico* ed il *morale*, *b*) i fenomeni misti, *c*) la *nozione* del razionale od assoluto mediante l'empirico. Cotali fenomeni sono così segnalati per la scienza, e si collegano siffattamente tra il cervello e l'intelligenza che rileva non poco il considerarli pur anche di trascorso ad uno ad uno.

§ 55. Il mutuo commercio dell'anima col corpo è ad uno causa ed effetto della relazione reciproca e continua tra l'intelligenza ed il cervello. In qualunque forma succeda, esso è sempre un fatto maravigliosissimo per il come e per il quanto l'uno si dispaja dall'altro. Un siffatto commercio per altro non è nè comunevolezza, nè consomiglianza, nè unione o trasmutamento, ma semplice accordo, consonanza ed armonia fra due principii o sostanze d'opposta natura. Questo commercio inoltre non si distende per parte dell'anima a tutta la superficie del corpo, non essendo questa un'entelechia, ossia una sostanza informante e diffusa dovunque per la macchina corporea, nè tale da confondersi coll'anima sensitiva e vegetativa di Aristotele, o colla vitalità di Sthal, in quanto fosse a pigliarsi stortamente per l'unica attività effettrice sì del pensiero e della volontà, come della nutrizione e della circolazione del sangue. Quindi è che il mutuo commercio dell'anima col corpo deve restringersi e temperarsi nelle stesse sue espressioni, ed in tutta l'ampiezza del suo traslato, non riducendosi esso che ad una relazione dell'anima col cervello, e non già con tutto l'organismo, essendo quello e non questo il nobile stromento che mise la natura a servigio delle umane potenze o facoltà. Un tale commercio però circoscritto a questi più stretti confini ha ancora in sè alcun che di vago e d'indeterminato, come lo ha il rapporto del fisico e del morale dell'uomo, che alcuni preferirebbero a correttivo dell'improprietà di quel traslato. E di fatto anche il rapporto del fisico e del morale è qualche cosa di generale e d'ignoto, finchè non vengasi a specificare gli oggetti che costituiscono l'uno e l'altro, finchè non si sappia determinatamente quale sia l'influenza ed il modo di operare di ognuno, e quale per conseguenza la maggiore o minore connessione tra loro.

§ 56. Come il fisico comprende tutti i solidi e fluidi e le forze che informano e muovono la macchina umana, così il morale abbraccia tutte le potenze o facoltà dell'anima co' loro prodotti o fenomeni, ed insieme l'anima stessa quale principio o soggetto di quelle e di questi. Egli è perciò ch' entrano nel fisico l' età, il sesso, il temperamento e persino il clima, in quanto opera sul fisico medesimo, e che tutti questi oggetti debbono essere in una data relazione col cervello e quindi anche coll'intelligenza, che è l'altro termine della già posta relazione. Se non che circa a tale relazione dandosi nell'eccesso con esagerati trapassamenti, riesce più ardua la fatica del mettersi alla contesa, e del confinarla dinanzi al vero. Nel fanciullo prepondera il volume alla massa cerebrale, e nell' uomo la massa al volume. Nel fanciullo sono molli e pieghevoli le fibre cerebrali, e pigliano più di consistenza e di fermezza coll' andare degli anni, finchè indurano e si attenuano nella vecchiaja. Ora, a riscontro di queste mutazioni nell'organo cerebrale per l'età, si possono contropporre quelle che nascono corrispondentemente nell' intelligenza. Mentre nella puerizia tutto è senso e sensibilità, l' intelligenza soverchiata dalla memoria e dall' immaginazione riducesi alla continua e svariata associazione di oggetti sensibili e di appetiti, ad una serie di nozioni e di giudizj più o meno ristretta a quelli. La gioventù invece, nell'atto che è fervida nell' immaginazione e impetuosa nel sentimento e nell' affetto, ha chiara e viva ma rapida ed impaziente l' intelligenza. La virilità com' è ferma e costante nel volere, così è forte e vigorosa ed anche riflessiva nell' intendere e giudicare. La vecchiaja quanto è debole e fiacca ne'sensi e nella memoria, altrettanto mostrasi manchevole e languiscente nella comprensiva. Nel sesso femminile, nella guisa che il cerebro partecipa alla mollezza e finezza di tutti gli altri organi, s'ammollisce e si affina eziandio l'intelligenza. Per lo chè se la donna non è fatta in generale come l' uomo per i forti e profondi studj, distinguesi per altro in quelli dell'arte e dello spirito, e nell'osservazione delle cose più minute e sfuggevoli. Anche pel temperamento varieggia non poco l' intelligenza mostrandosi pigra e lenta nel flemmatico o pituitoso, mobile, vivace e pronta nel sanguigno, più ferma e penetrativa nel bilioso, sbrigliata e cupa e facile agli esaltamenti ed all' estasi nel malinconico. Il clima così variabile nelle Zone o latitudini del globo se opera più presto sul sistema nervoso e musculare che non sul cervello, non pertanto atteggia e modifica diversamente la mente o l' intelligenza nell'Europeo e nell'Etiope, nel Chinese e nell'Americano, non in sè stessa e nelle sue funzioni, ma nei differenti oggetti di cui s' impressionano gli abitatori delle di-

verse regioni, e nel maggiore o minor grado di energia che può acquistare e mantenere il loro organismo, in relazione alla temperatura ed alle altre condizioni fisiche del suolo. Ma conceduta pure tutta questa influenza dell'età e del sesso, del temperamento e del clima in quale relazione starà essa coll' intelligenza o coll'intendimento? Certo ch'io non torrò mai nè a magnificare nè a ripetere tutte le esagerazioni della Fisiologia e della Climatologia intorno a questa sì decantata loro influenza, sì per l'analisi psicologica del presente e per la storia del passato,che vanno menomandola d'assai, sì perchè facendo prevalere questi elementi sulla umana intelligenza si trascorre senza avvedersi al predominio della materia sullo spirito o sul pensiero, al fatalismo della storia e della politica, al degradamento degli individui e delle nazioni, o ad una scienza falseggiatrice dell' Antropologia. Tutta questa influenza dell' età, del sesso, del temperamento e del clima ridotta alla sua somma ed a suoi veri termini, non è che diretta ed immediata sull' organismo e principalmente sul sistema nervoso, e quindi non può riuscire che mediata ed affatto indiretta per rispetto all' intelligenza in virtù dei rapporti già dimostrati tra l' uno e l'altra. Laonde sarebbe un forviare dal vero e dal fatto stesso il considerare una siffatta influenza quale causa generatrice dell' intelligenza stessa e de' suoi atti, siccome si folleggiò da qualcheduno. Il credere che questi oggetti o tutti insieme o ad uno ad uno, tanto possano sul sistema nervoso o sul cervello, da produrre soltanto quelle date idee, quei dati giudizj o raziocinii, e da formare od atteggiare in una parola l'intendimento o la intelligenza in guisa affatto diversa ed opposta dall' uno all' altro, parmi un' assurdità così manifesta da non poter colorare nemmeno con illusione, ed è per me un pigliare la scienza troppo all' ingrosso anche nei limiti d' un' indagine puramente sperimentale e di mera osservazione. Tutte le operazioni o funzioni vitali od animali così dell'individuo come della specie, stando anche ai prodigii della Fisiologia e della Chimica organica, riduconsi a semplici movimenti di solidi per opera di fluidi, animati entrambi dalla forza di vitalità o dal principio vitale. Quindi è che siccome a questi movimenti pigliano una gran parte i nervi, il cui punto centrico e comune è il cervello; così tutto ciò che direttamente opera sui nervi e sul cervello, viene ad operare eziandio, ma indirettissimamente su quelle funzioni medesime. Ma gli atti e le funzioni dell' intelligenza non sono nè vitali nè animali, ed il cervello se vi concorre, vi concorre non per altra guisa che per quella d'istrumento alla loro manifestazione, e di ajuto e di condizione a quel successivo svolgimento, a quel grado di forza o di energia che acquistano a tratto a tratto

l'intelligenza e le sue facoltà, dipendentemente dall' organo cerebrale con cui operano e si appalesano. Parrebbe adunque evidentemente erroneo il pensare che l' età, il sesso, il temperamento ed il clima che riversano in gran parte la loro azione solo sui nervi e sul cervello, avessero ad agire più potentemente di loro sulla intelligenza. L' età per sè stessa non può essere che la condizione al progressivo consolidamento degli organi e per ciò anche del cervello. Il sesso per quanta simpatia si abbia col cervello, non potrà che modificare la sensibilità e l' immaginazione, e quindi affatto indirettamente l' intelligenza. Qualunque sia la specie del temperamento naturale od artificiale, ed originato o dalla preponderanza di un fluido sopra gli altri, o dalla prevalenza dinamica o delle forze di eccitamento e di eccitabilità, o da quella fisiologica del sistema nervoso sul muscolare, oppure dal loro equilibrio, non è che un oggetto di maggiore o minore connessione tra tutte le parti dell'organismo ed il cervello; e perciò la sua azione od influenza riesce sempre minore di quella del cervello medesimo. In fine, se il clima per il differente grado del caldo e del freddo, e per la varietá della temperie e delle circostanze o condizioni locali può tanto sul fisico e singolarmente sul sistema nervoso e muscolare, tutta la sua azione non esce però dalla periferia dell'organismo umano; e quindi è falso che il clima possa alcun che direttamente e immediatamente sull' intelligenza. Questa maravigliosa facoltà è quello che è in sè stessa in tutte le regioni, e nelle zone più opposte del mondo. Il genio della Matematica, della Fisica, della Meccanica e della stessa Poesia è frutto che spunta tanto al nord, quanto al sud, e persino nei deserti dell'America. Esso non varia che nel grado e negli oggetti, ma non mai nella sua qualità o natura. Dal che, io conchiudo che la relazione o l'influenza dell' età, del sesso, del temperamento e del clima per quanta si voglia, non è che diretta ed immediata col cervello, e perciò assai più mediata ed indiretta del cervello stesso per riguardo all' intelligenza. Ecco a quanto si riduca la predicata influenza del fisico sul morale dell' uomo. Ned' è più da impaurire se tra questi limiti si restringa la reciproca relazione od il mutuo commercio tra l'anima ed il corpo. Questa relazione o commercio mutuo così chiarito e ristretto, è un fatto irrepugnabile, è una composizione o combinazione maravigliosa, una corrispondenza ed armonia tra due sostanze o tra due principii in che però si fonde tutto l'uomo, e che è cagione a tanti fenomeni curiosissimi. Niegatela se potete. Se l' uomo è tutto anima o tutto spirito, a che prò fece natura il corpo ed i suoi organi ed i nervi divisi in tanti gruppi o centri che il mettono in comunicazione cogli oggetti

esteriori, e per cui al momento della loro percezione o distinzione prova il sentimento del *Me* o della personalità cotanto diversa dalla vita e organica ed animale o di semplice relazione? Se l'uomo è tutto organi, tutto cervello, o tutto corpo o materia, dov'è il principio pensante o ragionatore? Dov' è la dignità e sublimità del nostro essere, la sua differenza dal bruto che sente o divora, dalla pianta che vegeta, dal sasso che c'ingombra il cammino? Se l'uomo non è che organi o materia, se il fisico prevale sul morale, anzi produce il morale stesso, che manca più mai al delirio dell' intelligenza quale giuoco di soli movimenti cerebrali, ed il pensiero quale una secrezione dell'organo del cervello?

§ 57. I fenomeni misti sono quelli che intermezzano, a così dire, tra i fisici o fisiologici, ed i morali o psicologici, per quanto è possibile disgregare in un essere complesso ed unificato qual è l'uomo, nel presente suo composto di anima e di corpo, di spirito e di materia. Quindi è che i fenomeni misti hanno parte in entrambi, senza che se ne possa assegnare il grado, e senza che valga nè sia esatta l' assoluta separazione che volesse pure introdursi tra gli uni e gli altri per escludere questa terza specie; giacchè anche in quelli che li vogliono solo per fisiologici ed animali ci rimane sempre alcun che di alieno dal semplice organismo, finchè starà nell' uomo l' intimità di due sostanze. Determinata così la genuina natura dei fenomeni misti, sono da comprendervisi come principali il *sonno*, i *sogni*, il *sonniloquio*, il *sonnambolismo*, l'*allucinazione* e persino la *pazzia*. Questi fenomeni misti, tutto che differiscano cotanto fra loro, ciò nondimeno convengono in un carattere comune e segnalatissimo, qual è quello dell'estinzione o del travolgimento della coscienza o del sentimento del *Me*, che accentra e governa l' esercizio, o l'attività di tutte le facoltà dell'anima, e che costituisce la vera e reale individualità o personalità dell' uomo stesso, e senza della quale ei non potrebbe nè pensare, nè deliberare, nè volere; e questa coscienza o sentimento del *Me* assai complessa, in quanto è un prodotto dell'intelligenza e della volontà e dei loro atti unificati e riferiti per mezzo della riflessione all'interno nostro individuo, ed assai singolare in quanto per la rapidità del suo concetto o della sua intuizione si manifesta più come un sentimento che come una conoscenza od idea, non deve confondersi con quella vaga e indeterminata consapevolezza o coscienza colla quale si avvertono le esteriori impressioni, e senza cui non potrebbe dirsi nemmeno di sentire; poichè questa è propria sì dell' uomo come del bruto, sì dell' adulto come del feto e del bambino, mentre quella non s' appartiene che all'essere intenditivo e ragionevole nel pieno

vigore o sviluppo di tutte le sue facoltà. Ciò posto, non è egli vero che nei fenomeni misti attutisce o si travolge questa coscienza o questo sentimento del *Me* per riprodursi e mantenersi in tutta la sua forza e vivacità nella vita normale dell'essere pensante sensitivo? Nel sonno, che i poeti non a torto rassomigliano alla morte, l' uomo è inconscio non solo di ciò che passa dentro di sè, ma persino della sua propria esistenza, principalmente se il sonno sia letargico o profondo. Nei sogni che come una specie di fantasmagoria compariscono d'ordinario nel sonno leggiero, e che sono un delirio meno prolungato, come pure nel sonniloquio e nel sonnambolismo in cui l'uomo parla e ragiona, cammina ed opera a sembianza di quello che fa nella veglia, dov'è mai la coscienza riflessiva e deliberata del *Me*, o del proprio individuo? L' uomo sognante ha una serie di sensazioni e di rappresentazioni incoerenti e disordinate che si legano e si succedono tra loro pel principio di associazione; ed egli non può nè frenarle, nè scomporle, nè allontanarle, appunto perchè difetta di quel sentimento del *Me* col quale arriva a reggere e timoneggiare qualsiasi pensiero o affetto, per quantunque esaltato e tumultante si mostri nello stato di veglia. Se egli piange o ride, se si allieta o si spaventa, non lo sa, o non prova questi affetti come tante modificazioni distinte dagli oggetti che le producono, e dal suo proprio individuo. Il sonniloquo ed il sonnambulo allorchè parlano, camminano ed operano con tutte le apparenze della riflessione e della volontà, nol fanno se non meccanicamente e nell' angusta sfera di quelle operazioni a cui sono già assuefatti; sicchè tutto quello che in loro accade di più strano e meraviglioso non è che una serie di associazioni o tra idee o rappresentazioni, o tra parole ed azioni collegate tra loro, o prima o nello stato di sonno, in virtù d' una idea o sensazione principale, e perciò indipendente da riflessione e da ragionamento, da deliberazione e da volontà, perchè manca in loro quel sentimento del *Me* che li determini e li spinga avvertitamente e scientemente a parlare e ad agire in quella forma. Ed è ciò tanto vero che quando i sonniloqui ed i sonnambuli si risentono, sono immemori di tutto quello che loro avvenne durante il sonno. Finalmente gli allucinati ed i pazzi anche per semplice monomania, o per una idea fissa e predominante, accennano sempre, a chi ben gli esamini, ad uno smarrimento od assopimento in loro della coscienza del *Me*, che è per così dire il piloto o timoniere nella tempesta degli umani deliramenti, e delle nostre aberrazioni. L'allucinato che a Londra non vedeva o non affigurava che il proprio paese, le sue case, gli ameni suoi

dintorni; l' altro allucinato cui pareva di sentirsi intronare l'orecchio dalla voce d' un Angelo che gli comandava di rinnovare il sacrificio d' Abramo; il monomaniaco che credeva di aver la testa di vetro, e che non esciva mai di casa per paura di romperla, sono tanti fatti che indicano che l' uomo è fuori di sè, ossia che manca di quel forte sentimento del *Me* o della sua propria individualità, per il quale padroneggia e regge tutte le sue interne rappresentazioni ed inclinazioni, riducendole coll'opera della volontà e della riflessione. Ma questo smarrimento o questa alienazione della coscienza e del sentimento del *Me*, e tutti i fenomeni che ne conseguitano, potranno dirsi l'effetto della vicendevole relazione tra l' intelligenza ed il cervello? E se ciò è, sarà questa relazione ancora continua e normale, siccome viene stabilita dalla natura? Io non posso qui senza deviare dall' argomento discendere alla disamina di tutte le minime cause che producono il sonno, i sogni, il sonniloquio, il sonnambolismo, l'allucinazione e la pazzia; chè a tanto si esigerebbe un lungo trattato. Mi basta toccare a quella che più d' appresso occasiona un cosiffato smarrimento od assopimento della coscienza del *Me*, siccome la più essenziale e la più prossima. La coscienza del *Me* non si spegne ad un tratto, ma a poco a poco, ossia con una lenta e graduale alterazione o lesione. Finchè l' intelligenza è ajutata nelle sue proprie funzioni dal cervello semplicemente come suo organo o strumento, ed il cervello è in istato fisiologico o di sanità, questa coscienza è chiara, distinta, e permanente, quanto le sue facoltà generatrici. Ma dal momento che si scompone questa relazione nel naturale equilibrio de' suoi due principj o rapporti; dal momento che le forti e persistenti impressioni del cervello o de' nervi cerebrali prevalgono colle loro rappresentazioni o sensazioni interiori ai sensi esterni, alla riflessione, all' intelligenza, ed alla stessa volontà; dal momento che la vita fisica od animale o dell'organismo si scompagina in sè stessa colla preponderanza e col disordine delle funzioni nervali, oppure invade e soperchia la intellettuale ed attiva col predominio del cervello e de' suoi movimenti interiori sul pensiero e sulla deliberazione, allora è rotto e sconvolto il giusto legame tra l' intelligenza ed il cervello, allora l'uomo, in balìa della natura soltanto sensitiva, si aliena e si trasporta fuori di sè, non ha più nè mente, nè libertà o volontà, non vive più che tra larve e fantasmi, che lo premono e lo incalzano per modo da fissare e concentrare su di essi tutta la sua attenzione, rimovendola da ogni altro oggetto. Quindi egli tutto assorto nella vita dell'imaginazione o delle idealità che lo soggiogano o tiranneggiano, non sente più in sè alcuna forza od attività

di spirito, nessuna padronanza o signoria che possa esercitare ancora sui propri pensieri ed affetti, non riconosce nemmeno la propria personalità o individualità, perchè gli manca persino la coscienza od il sentimento che ne lo avverta. Dopo di che io devo dedurre che anche ne' fenomeni misti se continua la relazione tra l' intelligenza ed il cervello, vi continua però in una guisa affatto innormale e disordinata, per essere estinta e sconvolta quella coscienza o quel sentimento del *Me* che è destinato dall' autore sapientissimo della natura a reggerla ed a governarla.

§ 58. Quanto all'ultimo fenomeno ch'io prendo qui a considerare nelle sue attinenze colla intelligenza e col cervello, e che ho già annunciato per la nozione del razionale od assoluto mediante l'empirico (§ 53) anche questo parmi dipendere immediatamente da cotesta relazione in generale, ed in particolare dal principio gia professato che l' intelligenza non esercita alcun atto senza l'intervento d' immagini, rappresentazioni o modificazioni prodotte dal senso, dalla memoria, e dalla immaginazione (§ 50). E di fatto come si può concepire mai l' idea di un che assoluto od al tutto razionale, senza che ci venga prima d' innanzi alla mente una serie di oggetti o un tutto ideale o rappresentativo di ciò che significa quell' idea stessa presa come nozione o cognizione. Come sarà dato di astratteggiare la bontà, la bellezza, l'infinità senza che la mente raggruppi e raccolga dentro di sè ed in un tutto intellettuale quelle note o qualità ch'essa affigge al buono ed al bello assoluto, od all' infinito? Come la ragione o l' intelletto potrà meditare e rivolgere in sè questi oggetti puramente intelligibili o razionali senza che per lo meno si muovano le fibre cerebrali necessarie al suo discorso interiore? Nè con ciò si altera la natura dell'assoluto a motivo che alla sua nozione o idea si fa concorrere l'empirico. L'uno rimane sempre distinto e diverso dall'altra. Altro è il modo con cui si acquista l'idea o nozione d'una cosa, ed è ben altro la cosa stessa conosciuta. Io non posso avere l'idea o la nozione del bello o del buono assoluto, che è tutta della ragione o del pensare puro senza il sussidio dell' organo cerebrale e della immaginazione che vi si prestino, l' uno come strumento dell' intelligenza e delle sue facoltà, l' altra come l' intermezzo fra il cervello e la intelligenza medesima. Per la ragione o per il pensare puro il razionale o l' assoluto rimane in sè stesso quel che è, e nulla vi si aggiunge o vi si attacca che senta dell' empirico o del materiale. Per la ragione o per l' intelligenza sorretta dal senso e dall' immaginazione e quindi anche dal cervello, altro non si fa che coordinare la ragione od il

pensar puro colla esperienza nell'atto conoscitivo che si appartiene solo all' intelletto od alla ragione. Per il primo modo, il razionale o l'assoluto resta sempre in sè stesso e nella sua natura un che di trascendente il senso e l' esperienza. Per il secondo la nozione o idea dello stesso assoluto o razionale soggiace alle leggi comuni dell' intendere o conoscere umano. Dal che si dimostra sempre più aperto l' equivoco dei puri razionalisti o trascendentali che pretendono o all' intuizione o percezione immediata e diretta del razionale od assoluto, per non frammischiarla coll'esperienza in virtù d'una assoluta, ma impossibile incomunicabilità tra il senso e l'intelletto, ovvero ad una specie di rivelazione o sintesi interiore per cui rampollano da sè od esistono già come principj anticipati o giudizj a *priori*, o come idee innate nella mente umana le nozioni del bello e del buono assoluto, dello spazio, del tempo, della sostanza e della causalità, senza verun sussidio od intervento del senso o della esperienza. Un tale equivoco, a mio credere, è doppio, e stà sempre: 1.° nel confondere l'oggetto conoscibile col modo o coll' atto della sua conoscenza, e nello scambiare la materia o il contenuto della cognizione colla facoltà conoscitrice; 2.° nel pigliare l'esperienza od il senso come una facoltà conoscitiva ed a sè, mentre ciò non è proprio se non dell' intelligenza.

§ 59. Se non che riconosciuto, per quanto venne fin qui per me dimostrato, essere continua, reciproca e disuguale la relazione tra l' intelligenza ed il cervello, non ne consegue per questo ch' essa sia d' identità o di causalità, imperciocchè una cosiffatta relazione è di armonia o di corrispondenza ed al postutto di semplice cooperazione; e non ci vuole che la esagerazione o la mala fede per siffattamente confonderla e travisarla. Ella è questa un'altra conclusione di qualche rilevanza, in quanto tende a chiarire il comune errore o d' idee o di linguaggio, per il quale pigliasi indifferentemente il cervello se non per causa unica effettrice, almeno per la più influente ai tanti fenomeni che ne provengono. Se la relazione fra l' intelligenza ed il cervello fosse d' identità non potrebbesi a meno di non sostituire l' uno all' altra, scambiando o trasmutando o il cervello coll' intelligenza, o l' intelligenza col cervello come cose che vanno a paro. Ed in allora mentre si saltano a piè secco tutte le più profonde analisi intorno alla loro opposta natura, si rinnova l' insostenibile ipotesi dell' influsso fisico, e ci rinveschiamo nell' abbiettezza del materialismo. Nemmeno può affermarsi essere cotesta relazione principio od efficienza di causalità per parte del cervello rispetto alla generazione dei fenomeni intellettuali

e morali, si perchè le idee, i giudizj ed i sentimenti e le volizioni, come cose del tutto immateriali o spirituali, non possono figliare che dalla intelligenza e volontà, potenze egualmente immateriali e spirituali, siccome lo è l'anima a cui appartengono quali suoi attributi, si perchè il cervello ben analizzato in tutta la sua struttura ed efficacia siccome è il centro delle funzioni vitali e sensitive, così è il semplice organo o strumento, e quindi non la causa, ma il mezzo o l'occasione alla vita intellettiva e morale ed alle sue manifestazioni. Negli stessi fenomeni misti, che pur si vorrebbero d'indole assolutamente fisica ed organica, risalta a quando a quando il predominio dalla intelligenza, e se non della volontà almeno della vera spontaneità, che sarà sempre incompatibile colla materia rude ed inertissima, tuttochè finamente disposta ed organizzata. Per lo chè se una cotale relazione non è, nè può essere d'identità o di causalità, ne viene necessariamenie che sia di semplice corrispondenza o di mera cooperazione. Con che se rimane tuttavia un alto segreto, il modo arcano con cui corrispondono tra loro l'anima ed il corpo, o due sostanze di così dissimiglievole natura, non riesce però nè ripugnante a ragione, nè contraddicente al fatto questo mutuo loro commercio, allorchè si consideri che nello stesso mondo fisico o materiale havvi la semplicissima ed incoercibile forza vitale che opera sui muscoli e sui nervi, senza che perciò vengasi a materiare, o localizzare la forza stessa, cogli organi che s' imprimono della sua azione. Io tolgo questo esempio dal mondo materiale non già ad argomento di analogia, chè niuna ce ne potrà mai essere tra lo spirito e la materia, tra l'esteso e l' inesteso, tra il semplice ed il composto, ma al solo fine di capacitare in qualche modo della possibilità che un essere semplice o spirituale qual è l'anima, agisca sul cervello che è materiale, senza che per questo si alteri la sua natura, o riesca inconcepibile la vicendevole loro corrispondenza e cooperazione.

§ 60. Pervenuto a questo punto della terza parte della mia Memoria, dalla quale risultano apertissime le conclusioni sulla relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza, e sulla sede od organica condizione di questa relazione medesima, non già con le massime e colle vedute del sig. Leuret, ma colle mie proprie osservazioni, non mi rimane più altro al suo compimento che di far cenno del terzo quesito o problema proposto dallo stesso Leuret, e richiamato al principiare di questo ragionamento (§ 40), cioè se cotesta relazione sia così costante ed invariata da costituire una vera legge. Anche da quest'ultima ricerca farò di disciormi con ben poche parole.

§ 61. È noto in Fisica che una forza qualunque non può operare che in una determinata guisa, e che i fenomeni in generale non possono a meno di non avvenire dietro ad una regola fissa e costante, siccome è fissa e costante la natura da cui fontanalmente derivano e tutte le forze e tutti i loro fenomeni. Per conseguente dicesi legge non che in Fisica, ma in tutte le scienze collaterali ed affini, quella norma o regola generale ed invariabile che tengono le forze od i fenomeni della natura nel loro modo di operare. Ora chi potrà mai qualificare per una legge di Fisiologia o di Psicologia la relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza, allorchè è già provato mancarle i due essenziali caratteri della costanza e della generalità od universalità? Delle circonvoluzioni, cerebrali difettano molti animali che pure diconsi intenditivi, mentre ne abbondano quelli che distano immensamente dall'intelligenza dell'uomo. Il Leuret medesimo conviene che nè l'esistenza, nè la quantità, nè la forma di esse circonvoluzioni sono da tanto da innalzarsi propriamente alla dignità d'una legge. Il perchè io stesso ho per fermo che le circonvoluzioni cerebrali tuttochè rilevate ed in buon numero appariscano ne'gruppi degli animali più perfetti, ciò nondimeno non si leghino così strettamente e necessariamente coll'intelligenza da essere sempre queste l'indizio o la norma di quella. Quindi tanto più grande sarebbe l'inganno nel pigliarle per causa o condizione immanchevole del maggior o minor intendimento negli animali. L'esistenza, il numero, e la forma delle circonvoluzioni cerebrali non sono, nè saranno mai altro che tante accidentalità procedenti dalla nativa costruttura e ripiegatura delle fibre del cervello, e perciò indifferenti alla sua sostanza, e molto più alla sua influenza ed azione sull'intelligenza. Che se tutto in natura ha una ragione sufficiente sì della sua esistenza, come de'suoi modi, ove scorgesi mai questa ragione tra le ripiegature e gli anfratti della sostanza cerebrale, e la forza intenditiva? Chi dall'esistenza di quattro o cinque circonvoluzioni prominenti e ben ondulate del cervello vorrà dedurre la mente perspicace ed inventrice di Galileo, di Newton, di Lagrange, e di Volta, mentre le identiche circonvoluzioni e ben tornite e spiccatissime s'accompagnano colla stupidità, e senza il bene dell'intelletto, nell'ebete, nell'idiota, e nel cretino, e mentr'esse risaltano e si sollevano dalla testa dell'elefante, il cui intendimento per quanto fino e sagace si decanti, non aggiunge mai la cognizione nemmeno dell'illetterato e del fanciullo? Oh! non son queste nè le vie, nè i modi consueti con cui sogliono procedere le vere leggi della natura. Esse per la necessità dell'ordine e della perfezione, per l'infinita

sapienza del Supremo loro Autore e Reggitore porgono sempre una ragione e proporzione tra i mezzi ed il fine, tra le cause e gli effetti; ed anche quando con semplici e tenuissimi principii s'ingenerano effetti grandi e portentosissimi, nella tenuità stessa di quelli s'accumula e s'accentra cotanto d'intensità ed energia di forza da equiponderare sempre l'effetto colla causa, da serbare intatto ed inviolabile l'ontologico principio: Che l'effetto è eguale alla sua causa: Che non ci può essere di più nell'uno che nell'altra. Che se è innegabile non corrispondere le circonvoluzioni cerebrali coll'intelligenza a forma d'una vera legge, egli è del pari innegabile che esse, come modificazioni od accidentalità del cervello, entrano col cervello stesso nell'esercizio dell'intelligenza, ma non già come ripiegature e prominenze esterne di quello, ma come parti ed appendici della sua sostanza continua, che è lo strumento o l'organo delle facoltà intellettive dell'uomo. Laonde stassi più che mai sicura ed inconcussa anche quest'ultima conclusione: Che v'ha relazione o connessione reciproca e costante non già tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza, ma soltanto fra l'intelligenza ed il cervello come suo organo o strumento, qualunque sia accidentalmente la sua forma esteriore o piana od ondulata, ossia con o senza circonvoluzioni (1). Nè per queste così semplici e piane conclusioni, lontane inve-

(1) Due Zootomisti francesi si sono messi sulla via lasciata a mezzo dal Leuret per proseguire e compiere le sue ricerche intorno ai rapporti tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza; e sono l'uno il dott. M. P. *Grabiolet*: « Sur les plis cerebraux de l'Homme et des Primates 1850-51; » e l'altro il professore C. *Dareste*: « Sur les circonvolutions du cerveau § 60 chez les Mammifères; 1852-54 (V. Annales des Sciences naturelles, Paris Tom. XVI N. 4. Ser. 3. 1851, Tom XVII N. 1. Serie 3. Année 8. 1852, Tom. 2. N. 2 Serie 4. Paris 1854). Il Grabiolet dividendo l'errore di Leuret che ci sia una relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza, e un degradamento nella specie senza di quelle, si è internato di più nella struttura delle circonvoluzioni stesse, facendole derivare dalle fibre cerebrali più rilevate che s'intromettono e penetrano negli strati corticali del cervello: sicchè esse sono, per avviso di lui, un prodotto dell'espansione del fogliame aderente al nocciolo cerebrale. Il prof. Dareste invece, secondo i risultamenti delle sue osservazioni assai estese, non ammette che una relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e la statura o grandezza degli animali (*taille*), negando assolutamente di aver mai trovato un qualche rapporto diretto tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza e l'istinto. Io cito assai volontieri questi lavori anatomici recentissimi intorno alle circonvoluzioni cerebrali, perchè vengono a taglio per rinfiancare le conclusioni di questa Memoria tanto nella parte fisiologica, quanto nella psicologica, nel mentre che segnano l'ultimo grado o punto a cui è arrivata finora la scienza Zootomica circa a quest'argomento.

ro dalle larghe promesse del Leuret e di altri, potrebbe niegarsi un qualche vantaggio o progresso alla scienza psicologica massime a'dì nostri. Essa si bilica ancora tra le dottrine esclusive e talvolta opposte dei Filosofi e dei Fisiologi, nè sa sempre appuntarsi per dare aggiustatamente il tracollo alla bilancia. I Filosofi impaurendo d'ogni influenza o relazione benchè minima del cervello o dell'organismo col pensiero, inimicano l'uno coll'altro, e temono sempre d'essere arreticati al materialismo. I Fisiologi all' invece più fidenti ed animosi fanno il loro soperchio coll'attribuire l' intelligenza e tutti i suoi fenomeni nonchè al cervello, ma benanco alla sua sostanza cinerea o grigia, alla sua forma, alla sua densità, al suo volume, al suo peso, e perfino alla moltiplicità de'suoi organi interni od alle sue protuberanze nel cranio. Quelli stessi che induano od addoppiano codesta relazione col riferirla in parte all'anima, ed in parte al corpo s'accontentano alla fine di vaghe generalità per accertarla come fatto, senza investigarne più addentro nè il come nè il quanto; mentre che altri osano spacciare l'erronea dottrina del cervello causante o prevalente nelle funzioni dell' intelligenza. Tutti poi insieme coi loro errori o colle loro esagerazioni, coi dubbii e colle analisi leggere ed imperfette dei fatti o fenomeni dipendenti da questa relazione, la vanno determinando e contrassegnando all' ingrosso contro il metodo di procedere nella scienza. Ora se in mezzo a tanta disparità e incertezza di dottrine e di opinioni, se nel difetto d' indagini veramente precise e scientifiche si tolga a ben chiarire e conterminare questo arduo problema della Psicologia in quello che è possibile, a fissarne le leggi ed i caratteri, e ad addurre tutti gli argomenti che valgano ad istabilirli come tanti veri ridotti a certezza, chi potrà mai disconsentire che se la scienza non può glorificarsi per sì poco della scoperta o dell' invenzione, non s'avvantaggi e s' innoltri d'un passo? So che queste conclusioni che ritengo omai ridotte, almeno per me, a tutta la luce del vero e ad irrepugnabili assiomi, sono deboli sforzi per l'impazienza o pel desiderio d' innovare e di scoprire. So che in generale non si fa ragione alla Filosofia come alle altre scienze anche di semplice intuizione, nè della somma sua difficoltà, nè dell'immensa sua importanza. Ma chi può vantarsi di scoprire sì presto in una scienza di tal fatta? Chi vorrà disgradarla, dopo che anche il celebre Fisico Ampère l' ha messa così in cima nell'albero genealogico o nella classificazione di tutte?

§ 62. Ma quello che per ultimo rileva di far conoscere a voi, onorevoli Colleghi, si è come dalla lunga mia Memoria sulla relazione tra le circonvoluzioni

cerebrali e l'intelligenza apparisca e si confermi quel carattere di scienza anche pratica ch'io non esitai ad assegnare alla Filosofia. E qual prò potranno fare d'un tale problema la scienza e la vita pratica della società o dell'individuo? A che giova per ben vivere, per progredire o per migliorare il sapere quali e quante siano le circonvoluzioni cerebrali ne' mammiferi, come e perchè esse operino sull'intelligenza; come e perchè l'intelligenza degli animali non sia quella dell'uomo; e come mancando o sconciandosi le circonvoluzioni cerebrali, non manchi, nè si sconci similmente l'intelligenza? Son questi i rimbrotti ed i rinfacciamenti che potrebbersi ripetere anche di presente contro alla Filosofia, nè è giusto che la scienza debba patirne la vergogna.

§ 63. Il non vedere od il niegare l'indole pratica e le pratiche applicazioni alla Filosofia parmi dipendere in fondo da una cagione sola, dal pregiudizio ossia da un giudizio anticipato o precipitato per qualsiasi motivo o di amor proprio e di vanità, o d'interesse, o di abitudine e di autorità, e persino d'ignoranza e di contraddizione. Un cosiffatto pregiudizio si appalesa sempre nella comune opinione che la Filosofia sia una scienza puramente astratta o speculatrice, non suscettiva di pratiche applicazioni, il vero contrapposto, anzi l'antitesi delle scienze pratiche, di fatto o positive, come si suole differentemente denominarle. A mostrare come questo pregiudizio altro non sia che un manifesto errore dell'intelletto che non dovrebbe mai mettere radice nella mente de' dotti, gli è d'uopo preporre le seguenti dimande sulla vera e genuina indole della scienza, e perciò anco della Filosofia. 1.ª Può egli darsi una scienza soltanto teorica o speculativa, ed una scienza puramente ed esclusivamente pratica? 2.ª La scienza puramente teorica o speculativa ha anch'essa la sua parte applicata e pratica ben distinte ambedue una dall'altra, nè confuse, come si suole, insieme? 3.ª Questa parte applicata e pratica di che natura o specie dev'essere e per sè stessa ed in relazione alla scienza che pur si volesse soltanto teoretica o speculativa?

§ 64. Quanto alla prima dimanda io direi, che quantunque sia generale la triplice divisione delle scienze in teoriche e pratiche ed applicate, essa tuttavia è illogica ed inesatta a chiunque la consideri un pò attentamente. La scienza non è altro che un sistema o complesso di principii o di verità generali dedotte le une dalle altre allo scopo di utili e giuste applicazioni. Quindi dove ci ha principii o verità generali, ivi deve essere la teoria o la speculazione. Quindi la scienza, qualunque essa sia, o per la natura del suo metodo o per la

sua tendenza più al pensare che all'operare o viceversa, avrà sempre una parte teorica o speculativa; senza di che cesserebbe d'essere scienza. Adunque la scienza o le scienze in sè, per quanto si affigurino per pratiche od operative, sono essenzialmente teoriche o speculative, in quanto consistono di principii e di dottrine ridotte a sistema od a speculazione. Perciò la divisione o distinzione così accetta tra le scienze speculative e pratiche od operative non potrebbe correre se non per lo appagarsi le une più del vedere o pensare, e le altre più dell'operare. Da questo lato conseguentemente la Filosofia non è nè più nè meno di quello che sono tutte le altre scienze, tuttochè per la qualità del suo oggetto essa sia portata di più al pensare che all'operare. Sotto questo punto di vista soltanto sarebbe tollerabile che la Filosofia si tenesse per una scienza teorica o speculativa; ma non la è così profondandosi un pò di più nel ragionamento.

§ 65. La Filosofia per quantunque astratta e speculativa, ed inchinevole più al pensare che all' operare, nondimeno ha la sua parte pratica ed applicata al pari di tutte le altre scienze. Ecco la risposta alla seconda dimanda. La parte pratica, come lo dinota il significato della parola, stà nell' esercizio, nell'atto o nell'azione, e quindi nel fare od operare. Che se per fare ed operare occorre talvolta di applicare, non pertanto l'applicare sta da sè, ed esprime l'apporre o l'annestare una cosa ad un'altra, ossia i principii e le dottrine d'una scienza a quelli d'un'altra. Perciò anche la Filosofia si può dire che fa ed opera, allorchè si dà all' istruzione dei sordo-muti e dei ciechi nati, costruisce le celle penitenziali per l'isolamento dei carcerati, prepara gli asili e gl' Istituti di carità, e compila i codici che reggono gli stati e tutto il mondo. Essa altresì viene a grandi applicazioni, quando le sue teoriche trapassano dalla Psicologia e dalla Morale nelle scienze antropologiche, nella Estetica, nella Pedagogia, nella Giurisprudenza, nell'Economia, e nella Politica, e quando i suoi metodi di logica servono a' progressi della Fisica, della Matematica, e persino dell'arte, della Letteratura, e della Tecnologia. Talchè la Filosofia che dall'universale si stima una scienza di mere astrazioni e speculazioni, discende anch'essa al pari delle altre sul campo dell'esperienza e della pratica, ossia dell'azione. Laonde ella pure si compone di quei tre elementi essenziali e comuni ad ogni scienza in generale, cioè della *teoria* o speculazione, della *pratica* e dell' *applicazione*. Se nonchè il fare e l'operare e l'applicare della Filosofia non può essere identico a quello delle altre scienze strettamente tecniche od operative, oppure di espe-

rienza o di fatto, essendone così diverso il suo oggetto puramente razionale ed astratto, morale e non mai fisico, non empirico o sensibile, ma puramente intellettuale. Quindi essa nella parte stessa pratica ed applicata non potrà a meno di non mantenere quel carattere di astrattezza e di razionalità onde la imprime quell'oggetto medesimo. Con che ho fatto risposta anco alla terza od ultima dimanda.

§ 66. Ciò premesso, quanta e quale non è la parte pratica della Filosofia eziandio in questi suoi concetti sulla semplice Psicologia del cervello e dell'intelligenza? Quanta non è la sua parte applicata in relazione alla Fisiologia e all'Antropologia ed a tutte le altre scienze affini? Il Leuret ha falsificata una grande verità col fare l'intelligenza degli animali quella dell'uomo. E non è adunque di grande importanza al tutto pratica il rivendicare dall'errore questo vero depositato persino nel senso comune? E non sarà egli vantaggioso e alla dignità dell'umana specie, ed alla sua morale e pratica condotta il locarla più in alto del bruto per la diversa intellettiva, il crederla fatta da natura per soprastare, per migliorare e per progredire colle idee del bello, del buono, del grande, e del sublime, anzichè per istrisciare sul suolo come il rettile, per insozzare nel fango dei sensi come il ciacco, per emulare all'industria delle api, del ragno e del castoro soltanto per istinto? Che se fosse vero, come s'avvisa il Leuret, che i mammiferi vanno forniti d'intelligenza al pari dell'uomo, e che a sua sembianza eglino sono capaci di amicizia, di dovere, e di virtù, quale culto avrebbesi più mai nel mondo il genio della scienza, delle arti, e della poesia? In quale ammirazione potrebbero mai più venire l'amore paterno e figliale, la fedeltà coniugale, e tutti i più generosi sentimenti della carità, del perdono, e del sagrificio della vita, a confronto della scimia che supera l'uomo nell'astuzia e nell'imitazione, del leone pieno d'orgoglio magnanimo verso il nemico, dell'orso e della pantera che combattono ad oltranza per la salvezza della prole, e del cane fedele che dilegua e si muore per malinconia sulla tomba dell'estinto padrone? In fine se la relazione tra le circonvoluzioni cerebrali e l'intelligenza non è interrotta, disuguale e mediata, ma continua ed immediata, e tale da immedesimarsi ed essere causa dell'intelligenza e de'suoi atti, chi non terrà per identico il cervello coll'intelligenza, il corpo coll'anima e quindi aperta una nuova via al materialismo? Ed è appunto il materialismo sì pernicioso e sì contrario ai fini, ed alla morale dell'uomo che la Filosofia studiasi di combattere e prostrare, perchè è desso che lo degrada ed abbassa all'inerzia ed alla stupidità

delle pietre e delle piante, che irride al suo libero arbitrio, che sovverte ed annienta ogni moralità delle sue azioni nel presente, ed ogni speranza nell'avvenire, e che spegnendo in lui ogni sentimento di nobiltà, di grandezza, e di virtù il riduce alla fine alla misera condizione della macchina e del bruto. Se la Filosofia impertanto è quella che fa sforzi per isventare ed abbattere gli errori ed i sofismi di questo funesto sistema, e per impedire che essi non si traducano nella vita pratica od operativa alterando tutte le idee, i sentimenti e gli affetti dell'umana natura in ordine al bene ed alla morale, egli è evidente che non si ponno più disconoscere le grandi verità pratiche che ne derivano, e che questa scienza oltre chè di teorica o speculativa, si merita il nome di pratica o di operativa. Certo ch'essa, anche come pratica, non può nè procedere nè operare come le scienze fisiche e naturali, mentre la sua attività è tutta intellettuale o mentale e quindi latente, morale ed immateriale nelle stesse azioni esteriori, siccome sono latenti, morali ed immateriali tutti i suoi ritrovati ed i suoi macchinamenti. Le scienze fisiche e naturali coi loro congegni e colle loro invenzioni pratiche, sensate e materiali allettano e prestigiano il senso, seducono coll'utile e col piacere e s'impadroniscono coll'immediata evidenza del comune assenso e dalla generale ammirazione. Ma le scienze morali, tra cui primeggia la Filosofia, e le loro invenzioni appunto perchè razionali ed immateriali anche quando sono ridotte all'esperienza ed alla pratica, non possono agognare a siffatto prestigio, nè aspettarsi mai un sì unanime consenso od un così invidiabile trionfo. Ma cesseranno perciò elleno d'essere grandemente utili ed importanti, e fatte eziandio per la vita pratica ed operativa? L'applicazione d'un grande principio o sistema di Filosofia alla morale o all'Economia ed alla Legislazione; la nuova e più fina e più ragionata analisi d'un sentimento e d'una facoltà umana, l'invenzione di un nuovo metodo logico per la scoperta del vero in qual siasi scienza dovranno aversi in minor conto del ritrovamento d'una nuova forza motrice, d'una macchina per sollevare i pesi a grandi altezze, d'un apparato meccanico od altro che faccia servire la luce ad imprimere e ritrarre, e l'elettrico a trasmettere l'umano pensiero? Un così fatto giudizio deriva pur troppo dall'inclinazione predominante alle utilità materiali che attraggono i sapienti al pari del volgo, dal non mirare all'intrinseca e reale, sibbene all'apparente importanza delle cose, dal fascino dei sensi che abbacinano ed ammaliano anco i più ritrosi, ed infine dal mal abito o vizio della prima educazione in cui si prediligono e si glorificano soltanto le scienze pre-

stigiatrici del senso e della materia, intanto che si mettono in non cale quelle che annobiliscono ed innalzano il pensiero ed il sentimento. Ma tuttociò non può più avverarsi, allorchè si guardi imparzialmente all'indole ed ai successi anche nella pratica delle scienze morali, e quindi della Filosofia. Che se poi si voglia andare ancora più persuasi esser la Filosofia, ad onta di tutta la sua astrattezza e de'suoi speculamenti, non solo scienza pratica, ma ben anco applicata, io più che con queste letture ragguardanti alla Psicologia comparativa o a dir meglio all'Anatomia ed alla fisiologia del cervello e delle sue circonvoluzioni in relazione all'intelligenza, il farò con altre in avvenire, disfiorando il campo delle scienze che hanno o frantesa, o sconvolta, o sformata qualche teorica o dottrina Filosofica. Con che se non è soverchia la fidanza, io crederei di venire in servigio della scienza a un doppio riguardo, e col tentare di riempiere una sua lacuna, qual è quella del trattato d'una Filosofia applicata, che manca assolutamente, e col rivendicarla dai molti errori filosofici che imbrattano anco le opere più stimate in altre discipline. Sotto il primo riguardo il tentativo è di qualche rilievo perchè come non v'ha una Matematica ed una Astronomia ed una Anatomia soltanto pura, ma ben anco applicata; così v'ha una Filosofia non solamente di Psicologia, di Logica, di Metafisica, e di Morale o di scienza pura, ma altresì di scienza applicata. Sotto il secondo riguardo, come non è lecito il falsare le regole del calcolo o il pigliare a rovescio i dettati dell'Astronomia, della Chimica e della Fisica nella Meccanica, nella Geografia, nella Nautica, e nella Geologia; così non pare convenevole che si travisino o si bistrattino quelle della Filosofia applicata a qualsiasi altra scienza a causa delle loro mutue e necessarie attinenze o relazioni.

(*Letta li 4 agosto e 25 novembre* 1850, 23 *maggio* 1852 *e* 23 *luglio* 1854)

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME